ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 4, с. 44–51

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО ПЕРМАНЕНТНОГО ВРАЩЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ РАВЕНСТВА АППЕЛЬРОТА

© 2021 г. М. А. Новиков

Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия

e-mail: nma@icc.ru

Поступила в редакцию 27.01.2020 г.
После доработки 03.02.2020 г.
Принята к публикации 12.02.2020 г.

В механических автономных консервативных системах, допускающих частный интеграл, иногда имеются стационарные движения, существующие как с частным интегралом, так и без него. Рассматривается система, в которой при выполнении равенства Аппельрота существует интеграл Гесса и выделено стационарное движение, имеющее место и без равенства Аппельрота. В статье вторым методом Ляпунова проведено исследование устойчивости такого стационарного движения. Установлено, что граница области достаточных условий устойчивости не совпадает с границей области необходимых условий устойчивости.

Ключевые слова: стационарное движение, общий интеграл, частный интеграл, связка интегралов, устойчивость движения

DOI: 10.31857/S0572329921030090

1. Введение. Более полное изучение свойств механических автономных консервативных систем можно осуществить при нахождении наибольшего числа первых интегралов. В задаче о движении твердого тела вокруг неподвижной точки [1, 2] кроме трех известных общих интегралов: полной энергии, кинетического момента и Пуассона, в [2] приведены случаи существования частных интегралов. Одним из них является интеграл Гесса, существующий только при выполнении равенства Аппельрота [2].

В консервативных системах важной характеристикой считается существование стационарных движений, которые отыскиваются методом Рауса–Ляпунова [3, 11]: составлением связки из первых интегралов. Иногда найденные по полной связке известных первых интегралов стационарные движения совпадают с такими же стационарными движениями, составленными для неполной связки без учета какого-либо первого интеграла. Особое значение имеет игнорирование частного интеграла.

Хотя этот вопрос недостаточно изучен, он представляет интерес исследования устойчивости по Ляпунову [12–16] найденных стационарных движений и устойчивости в окрестности этого интеграла, когда не существует частный интеграл.

2. Постановка задачи. Рассматривается нелинейная механическая автономная консервативная система [1, 2], описываемая дифференциальными уравнениями:

$$
\begin{gathered}
OA\dot{p} = (B - C)qr + z_0\gamma_2, \quad \dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3 \\
B\dot{q} = (C - A)rp - z_0\gamma_3 + x_0\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1 \\
C\dot{r} = (A - B)rq - x_0\gamma_2, \quad \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2
\end{gathered}
\tag{2.1}
$$

где $x_0 \neq 0 \neq z_0$; A, B, C — моменты инерции твердого тела относительно главных осей Ox, Oy, Oz; p, q, r — проекции мгновенной угловой скорости на подвижные, связанные с телом оси; x_0, z_0 — координаты центра масс в подвижных осях; γ_1, γ_2, γ_3 — проекции ортов подвижных осей на неподвижную вертикальную ось OZ.

Для системы (2.1) известны три первых общих интеграла [2]:

$$V_0 = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2(x_0\gamma_1 + z_0\gamma_3) = \text{const}$$

$$V_1 = Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = \text{const}$$

$$V_2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$$

При выполнении равенства Аппельрота [2]:

$$AC(x_0^2 + z_0^2) = B(Ax_0^2 + Cz_0^2) \tag{2.2}$$

система (2.1) допускает частный линейный интеграл Гесса, заданный в аналитическом виде

$$V_3 = Ax_0p + Cz_0r = 0 \tag{2.3}$$

В статье [16] приведены некоторые стационарные движения системы (2.1). Одним из них является перманентное вращение:

$$\begin{gathered} p_0 = \frac{-z_0}{\sqrt[4]{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}}\sqrt{\frac{C(Ax_0^2 + Cz_0^2)}{A(A-C)x_0z_0}}; \quad q_0 = 0 \\ r_0 = \frac{x_0}{\sqrt[4]{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}}\sqrt{\frac{A(Ax_0^2 + Cz_0^2)}{C(A-C)x_0z_0}} \\ \gamma_{10} = \frac{-Cz_0}{\sqrt{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}}, \quad \gamma_{20} = 0 \\ \gamma_{30} = \frac{Ax_0}{\sqrt{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}}, \quad A > C, \quad x_0z_0 > 0 \end{gathered} \tag{2.4}$$

Отметим сразу, что для системы (2.1) стационарное движение (2.4) может существовать и без участия интеграла (2.3), что соответствует невыполнению равенства (2.2).

Ставится цель исследования вторым методом Ляпунова устойчивости перманентного вращения (2.4) в малой окрестности соотношения (2.2), когда не выполняется равенство Аппельрота. Это выражается условием

$$B = \frac{AC(x_0^2 + z_0^2)}{Ax_0^2 + Cz_0^2} + b \tag{2.5}$$

при достаточно малых отличных от нуля вещественных величинах b. Здесь предварительно не оговаривается знак b.

3. Необходимые условия устойчивости. Получаемые достаточные условия следует в дальнейшем сопоставлять с необходимыми условиями устойчивости стационарного движения (2.4). Для этого введем отклонения:

$$x_1 = \mathrm{p} - \mathrm{p}_0, \quad x_2 = \mathrm{q}, \quad x_3 = \mathrm{r} - \mathrm{r}_0$$

$$x_4 = \gamma_1 - \gamma_{10}, \quad x_5 = \gamma_2, \quad x_6 = \gamma_3 - \gamma_{30}$$

Матрица линейной правой части системы обыкновенных дифференциальных уравнений возмущенного движения будет следующей

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{(B-C)r_0}{A} & 0 & 0 & \dfrac{z_0}{A} & 0 \\ \dfrac{(C-A)r_0}{B} & 0 & \dfrac{(C-A)p_0}{B} & \dfrac{-z_0}{B} & 0 & \dfrac{x_0}{B} \\ 0 & \dfrac{(A-B)p_0}{C} & 0 & 0 & \dfrac{-x_0}{C} & 0 \\ 0 & -\gamma_{30} & 0 & 0 & r_0 & 0 \\ \gamma_{30} & 0 & -\gamma_{10} & -r_0 & 0 & p_0 \\ 0 & \gamma_{10} & 0 & 0 & -p_0 & 0 \end{pmatrix}$$

Получение необходимых условий устойчивости опирается на характеристическое уравнение матрицы D_1 [12—15], которое имеет вид

$$f(\lambda) = \det(D_1 - \lambda E) = \lambda^2 f_1(\lambda) = 0$$

$$f_1(\lambda) = \lambda^4 + a_4\lambda^2 + a_2 \qquad (3.1)$$

где

$$a_4 = \frac{F_4}{ABC(A-C)x_0z_0\sqrt{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}}, \quad a_2 = \frac{F_2}{A^2BC^2(A-C)x_0^2z_0^2(A^2x_0^2 + C^2z_0^2)}$$

$$F_4 = A^2\left[AB + (A-C)(B-C)\right]x_0^4 + AC\left[B + 2(A-C)\right]x_0^2z_0^2 + \\ + C^2\left[BC + (A-C)(A-B)\right]z_0^4$$

$$F_2 = (Ax_0^2 + Cz_0^2)[A(B-C)x_0^2 - C(A-B)z_0^2]\varphi(A, C, x_0, z_0)$$

$$\varphi(A, C, x_0, z_0) = A^3x_0^4 - 4AC(A-C)x_0^2z_0^2 - C^3z_0^4$$

Вычисления определителей матриц, подстановки, замены переменных и факторизация символьных выражений были проведены на персональном компьютере системой аналитических вычислений “Mathematica”.

Многочлены F_4, F_2 выделены отдельно, чтобы освободиться от выражений с знаменателями.

Нельзя исключать из анализа нулевые корни уравнения (3.1). Вместе с тем из вида матрицы D_1 не допускается возможность возникновения всех нулевых корней уравнения (3.1). Тогда для отсутствия отличных от нуля вещественных корней уравнения $f_1(\lambda) = 0$ необходимо и достаточно выполнения одного из условий:

$$\text{I.} \quad a_2 > 0, \quad a_4 > 0 \qquad (3.2)$$

$$\text{II.} \quad a_2 > 0, \quad a_4 \le 0, \quad a_4^2 < 4a_2 \qquad (3.3)$$

$$\text{III.} \quad a_2 > 0, \quad a_4 = 0 \qquad (3.4)$$

Отдельно для существования дополнительных нулевых корней вводится случай

$$\text{IV.} \quad a_2 = 0; \quad a_4 > 0 \qquad (3.5)$$

Проверка перечисленных условий осуществляется вычислением знаков выражений F_2, F_4.

При подстановке (2.5) в выражения F_2, F_2, $a_4^2 - 4a_2$ запишем

$$F_4 = ba_{41} + a_{40}, \quad F_2 = b(Ax_0^2 + Cz_0^2)\varphi(A, C, x_0, z_0)$$

$$a_4^2 - 4a_2 = \frac{a_{02}b^2 + a_{01}b + a_{00}}{AB^2C(Ax_0^2 + Cz_0^2)x_0^2z_0^2}$$

где

$$a_{41} = (Ax_0^2 + Cz_0^2)[A(2A - C)x_0^2 - C(A - 2C)z_0^2]$$

$$a_{40} = AC[A^2x_0^4 + 2(A^2 - AC + C^2)x_0^2z_0^2 + C^2z_0^4] > 0$$

$$a_{02} = (Ax_0^2 + Cz_0^2)\ [AC\,(x_0^2 + z_0^2)^2 - 12\,(A - C)^2\,x_0^2z_0^2]$$

$$a_{01} = 2(Ax_0^2 + Cz_0^2)^2[A^2Cx_0^4 + (A + C)(-6A^2 + 13AC + AC^2)x_0^2 + AC^2z_0^4]$$

$$a_{00} = AC[(Ax_0^2 + Cz_0^2)^4 - 12(A - C)^2(A^2x_0^2 + C^2z_0^2)(x_0^2 + z_0^2)x_0^2z_0^2]$$

Кроме того запишем необходимые условия существования твердого тела [1]:

$$A + B > C, \quad A + C > B, \quad B + C > A$$

Здесь первое неравенство выполняется тождественно ввиду $A > C$. Из второго неравенства следует ограничение

$$b < \frac{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}{Ax_0^2 + Cz_0^2} \tag{3.6}$$

Последнее неравенство сводится к

$$b > \frac{A(A - 2C)x_0^2 - C^2z_0^2}{Ax_0^2 + Cz_0^2} \tag{3.7}$$

Очевидно, в правой части (3.7) возможен любой знак выражения.

4. Достаточные условия устойчивости. Наиболее эффективным способом получения достаточных условий устойчивости является второй метод Лянунова [12]. Построение знакоопределенных функций Ляпунова будем выполнять методом Четаева [13] – составлением связок из первых интегралов возмущенного движения.

Общие интегралы возмущенного движения запишутся:

$$V_{01} = Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 + 2(Ap_0x_1 + Cr_0x_3 + x_0x_4 + z_0x_6) = \mathrm{const}$$

$$V_{11} = Ax_1x_4 + Bx_2x_5 + Cx_3x_6 + A(\gamma_{10}x_1 + p_0x_4) + C(\gamma_{30}x_3 + r_0x_6) = \mathrm{const}$$

$$V_{21} = x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + 2(\gamma_{10}x_4 + \gamma_{30}x_6) = 0$$

Равенство Аппельрота и частный интеграл Гесса здесь могут не выполняться, и поэтому не учитываются. При анализе связки интегралов значительно проще и эффективнее предварительное исключение интегралов с фиксированными константами (в данном случае интеграл Пуассона). Для этого из интеграла $V_{21} = 0$ запишем решение

$$x_6 = -\gamma_{30} + \gamma_{30}\sqrt{1 - \frac{(x_4^2 + x_5^2 + 2\gamma_{10}x_4)}{\gamma_{30}^2}}$$

Для анализа многочленов нужно освободиться от иррациональности разложением подкоренного выражения в ряд Маклорена

$$x_6 = -\gamma_{30}\left(\frac{k}{2} + \frac{k^2}{8} + \frac{k^3}{16} + \cdots\right), \quad k = \frac{(x_4^2 + x_5^2 + 2\gamma_{10}x_4)}{\gamma_{30}^2}$$

Из оставшихся интегралов с подставленной переменной x_6 составим связку

$$K(x,\alpha) = \alpha_0 V_{01} + \alpha_1 V_{11} \tag{4.1}$$

Чтобы не вводить дробные множители полагаем

$$\alpha_0 = \sqrt{AC(A-C)x_0 z_0}; \quad \alpha_1 = 2\sqrt{Ax_0^2 + Cz_0^2}\sqrt[4]{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}$$

Квадратичная часть составленной связки интегралов будет представлена квадратичной формой от оставшихся пяти переменных $K^{(2)}(x) = x'Mx$, $x \in R^5$ с матрицей

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 & m_{14} & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & 0 & m_{25} \\ 0 & 0 & m_{33} & m_{34} & 0 \\ m_{14} & 0 & m_{34} & m_{44} & 0 \\ 0 & m_{25} & 0 & 0 & m_{55} \end{pmatrix}$$

где

$$m_{11} = \sqrt{A^3C(A-C)x_0z_0}, \quad m_{14} = A\sqrt{Ax_0^2 + Cz_0^2}\sqrt[4]{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}$$

$$m_{22} = B\sqrt{AC(A-C)x_0z_0}, \quad m_{25} = B\sqrt{Ax_0^2 + Cz_0^2}\sqrt[4]{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}$$

$$m_{33} = \sqrt{AC^3(A-C)x_0z_0}, \quad m_{34} = \frac{C^2z}{Ax_0}\sqrt{Ax_0^2 + Cz_0^2}\sqrt[4]{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}$$

$$m_{44} = (x_0^2 + z_0^2)\sqrt{\frac{C(Ax_0^2 + Cz_0^2)}{A^3(A-C)x_0^5z_0}}, \quad m_{55} = (x_0^2 + z_0^2)\sqrt{\frac{AC(Ax_0^2 + Cz_0^2)}{(A-C)x_0z_0}}$$

На главной диагонали матрицы M находятся только положительные элементы. Согласно [17] по критерию Сильвестра для положительной определенности $K^{(2)}(x)$ необходимо и достаточно положительности всех главных миноров матрицы M. Для краткости обозначим их как $J(i_1, i_2, \cdots, i_s)$, состоящие из $i_1, i_2, \cdots, i_s$, $(s \geq 1)$ строк и столбцов. Тогда для миноров матрицы M можно составить тождества: $J(1,2,3,4) = m_{22}J(1,3,4)$, $J(1,2,3,4,5) = J(1,3,4)J(2,5)$.

Проведенные вычисления получают:

$$J(1) = m_{11} > 0, \quad J(1,2) = m_{11}m_{22} > 0, \quad J(1,2,3) = m_{11}m_{22}m_{33} > 0$$

$$J(1, 3, 4) = -\sqrt{\frac{C^3(A-C)^3(A^2x_0^2 + C^2z_0^2)z_0}{Ax_0^3}}(A^3x_0^4 - C^3z_0^4)$$

$$J(2, 5) = B\sqrt{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}[AC(x_0^2 + z_0^2) - B(Ax_0^2 + Cz_0^2)]$$

Окончательно для положительной определенности $K^{(2)}(x)$ необходимо и достаточно положительности $J(1, 3, 4) > 0$, $J(2, 5) > 0$, что выражается:

$$B < \frac{AC(x_0^2 + z_0^2)}{Ax_0^2 + Cz_0^2} \tag{4.2}$$

$$A^3x_0^4 < C^3z_0^4 \tag{4.3}$$

Таким образом, при условиях (4.2), (4.3) и $b < 0$ перманентное вращение (2.4) устойчиво по теореме Ляпунова об устойчивости [12].

Легко показать, что при выполнении (4.2), (4.3) и $b < 0$ имеет место $a_2 > 0$, $a_4 > 0$. Действительно, для значений $A^3x_0^4 < C^3z_0^4$ запишем $\varphi(A, C, x_0, z_0) = (A^3x_0^4 - C^3z_0^4) - 4AC(A - C)x_0^2z_0^2$, и полученное выражение будет отрицательным как сумма двух отрицательных величин. Для значений $z_0^2 > \sqrt{A^3/C^3}x_0^2$ имеет место $F_4 > A\{B[A^2 + C^2 + (A - C)^2 + (A - C)\sqrt{AC}] + (A - C)^2\sqrt{AC}\}x_0^4 > 0$ как сумма всех положительных слагаемых. Можно отметить, условия (4.2) и (4.3) при $b < 0$ относятся к ситуации (3.2).

5. О необходимых условиях устойчивости для $b > 0$. Установленные ранее достаточные условия устойчивости перманентного вращения (2.4) получены на основе второго метода Ляпунова только для значений $b < 0$. Возможно достаточные условия устойчивости при $b > 0$ тоже существуют. Только их искать следует другим способом, в частности, используя известные теоремы Г.В. Каменкова [14, 15]. Предварительно следует проверить возможность существования необходимых условий устойчивости. Из неравенств (3.6), (3.7) составим:

$$\max\left[0; \frac{A(A - 2C)x_0^2 - C^2z_0^2}{Ax_0^2 + Cz_0^2}\right] < b < \frac{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}{Ax_0^2 + Cz_0^2}$$

$$A^3x_0^4 - 4AC(A - C)x_0^2z_0^2 - C^3z_0^4 > 0$$

относящиеся к необходимым условиям существования твердого тела. Легко показать, что тогда будет обеспечено выполнение $F_2 > 0$, что эквивалентно $a_2 > 0$. Далее при имеющихся здесь ограничениях $x_0^2 > \frac{C}{A^2}[2(A - C) + \sqrt{4A^2 - 7AC + 4C^2}]z_0^2$ установим знак коэффициента $a_{41} > \frac{C(Ax_0^2 + Cz_0^2)}{A}[3A^2 - 4AC + 2C^2 + (2A - C)\sqrt{4A^2 - 7AC + 4C^2}]z_0^4$. Как легко видеть, он получен положительным как сумма положительно определенной квадратичной формы рациональной части выражения и положительного иррационального слагаемого в квадратной скобке. Так как функция F_4 по переменной b возрастает и $a_{40} > 0$, то при положительных b и условиях (3.6), (3.7) многочлен F_4 всюду принимает положительные значения, соответственно, $a_4 > 0$.

Вместе с тем рассмотрим знак выражения F_4 при $\varphi(A, C, x_0, z_0) = 0$. Из последнего равенства выразим $x_0^2 = \dfrac{C}{A^2}[2(A-C) + \sqrt{4A^2 - 7AC + 4C^2}]z_0^2$ и подставим в F_4, которое примет вид

$$\begin{gathered}\frac{C^2}{A^2}\{B[(A-C)(17A^2 - 23AC + 10C^2) + 2C^3 + \\ + (A-C)(9A-4C)\sqrt{4A^2 - 7AC + 4C^2}] + \\ + (A-C)^2[(5A^2 - 11AC + 8C^2) + 2(A-2C)\sqrt{4A^2 - 7AC + 4C^2}]\}z_0^4\end{gathered} \tag{5.1}$$

Для рассматриваемых соотношений моментов инерции $A > C$ коэффициент при величине B положительный как сумма трех положительных слагаемых: положительно определенной квадратичной формы рациональной части, положительного слагаемого и положительной иррациональной части. Первое слагаемое в последней квадратной скобке представляет положительно определенную квадратичную форму рациональной части. Иррациональная часть содержит знакопеременное выражение при $A > C$. Можно проверить, что $(5A^2 - 11AC + 8C^2)^2 - 4(A-2C)^2(4A^2 - 7AC + 4C^2) = 9A^2(A-C)^2 > 0$. Тогда выражение во второй квадратной скобке (5.1) принимает знак рациональной части, т.е. положительно.

Таким образом, в этом случае имеем $F_4 > 0$, откуда следует $a_4 > 0$.

Следовательно, при $b > 0$ возможны только случаи (3.2) и (3.5) необходимых условий устойчивости.

Обращение в нуль выражения (5.1) возможно только при $z_0 = 0$, из чего непосредственно следует $x_0 = 0$, что не допустимо для стационарного движения (2.4).

Установление достаточных условий устойчивости описанным в [14, 15] способом для символьных выражений оказалось невозможным ввиду недостатка имеющихся вычислительных ресурсов (оперативной памяти и быстродействия), и их исследование здесь не проведено. Осуществление в символьном виде линейного ортогонального, затем нелинейного нормализующего преобразований переменных, классификация элементарных делителей матрицы D_1 и последующий анализ подсистемы с критическими переменными представляется неразрешимой задачей, даже в настоящее время. В численном виде такая задача решается без затруднений.

6. Заключение. Составленные в статье достаточные условия устойчивости перманентного вращения (2.4) установлены только для отрицательных отклонений $\left(B - \dfrac{AC(x_0^2 + z_0^2)}{Ax_0^2 + Cz_0^2}\right)$. Эти условия относятся к случаю существования наименьшего числа нулевых корней характеристического уравнения для линейной правой части системы дифференциальных уравнений возмущенного движения (2.1), когда $a_2 > 0$, $a_4 > 0$. Ввиду $AC(A-C)x_0^2z_0^2 \neq 0$ достаточные условия устойчивости яляются только частью необходимых, не достигая границы области устойчивости, устанавливаемой необходимыми условиями.

Для положительных отклонений $\left(B - \dfrac{AC(x_0^2 + z_0^2)}{Ax_0^2 + Cz_0^2}\right)$, хотя и не удалось получить достаточные условия устойчивости (2.5), составлены только необходимые условия, возможные при $a_2 \geq 0$, $a_4 > 0$. Случаи существования необходимых условий устойчивости (3.3) и (3.4) здесь оказались не существующими.

Подробное изложение выкладок показало, что устойчивость перманентного вращения (2.4) существует как при положительных, так и отрицательных значениях x_0, z_0.

Следует отметить, что устойчивость перманентного вращения (2.4) при несуществовании частного интеграла Гесса системы (2.1) достигается на членах второго порядка.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-08-00746).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2. М.: ГИФМЛ, 1960. 487 с.
2. *Голубев В.В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М.: Регулярная и хаотическая динамика, 2002. 287 с.
3. *Routh E.J.* A treatise on the stability of a given state of motion, particulary steadly motion. L.: McMillan, 1877. 108 p.
4. *Routh E.J.* The advanced part of a treatiseon the dynamics of a system of rigid bodies. L.: McMillan, 1884. 343 p.
5. *Ляпунов А.М.* О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости // Собрание сочинений. Т. 1. М.: Изд -во АН СССР, 1954. С. 276–319.
6. *Кузьмин П.А.* Стационарные движения твердого тела и их устойчивость в центральном поле тяготения // Труды межвузовской конференции по прикладной теории устойчивости движений и аналитической механике. Казань, 1964. С. 93–98.
7. *Иртегов В.Д.* Стационарные движения уравновешенного твердого тела и их устойчивость в центральном поле сил тяготения // Труды казанского авиационного института. Казань, 1964. Вып. 83. С. 3–15.
8. *Карапетян А.В., Румянцев В.В.* Устойчивость консервативных и дисспативных систем // Итоги науки и техники. Общая механика. Т. 6. М.: ВИНИТИ, 1983. С. 1–132.
9. *Карапетян А.В., Рубановский В.Н.* Об устойчивости консервативных и дисспативных механических систем // Прикладная математика и механика. 1986. Т. 50. Вып. 1. С. 43–49.
10. *Карапетян А.В., Рубановский В.Н.* О модификации теоремы Рауса об устойчивости стационарных движений систем с первыми интегралами // Сборник научно-методических статей по теоретической механике. М.: Высшая школа, 1986. Вып. 17. С. 91–99.
11. *Карапетян А.В.* Устойчивость стационарных движений. М.: Эдиториал, 1998. 165 с.
12. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения // Собрание сочинений. Т. 2. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1956. С. 7–263.
13. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
14. *Каменков Г.В.* Устойчивость движения, колебания, аэродинамика.Т. 1. М.: Наука, 1971. 255 с.
15. *Каменков Г.В.* Устойчивость и колебания нелинейных систем. Т. 2. М.: Наука, 1972. 213 с.
16. *Новиков М.А.* О стационарных движениях твердого тела при существовании частного интеграла Гесса // Известия РАН. Механика твердого тела. 2018. № 3. С. 28–37.
17. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 576 с.