

УДК 62-50

ЗАЩИТА ОБЪЕКТА НА ПОДВИЖНОМ ОСНОВАНИИ С ПОМОЩЬЮ УПРАВЛЕНИЯ С УПРЕЖДЕНИЕМ И ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПРИ ОГРАНИЧЕННЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

© 2021 г. В. А. Корнеев

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
e-mail: korneev@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 03.07.2020 г.
После доработки 13.09.2020 г.
Принята к публикации 24.10.2020 г.

Рассматривается задача построения гарантирующего управления для противоударного изолятора, защищающего объект на подвижном основании от ударов, которым подвержено основание. Ударное воздействие на основание заранее неизвестно, задается его ускорением, ограниченной знакопостоянной функцией времени фиксированной длительности, интеграл от которой по времени задан. Управление действует между основанием и защищаемым объектом, ограничено по величине, а абсолютное ускорение основания может превышать эту величину только на одном интервале времени. Минимизируемым критерием качества служит максимальное смещение объекта относительно основания. Разработана методика определения среди возмущений указанного класса наихудших возмущений, доставляющих наибольшее значение критерию качества. Предложен эффективный закон управления с оптимизацией момента начала управления, основанный на комбинации двух методов управления, полученных ранее для прямоугольных возмущений и возмущений с неограниченной амплитудой.

Ключевые слова: противоударная изоляция, оптимальное управление, гарантирующее упреждающее управление, запаздывание, наихудшие возмущения

DOI: 10.31857/S0572329921030077

Введение. Работа посвящена построению способов управления противоударным изолятором при ограниченных наихудших возмущениях. Используется математическая модель системы с одной степенью свободы, которая состоит из основания и защищаемого объекта, находящегося на нем. Рассматривается внешнее воздействие кинематического типа, характеризуемое ускорением основания, описываемым функцией времени. Основание и защищаемый объект движутся вдоль одной прямой, а управляющая сила между основанием и объектом ограничена по величине и создается изолирующим устройством. Впервые задача о минимизации максимума модуля смещения объекта относительно основания при заданном возмущении ставилась в [1–3]. Дальнейшее развитие теории оптимальной противоударной изоляции получила в [4–7]. Изоляция объекта, расположенного на подвижном основании, от кратковременных ударных воздействий с помощью активного изолятора с управлением без упреждения изучалась в [8]. Численное решение этой задачи и построение ее аналитических решений для некоторых заданных возмущений с упреждающим управлением рассмотрены в [9]. В [10, 11] аналитически построено гарантирующее упреждающее управление с одним переключением и временем упреждения, позволяющее вычислять минимальную оценку максимальной величины смещения объекта относительно основания для

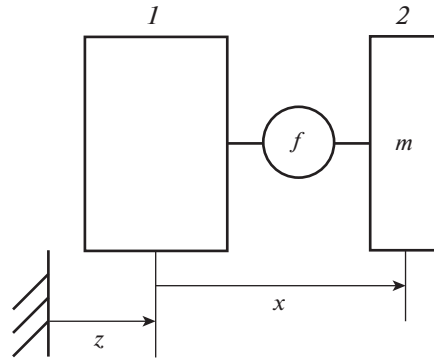


Рис. 1

класса возмущений заданной длительности с неограниченной амплитудой. Для этого же класса возмущений в [12, 13] показано, что, используя упреждение и запаздывание для двух простых управлений, предназначенных для конкретных возмущений, и оптимизируя функционал только по моменту начала управления, можно получить значение критерия качества, близкое к оптимальному. Современное описание проблемы противоударной изоляции, включающее в себя публикации по оптимальному управлению противоударными изоляторами, представлено в [14].

В данной работе для возмущений заданной длительности и ограниченной амплитуды доказано, что при заданном управлении наихудшими возмущениями являются непрерывные прямоугольные возмущения наибольшей амплитуды, начинающиеся либо в момент начала возмущения, либо заканчивающиеся в момент окончания допустимого интервала возмущения. Для рассматриваемого класса возмущений используются два управления, полученные в [9, 11] для прямоугольного возмущения и для возмущений заданной длительности с неограниченной амплитудой соответственно. При этом в формулу для управления из [9] подставляется ограничение на амплитуду данной задачи вместо значения амплитуды прямоугольного возмущения. Выбор момента начала действия для этого управления предполагает, что возможно упреждение и запаздывание. Момент начала действия управления выбирается с целью обеспечить минимально возможную величину смещения защищаемого объекта. Проводится сравнение полученных значений критерия качества для управлений из [9, 11] (относительного максимального смещения защищаемого объекта относительно основания). На основе этого сравнения предлагается комбинированное управление, сочетающее достоинства обоих управлений.

1. Механическая система. Пусть механическая система (рис. 1) состоит из основания 1 и объекта 2, соединенного с основанием с помощью противоударного изолятора – устройства, генерирующего управляющую силу f между основанием и объектом и созданного для защиты объекта при ударном воздействии на основание. Основание и объект движутся поступательно вдоль одной прямой. Обозначим: z – смещение основания относительно неподвижной (инерциальной) системы отсчета, x – смещение объекта относительно основания, m – масса объекта. Ударное воздействие на основание задается его ускорением \ddot{z} , функцией времени, некоторые свойства которой заранее известны.

Движение объекта относительно основания описывается уравнением

$$\ddot{x} + u = v(t), \quad u = -\frac{f}{m}, \quad v = -\ddot{z} \quad (1.1)$$

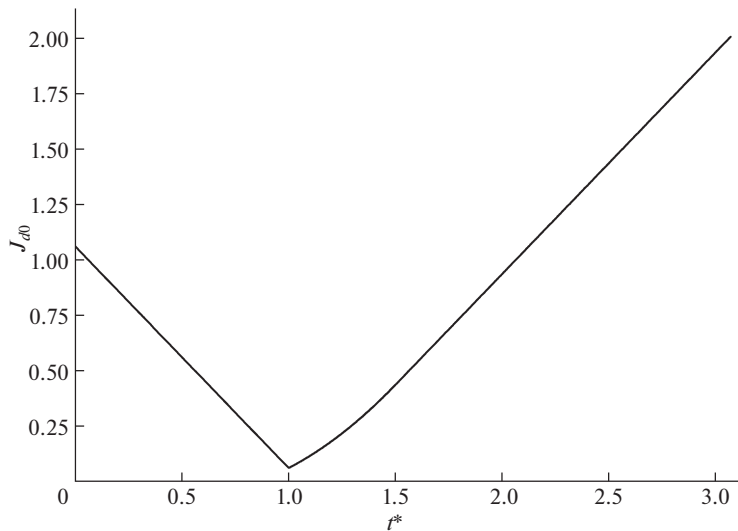


Рис. 2

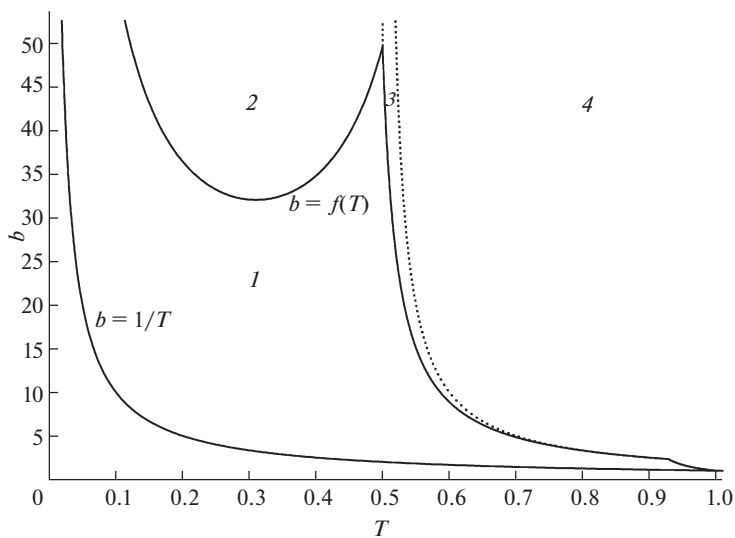


Рис. 3

Далее полагаем, что сила f удовлетворяет ограничению $|f| \leq F_0$, где F_0 – заданная величина, тогда величина u удовлетворяет неравенству

$$|u| \leq u_0, \quad u_0 = \frac{F_0}{m}$$

Предполагается, что в начальный момент времени $t = 0$ основание и объект покоятся в положениях, отвечающих нулевым значениям координат x и z :

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad z(0) = 0, \quad \dot{z}(0) = 0 \quad (1.2)$$

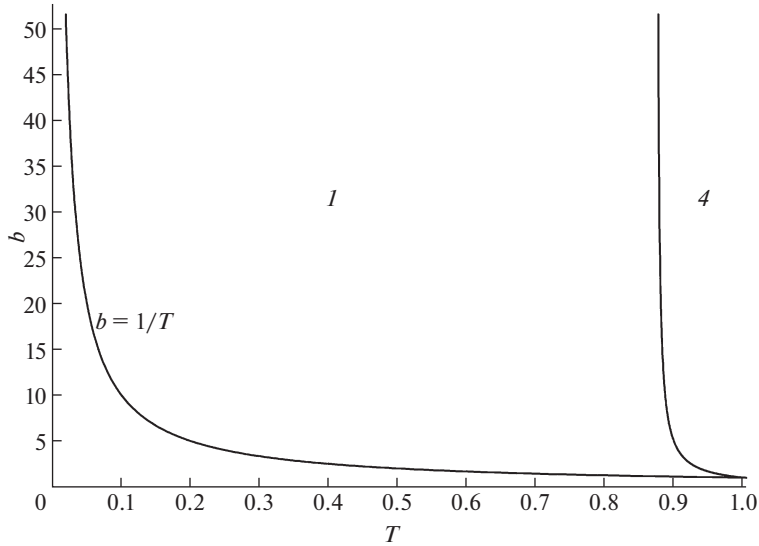


Рис. 4

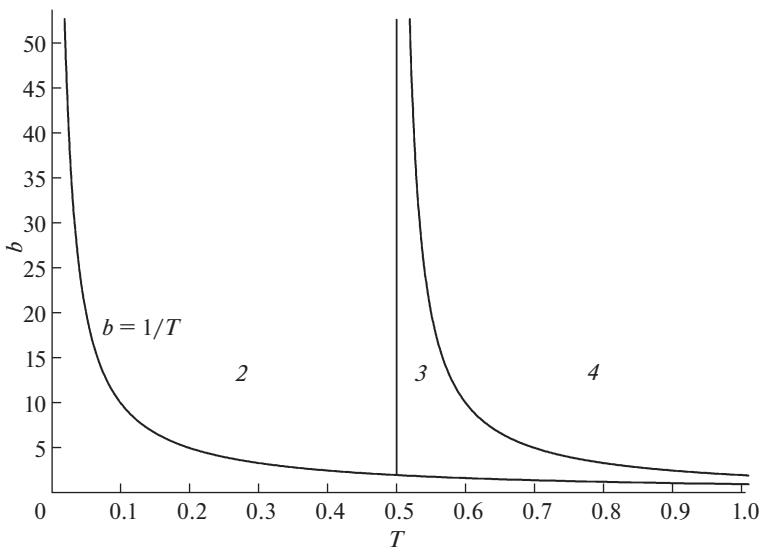


Рис. 5

В качестве допустимых управлений будем рассматривать кусочно-непрерывные функции $u(t)$, удовлетворяющие ограничению

$$|u(t)| \leq u_0, \quad t \in [0, \infty) \tag{1.3}$$

2. Внешние возмущения. Предполагается, что возмущение $v(t)$ имеет вид

$$v(t) = V(t - t_0), \quad t_0 \geq 0 \tag{2.1}$$

где кусочно-непрерывная функция $V(\xi)$ определена для всех вещественных ξ , причем $V(\xi) \equiv 0$ для $\xi < 0$, а $t_0 \geq 0$ – некоторый момент времени, который может быть задан

заранее или подлежать определению. Возмущение V начинает действовать на основание спустя время t_0 после включения системы противоударной изоляции (упреждающее управление).

Будем предполагать, что 1) возмущение $V(\xi)$ действует только в одном направлении и не меняет знака ($V(\xi) \geq 0$), 2) $V(\xi)$ имеет конечную длительность T ($V(\xi) \equiv 0$, если $\xi > T$), 3) $V(\xi)$ имеет ограничение на максимальную величину воздействия, обозначаемое параметром b ,

$$V(\xi) \leq b \quad \text{для} \quad 0 \leq \xi \leq T \quad (2.2)$$

и 4) только на одном интервале, $t_1 < \xi < t_2$, величина абсолютного ускорения $V(\xi)$ основания превышает верхнюю границу u_0 абсолютного ускорения защищаемого объекта:

$$\begin{aligned} V(\xi) < u_0 & \quad \text{для} \quad 0 \leq \xi < t_1 \quad \text{и} \quad t_2 < \xi \leq T \\ V(\xi) > u_0 & \quad \text{для} \quad t_1 < \xi < t_2 \end{aligned}$$

Один или оба из интервалов $0 \leq \xi < t_1$ и $t_2 < \xi \leq T$ могут быть пустыми, если $V(0) > u_0$ или $V(T) > u_0$. В случае, когда $V(\xi)$, $0 \leq \xi \leq T$, предполагается известной функцией в каждый момент ξ и удовлетворяющей неравенству $V(\xi) \leq u_0$, оптимальное управление определяется тождеством $u(t) \equiv V(t - t_0)$ и обеспечивает тождественно равное нулю смещение объекта по отношению к основанию. Далее предполагаем выполнение неравенства

$$b > u_0 \quad (2.3)$$

Основными характеристиками ударного воздействия являются его длительность T , максимально возможная величина воздействия b и параметр v_0

$$v_0 = \int_0^T V(\xi) d\xi \quad (2.4)$$

характеризующий значение скорости, приобретенной (или потерянной) основанием в результате удара. В [10, 11] рассматривался класс возмущений без ограничений на максимальную величину воздействия $V(\xi)$, а параметры T , v_0 предполагались известными и заданными. Такой класс возмущений обозначим V_T . Класс возмущений с заданной величиной v_0 из (2.4) без ограничений на максимальную величину воздействия $V(t)$ и на максимальную длительность T обозначим V_∞ . Этим классам воздействий соответствует значение $b = +\infty$. Введем также классы возмущений V_b и V_{bT} с заданными параметрами b , v_0 и T , b , v_0 соответственно. Необходимым условием существования возмущений из класса V_{bT} служит условие $bT \geq v_0$, поскольку ненулевые значения $V(\xi)$ должны располагаться в прямоугольнике с основанием T и высотой b . Поскольку случай $bT = v_0$ соответствует прямоугольным возмущениям и разобран в [9], будем полагать выполненным неравенство

$$bT > v_0 \quad (2.5)$$

Очевидно, что $V_{bT} \subset V_T \subset V_\infty$, $V_{bT} \subset V_b \subset V_\infty$.

3. Критерий качества. Будем считать, что возмущение $V(\xi)$ неизвестно, но известно множество $\Omega \subset V_\infty$, которому могут принадлежать возможные возмущения. Качество изоляции при заданных управлении $u(t)$ и времени упреждения t_0 будем оценивать

функционалом J , характеризующим максимальную величину смещения объекта относительно основания при наихудшем возмущении:

$$J(u, t_0) = \max_{V \in \Omega} \max_{t \in R_{0+}} |x(t; u, V, t_0)|, \quad R_{0+} = [0, +\infty) \quad (3.1)$$

где $x(t; u, V, t_0)$ – решение уравнения (1.1) с начальными условиями (1.2) для заданных $u(t)$, $V(\xi)$ и t_0 . Величину J желательно минимизировать выбором оптимального закона управления и времени упреждения. Для случаев когда $\Omega = V_b$, $\Omega = V_{bT}$, $\Omega = V_T$, $\Omega = V_\infty$ для значения функционала из (3.1) введем соответствующие обозначения $J_b(u, t_0)$, $J_{bT}(u, t_0)$, $J_T(u, t_0)$, $J_\infty(u, t_0)$, т.е.

$$J_b(u, t_0) = \max_{V \in V_b} \max_{t \in R_{0+}} |x(t; u, V, t_0)| \quad (3.2)$$

$$J_{bT}(u, t_0) = \max_{V \in V_{bT}} \max_{t \in R_{0+}} |x(t; u, V, t_0)| \quad (3.3)$$

$$J_T(u, t_0) = \max_{V \in V_T} \max_{t \in R_{0+}} |x(t; u, V, t_0)| \quad (3.4)$$

$$J_\infty(u, t_0) = \max_{V \in V_\infty} \max_{t \in R_{0+}} |x(t; u, V, t_0)| \quad (3.5)$$

4. Задачи оптимизации. Поскольку условия информированности управляющей стороны о внешнем возмущении и множества допустимых законов управления U могут быть различными, то и задачи оптимального управления формулируются по-разному.

Задача 1. Для системы (1.1) с начальными условиями (1.2) найти кусочно-непрерывное управление u^* , удовлетворяющее ограничению (1.3), и время упреждения t_0^* , которые минимизируют величину (3.1):

$$J(u^*, t_0^*) = \min_{u \in U, t_0} J(u, t_0)$$

где U – множество законов управления $u(t)$, среди которых ищется оптимум.

Это задача о гарантирующем оптимальном упреждающем управлении противоударным изолятором, защищающим объект от ударных воздействий из множества Ω . Она обобщает задачу, рассмотренную в [1–3] для заданного возмущения в отсутствие упреждения управления.

Задача 2. Для системы (1.1) при начальных условиях (1.2) и заданном возмущении (2.1) найти кусочно-непрерывное управление u^* , удовлетворяющее ограничению (1.3), и время упреждения t_0^* , которые минимизируют максимальную величину смещения объекта относительно основания (функционал J):

$$J(u^*, V, t_0^*) = \min_{u, t_0} \max_{t \in [0, \infty)} |x(t; u, V, t_0)|$$

Задачу 2 можно трактовать как задачу 1, в которой множество допустимых возмущений Ω состоит из одного элемента.

Множество допустимых законов управления может представлять собой параметрическое семейство управлений $u_s(t) \in U_S$, зависящих от параметра s , $s \in S$.

Задача 3. Для заданного класса допустимых управлений $u_s(t) \in U_S$ найти время упреждения t_0^* и значение параметра s^* , минимизирующие величину (3.1):

$$J(u_s^*, t_0^*) = \min_{t_0, s} J(u_s, t_0), \quad u_s^* = u_s|_{s=s^*}$$

Решение задачи 3 дает возможность улучшать качество противоударной защиты путем изменения времени упреждения и параметра при заданном семействе законов управления $u_s(t)$, которое, например, может быть построено на основе оптимального управ-

ления для некоторого возмущения $V \in \Omega$ и представлено аналитическими выражениями. Заметим, что когда множество S состоит из одного элемента задача 3 решается для фиксированного управления, а при заданном управлении $u(t)$ с условием $u(t) \equiv 0$, $t < 0$ в параметрическом семействе управлений $u_c(t) = u(t - c)$, $c \geq 0$ параметр c может играть роль запаздывания для управления $u_c(t)$.

В [10, 11] получено решение $\{u_\tau^*, t_\tau^*\}$ задачи 3 в классе возмущений V_T для управлений из класса $U_\Sigma = \{u_\tau\}$ – параметрического семейства допустимых релейных управлений $u_\tau(t)$ с переключением с $-u_0$ на u_0 в момент времени τ и с u_0 на 0 в момент времени $v_0/u_0 + 2\tau$, где

$$u_\tau(t) = \begin{cases} -u_0, & 0 \leq t < \tau \\ +u_0, & \tau \leq t \leq T_\tau \\ 0, & t > T_\tau \end{cases} \quad (4.1)$$

$$T_\tau = \frac{v_0}{u_0} + 2\tau, \quad \tau \in \Sigma, \quad \Sigma = [0, +\infty)$$

Соотношение временных отрезков со значениями $\pm u_0$ выбрано таким образом, чтобы обеспечить выполнение соотношения

$$\dot{x}(t; u_\tau, V, t_0) \equiv 0, \quad t \geq \max(t_0 + T, T_\tau)$$

для того чтобы движение объекта относительно основания прекращалось за конечное время и в дальнейшем не возобновлялось при любых возмущениях класса V_T и временах упреждения t_0 . Решение $\{u_\tau^*, t_\tau^*\}$ будем использовать для вычисления величины $J_{bT}(u_\tau^*, t_\tau^*)$, используемой для сравнения с величиной $J_{bT}(u_{bc}^*, t_c^*)$, полученной из решения задачи 3 при $u_{bc}^*(t) = u_b(t - c^*)$, $c^* \geq 0$, где $u_b(t)$ – управление, полученное из решения задачи 2 для прямоугольного возмущения с амплитудой b , а c^* – оптимальное значение параметра c .

5. Определение наихудшего возмущения. Вычисление функционала (3.1) предполагает определение наихудшего возмущения $V \in \Omega \subset V_T$, которое максимизирует максимум модуля отклонения защищаемого объекта относительно основания ($\max_t |x(t; u, V, t_0)|$) при заданных $u(t)$ и t_0 .

Лемма 1 (см. [9]). Среди возмущений $V \in V_T$ наихудшее возмущение есть либо $V_\delta(\xi) = v_0\delta(\xi)$ либо $V_{\delta T}(\xi) = v_0\delta(\xi - T)$. Иными словами, наихудшее возмущение есть мгновенный удар интенсивности v_0 , подаваемый в начальный или в конечный момент допустимого интервала возмущения.

Согласно лемме 1 для нахождения наихудшего возмущения в классе V_T при заданных $u(t)$ и t_0 надо решить дифференциальное уравнение (1.1) с начальными условиями (1.2) при $v(t) = v_0\delta(t - t_0)$ и $v(t) = v_0\delta(t - t_0 - T)$, для каждого из решений вычислить $\max_t |x(t; u, V_\delta, t_0)|$, $\max_t |x(t; u, V_{\delta T}, t_0)|$ и выбрать возмущение, отвечающее большему значению абсолютного отклонения.

Лемма 2. Среди возмущений $V \in V_{bT}$ наихудшее возмущение есть либо

$$V_0(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < 0 \\ b, & 0 \leq \xi \leq v_0/b \leq T \\ 0, & v_0/b < \xi \end{cases}$$

либо

$$V_1(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < T - v_0/b \\ b, & T - v_0/b \leq \xi \leq T \\ 0, & T < \xi \end{cases}$$

Иными словами, при заданном управлении наихудшими возмущениями являются прямоугольные возмущения наибольшей амплитуды, начинающиеся либо в момент начала возмущения, либо заканчивающиеся в момент окончания допустимого интервала возмущения.

Примечание. Справедливо равенство $V_1(\xi) = V_0(\xi - T + v_0/b)$.

Согласно лемме 2 для нахождения наихудшего возмущения в классе V_{bT} при заданных $u(t)$ и t_0 надо решить дифференциальное уравнение (1.1) с начальными условиями (1.2) при $v(t) = V_0(t - t_0)$ и $v(t) = V_1(t - t_0)$, для каждого из $\max_t |x(t; u, V_0, t_0)|$, $\max_t |x(t; u, V_1, t_0)|$, сравнить получившиеся величины и выбрать возмущение, отвечающее большему значению.

Доказательство. Введем вспомогательные функции $f_+(t)$ и $f_-(t)$, определенные на полуоси $0 \leq t < +\infty$:

$$f_+(t) = \int_0^t (t - \xi) V_0(\xi - t_0) d\xi = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < t_0 \\ \frac{b(t - t_0)^2}{2}, & t_0 \leq t < t_0 + \frac{v_0}{b} \\ v_0 \left(t - t_0 - \frac{v_0}{2b} \right), & t_0 + \frac{v_0}{b} \leq t \end{cases} \quad (5.1)$$

$$f_-(t) = \int_0^t (t - \xi) V_1(\xi - t_0) d\xi = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < t_0 + T - \frac{v_0}{b} \\ \frac{\left(t - t_0 - T + \frac{v_0}{b} \right)^2}{2} b, & t_0 + T - \frac{v_0}{b} \leq t < t_0 + T \\ v_0 \left(t - t_0 - T + \frac{v_0}{2b} \right), & t \geq t_0 + T \end{cases} \quad (5.2)$$

Здесь t_0 – время начала действия возмущения, а T – его длительность.

Для возмущения $v(t) = V(t - t_0)$ длительности T , удовлетворяющего соотношению

$$\int_{t_0}^{t_0+T} v(t) dt = v_0$$

справедливы неравенства

$$f_-(t) \leq \int_{t_0}^t (t - \xi) v(\xi) d\xi \leq f_+(t) \quad (5.3)$$

Докажем правое неравенство в (5.3) для случая $t_0 = 0$. Рассмотрим некоторую функцию $V(\cdot) \in V_b$, такую что для нее существуют неотрицательные величины t_1, t_2, h и функция $\Delta V(t)$, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} 0 &\leq t_1 \leq t_1 + h \leq t_2 \leq t_2 + h \leq T \\ 0 &\leq \Delta V(t) \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq h \\ \Delta V(t) &\equiv 0 \quad \text{при} \quad t \notin [0, h] \\ 0 &\leq V(t) + \Delta V(t - t_1) \leq b \quad \text{при} \quad t \in [t_1, t_1 + h] \\ 0 &\leq \Delta V(t - t_2) \leq V(t) \quad \text{при} \quad t \in [t_2, t_2 + h] \end{aligned} \quad (5.4)$$

Введем функцию $V_\Delta(t)$, $t \in R_{0+}$ соотношениями

$$\begin{aligned} V_\Delta(t) &\equiv V(t) \quad \text{при} \quad t \notin (t_1, t_1 + h) \cup (t_2, t_2 + h) \\ V_\Delta(t) &= V(t) + \Delta V(t - t_1) \quad \text{при} \quad t \in [t_1, t_1 + h] \\ V_\Delta(t) &= V(t) - \Delta V(t - t_2) \quad \text{при} \quad t \in [t_2, t_2 + h] \end{aligned} \quad (5.5)$$

Значения функции $\Delta V(t)$ по сравнению с $V(t)$ на отрезке $[t_1, t_1 + h]$ увеличены на такие же значения, на которые уменьшены ее значения на отрезке $[t_2, t_2 + h]$. Согласно соотношениям (5.4), (5.5) имеет место включение $V_\Delta(\cdot) \in V_b$ и выполнены равенства

$$\int_0^T V(t) dt = \int_0^T V_\Delta(t) dt = v_0 \quad (5.6)$$

Введем следующие функции

$$I(t) = \int_0^t (t - \xi)V(\xi) d\xi, \quad I_\Delta(t) = \int_0^t (t - \xi)V_\Delta(\xi) d\xi, \quad t \in R_{0+} \quad (5.7)$$

Тогда

$$I_\Delta(t) = \begin{cases} I(t), & 0 \leq t < t_1, \\ I(t) + \int_{t_1}^t (t - \xi)\Delta V(\xi - t_1) d\xi, & t_1 \leq t < t_1 + h \\ I(t) + \int_{t_1}^{t_1+h} (t - \xi)\Delta V(\xi - t_1) d\xi, & t_1 + h \leq t < t_2 \\ I(t) + \int_0^h (t - t_1 - y)\Delta V(y) dy - \int_{t_2}^t (t - \xi)\Delta V(\xi - t_2) d\xi, & t_2 \leq t < t_2 + h \\ I(t) + (t_2 - t_1) \int_0^h \Delta V(y) dy, & t_2 + h \leq t \end{cases} \quad (5.8)$$

Покажем, что

$$I_\Delta(t) \geq I(t) \quad (5.9)$$

Согласно (5.8) неравенство (5.9) выполняется для всех $t \in [0, +\infty) \setminus [t_2, t_2 + h]$, так как к $I(t)$ добавляется неотрицательная величина.

Поскольку при $t_1 \leq t_2 \leq t < t_2 + h$

$$0 \leq \int_0^{t-t_2} (t-t_2-y)\Delta V(y)dy \leq \int_0^h (t-t_2-y)\Delta V(y)dy \leq \int_0^h (t-t_1-y)\Delta V(y)dy$$

то добавляемая величина к $I(t)$ в (5.8) также неотрицательна

$$\begin{aligned} & \int_0^h (t-t_1-y)\Delta V(y)dy - \int_{t_2}^t (t-\xi)\Delta V(\xi-t_2)d\xi = \\ & = \int_0^h (t-t_1-y)\Delta V(y)dy - \int_0^{t-t_2} (t-t_2-y)\Delta V(y)dy \geq 0 \end{aligned}$$

Неравенство (5.9) доказано. Нетрудно убедиться, что при кусочно-непрерывной $V(t)$, удовлетворяющей условиям (5.4) и такой что $V(t) \neq 0$, $\Delta V(t) \neq 0$, $t \in R_{0+}$ выполнено строгое неравенство $I_\Delta(t) > I(t)$ при $t \geq t_1 + h$. Таким образом, возможность построения функции приводит к увеличению функции $I(t)$, $t \in R_{0+}$. Невозможность построения $V_\Delta(t)$ для функции $V_0(t)$, $t \in R_{0+}$ доказывает невозможность увеличения функции $I(t)$, $t \in R_{0+}$ и справедливость правого неравенства (5.3) для $t_0 = 0$. Аналогично доказывается справедливость левого неравенства (5.3) для $t_0 = 0$, а также справедливость неравенств (5.3) для $t_0 > 0$.

Справедливость правого неравенства (5.3) для $t_0 = 0$ также легко доказывается следующим способом. Из соотношений

$$I_0(t) = \int_0^t (t-\xi)V_0(\xi)d\xi, \quad 0 \leq V_0(\xi) \leq b, \quad \int_0^T V_0(\xi)d\xi = v_0, \quad \dot{I}_0 = \int_0^t V_0(\xi)d\xi$$

следует что

$$\dot{I}_0(t) \leq \psi(t), \quad I_0(t) \leq \int_0^t \psi(\xi)d\xi, \quad \psi(t) = \min\{bt, v_0\}, \quad \int_0^t \psi(\xi)d\xi = f_+(t)|_{t_0=0}$$

Запишем решение уравнения (1.1) с нулевыми начальными условиями в следующем виде:

$$x_u(t) = \int_0^t (t-\xi)v(\xi)d\xi - \int_0^t (t-\xi)u(\xi)d\xi$$

Применив к этому выражению неравенство (5.3), получим

$$\begin{aligned} x_u^-(t) & \leq x_u(t) \leq x_u^+(t) \\ x_u^-(t) & = f_-(t) - \int_0^t (t-\xi)u(\xi)d\xi \\ x_u^+(t) & = f_+(t) - \int_0^t (t-\xi)u(\xi)d\xi \end{aligned} \tag{5.10}$$

Из этих неравенств и выражений (5.1), (5.2) для функций $f_+(t)$ и $f_-(t)$ вытекает, что при фиксированном $u = u(t)$ в любой момент времени t величина $x_u(t)$ принимает минимальное и максимальное значения при возмущениях $v_-(t) = V_1(t-t_0)$ и $v_+(t) = V_0(t-t_0)$ соответственно. Лемма 2 доказана.

Из (5.10) следует, что максимальное значение, которое может принимать критерий качества J при заданном управлении u и различных возмущениях, определяется выражением

$$J_u^+ = \max \left\{ \max_{t \in \mathbb{R}_{0+}} |x_u^-(t)|, \max_{t \in \mathbb{R}_{0+}} |x_u^+(t)| \right\} \quad (5.11)$$

Безразмерные переменные. Введем безразмерные переменные

$$\begin{aligned} x' &= \frac{u_0}{v_0^2} x, & t' &= \frac{u_0}{v_0} t, & t'_0 &= \frac{u_0}{v_0} t_0, & T' &= \frac{u_0}{v_0} T, & \xi' &= \frac{u_0}{v_0} \xi \\ v'(t') &= \frac{1}{v_0} v \left(\frac{v_0}{u_0} t' \right), & u' &= \frac{u}{u_0}, & b' &= \frac{b}{u_0}, & J' &= \frac{u_0}{v_0^2} J \end{aligned}$$

Далее будем использовать безразмерные переменные, опуская штрихи. В безразмерных единицах имеем $u_0 = 1$ и $v_0 = 1$, а неравенства (2.3), (2.5) приобретают соответственно вид

$$b > 1 \quad (5.12)$$

$$bT > 1 \quad (5.13)$$

6. Решение задачи 3 для класса ограниченных возмущений при использовании управления для прямоугольного возмущения с дополнительным запаздыванием. Рассмотрим теперь возмущение в виде прямоугольного импульса, задаваемого кусочно-постоянной функцией $V(t)$

$$V = V(t) = \begin{cases} b, & 0 \leq t \leq \frac{v_0}{b} \\ 0, & t > \frac{v_0}{b} \end{cases} \quad (6.1)$$

в размерных переменных или

$$V = V(t) = \begin{cases} b, & 0 \leq t \leq \frac{1}{b} \\ 0, & t > \frac{1}{b} \end{cases} \quad (6.2)$$

в безразмерных переменных. Для этого возмущения задача 2 решена в [9] с помощью графо-аналитического метода [1, 2]. Оптимальное управление $u(t)$, оптимальное время упреждения t_0 и оптимальное значение критерия качества J определяются соотношениями

$$u_b(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leq t \leq t_1^r = \frac{1}{4} \sqrt{1 - b^{-1}}, & b > 1 \\ 1, & t_1^r < t \leq t_2^r = \frac{1}{2} \sqrt{1 - b^{-1}} + 1, & b > 1 \\ 0, & t > t_2^r, & b > 1 \\ V(t), & t \in [0, +\infty), & b \leq 1 \end{cases} \quad (6.3)$$

$$t_0^b = \begin{cases} \frac{1}{2} [(1 - b^{-1}) + \sqrt{1 - b^{-1}}], & b > 1 \\ 0, & b \leq 1 \end{cases} \quad (6.4)$$

$$J_r = \begin{cases} \frac{1}{16}(1 - b^{-1}), & b > 1 \\ 0, & b \leq 1 \end{cases} \quad (6.5)$$

Индекс b указывает, что данные соотношения выражены через значение амплитуды возмущения b . Управление (6.3) будем называть b -управлением. Поскольку формулы (6.3)–(6.5) были получены в предположении выполнения равенства

$$bT = 1 \quad (6.6)$$

их можно переписать в следующем виде

$$u_T(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leq t \leq t_1^r = \frac{1}{4}\sqrt{1-T}, & T < 1 \\ 1, & t_1^r < t \leq t_2^r = \frac{1}{2}\sqrt{1-T} + 1, & T < 1 \\ 0, & t > t_2^r, & T < 1 \\ V(t), & t \in [0, +\infty), & T \geq 1 \end{cases} \quad (6.7)$$

$$t_0^T = \begin{cases} \frac{1}{2}[1 - T + \sqrt{1-T}], & T < 1 \\ 0, & T \geq 1 \end{cases} \quad (6.8)$$

$$J_r = \begin{cases} \frac{1}{16}(1 - T), & b > 1 \\ 0, & b \leq 1 \end{cases} \quad (6.9)$$

Индекс T указывает, что данные соотношения выражены через значение длительности T . Управление (6.7) будем называть T -управлением. Такое введение различий для управлений u_b , u_T и их упреждающих моментов обусловлено тем, что дальнейшее использование этих управлений для задач гарантированного оценивания (например, в задаче 3), в которых выполнены неравенства $bT > 1$, $b > 1$, приводит к различным результатам. В данной работе изучается эффективность управления u_b с запаздыванием для задачи гарантированного оценивания с построением оптимального момента начала управляющего воздействия.

Введем класс управлений $U_{bC} = \{u_{bc}\}$, описываемый параметрическим семейством допустимых управлений $u_{bc}(t)$, где

$$u_{bc}(t) = \begin{cases} 0, & t < c \\ -1, & c \leq t \leq c + t_1^r = c + \frac{1}{4}\sqrt{1-b^{-1}} \\ 1, & c + t_1^r < t \leq c + t_2^r = c + \frac{1}{2}\sqrt{1-b^{-1}} + 1 \\ 0, & t > c + t_2^r \end{cases} \quad (6.10)$$

$c \in C, \quad C = [0, +\infty)$

Равенство $u_{bc}(t) = u_b(t - c)$ означает, что управление $u_{bc}(t)$ представляет собой b -управление с запаздыванием c .

Введем функцию $J_{bc}(t^*)$, определяемую как значение функционала J , отвечающее управлению $u_{bc}(t)$ и возмущению $v(t) = V_0(t - t^*)$, т.е. прямоугольному возмущению с

амплитудой b с началом действия в момент времени t^* . Эта функция задается выражением

$$J_{bc}(t^*) = \begin{cases} 9t_1^2 + 2t_1 - t^* + c & \text{при } 0 \leq t^* < 8t_1^2 + 2t_1 + c \\ \frac{2t_1^2 + 2t_1^2b + b(t^* - c)^2 - 4t_1(t^* - c)b}{2(b-1)} & \text{при } 8t_1^2 + 2t_1 + c \leq t^* < t_2 - b^{-1} + c \\ t^* - c - 9t_1^2 - 2t_1 & \text{при } t^* \geq t_2 - b^{-1} + c \end{cases} \quad (6.11)$$

Функция $J_{bc}(t^*)$ линейно убывает при $t^* \in [0, 8t_1^2 + 2t_1 + c]$ от значения $9t_1^2 + 2t_1 + c$ до значения

$$J_{bc}(8t_1^2 + 2t_1 + c) = t_1^2 = \frac{b-1}{16b} \quad (6.12)$$

затем при $t^* \in [8t_1^2 + 2t_1 + c, +\infty)$ монотонно возрастает от значения (6.12) до бесконечности. При этом функция $J_{bc}(t^*)$ на отрезке $[8t_1^2 + 2t_1 + c, t_2 - b^{-1} + c]$ растет квадратично до значения

$$J_{bc}(t_2 - b^{-1} + c) = 7t_1^2 = \frac{7(b-1)}{16b} \quad (6.13)$$

а затем линейно до бесконечности. Найдем значения $t^* = t_p$, $T = T_p$, соответствующие значению J_{bc} из (6.13):

$$t_p = 2t_1^2 + 2t_1 + c, \quad T_p = 1 - 2t_1^2 = \frac{1}{8}(7 + b^{-1}), \quad c < t_p < c + \frac{5}{8}$$

Функция $J_{bc}(t^*)$ из (6.11) позволяет оценить влияние ошибки в определении момента удара при расчете упреждающего оптимального управления на величину критерия качества противоударной изоляции. Формула (6.11) является обобщением формулы для величины $J_{b0}(t^*)$, определяемой как максимум модуля отклонения объекта относительно основания для возмущения $v(t) = V_0(t - t^*)$ при управлении $u_b(t)$

$$J_{b0}(t^*) = \begin{cases} 9t_1^2 + 2t_1 - t^*, & 0 \leq t^* < 8t_1^2 + 2t_1 \\ \frac{2t_1^2 + 2t_1^2b + bt^{*2} - 4t_1t^*b}{2(b-1)}, & 8t_1^2 + 2t_1 \leq t^* < t_2 - b^{-1} \\ t^* - 9t_1^2 - 2t_1, & t^* \geq t_2 - b^{-1} \end{cases} \quad (6.14)$$

Равенство $J_{bc}(t^*) = J_{b0}(t^* - c)$ при $t^* \geq c$ означает, что график функции $J_{bc}(t^*)$ получается смещением графика на величину c вдоль оси абсцисс с доопределением на интервале $[0, c)$ согласно формуле (6.11). При $b \rightarrow +\infty$ функция $J_{b0}(t^*) \rightarrow J_{d0}(t^*)$, где функция $J_{d0}(t^*)$ предназначена для дельта возмущения и имеет тот же смысл, что и функция $J_{b0}(t^*)$ для ограниченного возмущения. Функция $J_{d0}(t^*)$ задается формулой

$$J_{d0}(t^*) = \begin{cases} 17/16 - t^*, & 0 \leq t^* < 1 \\ (t^{*2} - t^*)/2 + 1/16, & 1 \leq t^* < 3/2 \\ t^* - 17/16, & t^* \geq 3/2 \end{cases} \quad (6.15)$$

и приведена на рис. 2. Функция $J_{b_0}(t^*)$ имеет аналогичный вид. Для решения задачи 3 надо, с учетом леммы 2 о наилучшем возмущении, для заданного T найти минимум по переменным t_0 , c величины

$$f_c(t_0, T) = \max[J_{bc}(t_0), J_{bc}(t_0 + T - b^{-1})], \quad t_0 \geq 0 \quad (6.16)$$

Минимум величины из (6.16) достигается при выполнении условий

$$c \geq \max[0, T/2 - 9t_1^2 - 2t_1], \quad J_{bc}(t_0) = J_{bc}(t_0 + T - b^{-1}), \quad t_0 \geq 0 \quad (6.17)$$

которые приводят к решению задачи 3 для классов возмущений V_{bT} и управлений U_{bc} :

$$t_c = \begin{cases} c - 1 - T + \frac{\sqrt{1-b^{-1}}}{2} + \frac{2}{b} + \frac{\sqrt{9b^2 + 8b^2T - 26b - 8Tb + 17}}{2b}, & \frac{1}{b} < T \leq \frac{7}{8} + \frac{1}{8b} \\ c + \frac{9}{16} - \frac{1}{16b} + \frac{\sqrt{1-b^{-1}}}{2} - \frac{T}{2}, & \frac{7}{8} + \frac{1}{8b} < T \end{cases} \quad (6.18)$$

$$c \geq \max \left[0, \frac{T}{2} - \frac{9}{16} + \frac{1}{16b} - \frac{\sqrt{1-b^{-1}}}{2} \right]$$

$$J_{bT}(u_c, t_c) = \begin{cases} \frac{25}{16} - \frac{41}{16b} + T - \frac{\sqrt{9b^2 + 8b^2T - 26b - 8Tb + 17}}{2b}, & \frac{1}{b} < T \leq \frac{7}{8} + \frac{1}{8b} \\ \frac{T}{2} - \frac{1}{2b}, & \frac{7}{8} + \frac{1}{8b} < T \end{cases} \quad (6.19)$$

Оптимальное управление в классах управлений $U_{bc} = \{u_{bc}\}$ и возмущений V_{bT} для задачи 3 определяется формулой (6.10) со значением параметра c , удовлетворяющим неравенству из (6.18). Заметим, что значение функционала $J_{bT}(u_c, t_c)$ из (6.19) обеспечивается не единственным образом. Оптимальные минимально возможные момент упреждения t_c^* и величина запаздывания c^* определяются соотношениями

$$t_c^* = \begin{cases} \frac{\sqrt{9b^2 + 8b^2T - 26b - 8Tb + 17}}{2b} + \frac{2}{b} + \frac{\sqrt{1-b^{-1}}}{2} - 1 - T, & \frac{1}{b} < T \leq \frac{7}{8} + \frac{1}{8b} \\ \frac{9}{16} - \frac{1}{16b} + \frac{\sqrt{1-b^{-1}}}{2} - \frac{T}{2}, & \frac{7}{8} + \frac{1}{8b} \leq T < \frac{9}{8} - \frac{1}{8b} + \sqrt{1-b^{-1}} \\ 0, & T \geq \frac{9}{8} - \frac{1}{8b} + \sqrt{1-b^{-1}} \end{cases}$$

$$c^* = \begin{cases} 0, & \frac{1}{b} < T \leq \frac{9}{8} - \frac{1}{8b} + \sqrt{1-b^{-1}} \\ \frac{T}{2} - \frac{9}{16} + \frac{1}{16b} - \frac{\sqrt{1-b^{-1}}}{2}, & \frac{9}{8} - \frac{1}{8b} + \sqrt{1-b^{-1}} < T \end{cases}$$

При минимально возможных моменте упреждения t_c^* и величине запаздывания c^* оптимальное управление определяется формулой $u_{bc}^*(t) = u_b(t - c^*)$ и справедливо равенство $\min\{t_c^*, c^*\} = 0$, т.е. имеет место либо упреждение, либо запаздывание. При не минимально выбранных моменте упреждения t_c и величине запаздывания c имеем неравенство $\min\{t_c, c\} > 0$. В этом случае при $0 \leq t < \min\{t_c, c\}$ рассматриваемая система бездействует, поскольку значения управления и возмущения имеют нулевые значения.

7. Решение задачи 3 для класса ограниченных возмущений при использовании управления, предназначенного для возмущений ограниченной длительности. В безразмерных переменных управление $u_\tau(t)$ из (4.1) приобретает вид

$$u_\tau(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leq t < \tau \\ +1, & \tau \leq t \leq T_\tau \\ 0, & t > T_\tau \end{cases} \quad (7.1)$$

$$T_\tau = 1 + 2\tau, \quad \tau \in \Sigma, \quad \Sigma = [0, +\infty)$$

Оптимальное управление в классах управлений $U_\Sigma = \{u_\tau\}$ и возмущений V_T для задачи 3 определяется формулой (7.1) со значением параметра τ [10, 11]:

$$\tau^* = \begin{cases} T/2 + 1/4 & \text{при } T \leq 1/2 \\ 1/2 & \text{при } 1/2 < T \leq 7/2 \\ \sqrt{(1+T)/2} - 1 & \text{при } T > 7/2 \end{cases} \quad (7.2)$$

а значение функционала и момент упреждения находят как

$$J_\tau = \begin{cases} (T/2 + 1/4)^2 & \text{при } T \leq 1/2 \\ T/2 & \text{при } 1/2 < T \end{cases} \quad (7.3)$$

$$t_\tau^* = \begin{cases} T + 1 & \text{при } T \leq 1/2 \\ 7/4 - T/2 & \text{при } 1/2 < T \leq 7/2 \\ 0 & \text{при } T > 7/2 \end{cases}$$

Заметим, что приведенное решение (7.1)–(7.3) задачи 3 при $T > 1/2$ не единственно. Значение функционала $J = T/2$ для этого случая обеспечивается моментом переключения τ и моментом упреждения t_τ , удовлетворяющим соотношениям t_τ^*

$$\max\{\sqrt{(1+T)/2} - 1, 0\} \leq \tau \leq \sqrt{T/2}$$

$$t_\tau = 1/2 + \tau^2 + 2\tau - T/2$$

Обозначим через $u_\tau^*(t)$ функцию из (7.1) со значением $\tau = \tau^*$ из (7.2). Введем функцию $J_{b\tau}(t^*)$, определяемую как значение функционала J , отвечающее управлению $u_\tau^*(t)$ и возмущению $v(t) = V_0(t - t^*)$, т.е. прямоугольному возмущению с амплитудой b с началом действия в момент времени t^* . Для вычисления величины $J_{bT}(u_\tau^*, t_\tau^*)$ необходимо посчитать значение выражения

$$J_{bT}(u_\tau^*, t_\tau^*) = \max[J_{b\tau}(t_\tau^*), J_{b\tau}(t_\tau^* + T - b^{-1})]$$

Значение J для класса возмущений V_{bT} при управлении u_τ^* с моментом упреждения t_τ^* для всех $1 < b \leq 2$ имеет вид

$$J_{bT}(u_\tau^*, t_\tau^*) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{при } \frac{1}{2} \leq \frac{1}{b} < T \leq \frac{1}{b} + \frac{1}{2} \\ \frac{T}{2} - \frac{1}{2b} & \text{при } \frac{1}{b} + \frac{1}{2} < T \end{cases} \quad (7.4)$$

Значение J для класса возмущений V_{bT} при управлении u_τ^* с моментом упреждения t_τ^* для всех $b > 2$ имеет более сложный вид

$$J_{bT}(u_\tau^*, t_\tau^*) = \begin{cases} \left(\frac{T}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 & \text{при } \frac{1}{b} < T \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \text{при } \frac{1}{2} < T \leq \frac{1}{b} + \frac{1}{2} \\ \frac{T}{2} - \frac{1}{2b} & \text{при } \frac{1}{b} + \frac{1}{2} < T \end{cases} \quad (7.5)$$

8. Качество изоляции при комбинированном способе управления. Значения функционалов $J_{bT}(u_{bc}^*, t_c^*)$, $J_{bT}(u_\tau^*, t_\tau^*)$ из (6.19), (7.4), (7.5) представляют собой функции от параметров b , T , заданные в области

$$G_{bT} = \{b, T : b > 1, Tb > 1\}$$

Введем для значений $J_{bT}(u_{bc}^*, t_c^*)$, $J_{bT}(u_\tau^*, t_\tau^*)$ другие обозначения, отражающие эту зависимость

$$J_-(b, T) = J_{bT}(u_{bc}^*, t_c^*), J_+(b, T) = J_{bT}(u_\tau^*, t_\tau^*)$$

Вычисления показывают, что равенство $J_-(b, T) = J_+(b, T)$ достигается при $1/b < T < 1$ на кривой l , описываемой функцией $b = f(T)$, $0 < T \leq 1$, где

$$f(T) = \begin{cases} \frac{38 + 59T - 41T^2 + 2\sqrt{361 + 528T + 536T^2 - 320T^3 + 272T^4}}{4T(T+1)(T^2 - 7T + 4)} & \text{при } 0 < T \leq \frac{1}{2} \\ \frac{29 + 400T + 32\sqrt{79 - 70T + 8T^2}}{160T - 135 + 256T^2} & \text{при } \frac{1}{2} < T \leq \frac{13}{14} \\ \frac{1}{8T - 7} & \text{при } \frac{13}{14} \leq T \leq 1 \end{cases}$$

При этом кривая l стремится к плюс бесконечности при $T \rightarrow +0$, лежит выше кривой $b = 1/T$ при $0 < T < 1$ и пересекается с ней в точке $T = 1, b = 1$. Кривые l и $b = 1/T$ изображены сплошными линиями на рис. 3. Кривая l делит область G_{bT} на две подобласти G_- , G_+ , располагающиеся ниже и выше кривой l соответственно. При этом в нижней области G_- выполнено неравенство $J_- < J_+$, а в верхней области G_+ выполнено неравенство $J_- > J_+$. Зададим функцию $J_{comb}(b, T)$ соотношением

$$J_{comb}(b, T) = \min\{J_-(b, T), J_+(b, T)\}, \quad (b, T) \in G_{bT}$$

и поясним как эта функция вычисляется. Дополнительно область G_+ на рис. 3 разделена двумя пунктирными линиями l_1 , l_2 , задаваемыми формулами

$$l_1 : T = \frac{1}{2}, \quad b \geq \frac{229 + 32\sqrt{46}}{9} \approx 49.55939549$$

$$l_2 : b = \frac{2}{2T - 1}, \quad \frac{1}{2} < T \leq \frac{13}{14}$$

Линия l_1 имеет общую точку с кривой l :

$$T = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{229 + 32\sqrt{46}}{9}$$

а кривая l_2 имеет общую точку с кривой l :

$$T = \frac{13}{14}, \quad b = \frac{7}{3}$$

В каждой из четырех областей, помеченных на рис. 3, значение $J_{comb}(b, T)$ вычисляется по своей формуле с соответствующим индексом. То есть области со значением индекса i ($i = 1, 2, 3, 4$) соответствует своя функция $J_i(b, T)$. Функции $J_i(b, T)$ имеют следующий вид

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{25}{16} - \frac{41}{16b} + T - \frac{\sqrt{9b^2 + 8b^2T - 26b - 8Tb + 17}}{2b} \\ J_2 &= \left(\frac{T}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 \\ J_3 &= \frac{1}{4} \\ J_4 &= \frac{T}{2} - \frac{1}{2b} \end{aligned} \tag{8.1}$$

Функция $J_{comb}(b, T)$ представляет собой значение функционала (3.3) при использовании в качестве управления и момента упреждения величин u_{bc}^* , t_c^* в области G_- и при использовании в качестве управления и момента упреждения величин u_t^* , t_t^* в области G_+ . Такой способ управления с моментом упреждения назовем комбинированным управлением.

На рис. 4 изображено разбиение области G_{bT} на две подобласти, которые фигурируют в формуле (6.19). Цифры 1 и 4, которыми помечены эти области, означают, что функционал $J_{bT}(u_{bc}^*, t_c^*)$ имеет значения J_1 и J_4 из (8.1) в соответствующих подобластях.

На рис. 5 изображено разбиение области G_{bT} на три подобласти, которые фигурируют в формулах (7.4), (7.5). Цифры 2–4, которыми помечены эти области, означают что функционал $J_{bT}(u_t^*, t_t^*)$ имеет значения J_2, J_3, J_4 из (8.1) в соответствующих подобластях.

Вычисления показывают, что применение комбинированного управления приводит к улучшению значения функционала, доходящему до 10% по сравнению со значением функционала J_- , полученным для управления u_{bc}^* и момента упреждения t_c^* . Применение комбинированного управления приводит к улучшению значения функционала, доходящему до 700% по сравнению со значением функционала J_+ , полученным для управления u_t^* и момента упреждения t_t^* . Действительно, наилучшие значения относительной разности решений демонстрируют следующие пределы

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{J_- - J_{comb}}{J_{comb}} \Big|_{T=1/5} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{J_1 - J_2}{J_2} \Big|_{T=1/5} = 0.1 \\ \lim_{b \rightarrow 2+0} \frac{J_+ - J_{comb}}{J_{comb}} \Big|_{T=1/2} &= \lim_{b \rightarrow 2+0} \frac{J_3 - J_1}{J_1} \Big|_{T=1/2} = 7.0 \end{aligned}$$

Заключение. Рассмотрена задача изоляции объекта на подвижном основании, которое подвержено однонаправленным возмущениям ограниченной длительности и амплитуды с заданным интегралом от возмущения. Для этой модели изучалась возможность применения управления, предназначенного для прямоугольного возмущения с оптимизацией начала его действия, а также управления, предназначенного для ударов

с неограниченной амплитудой, но с ограниченной длительностью. Было показано, что при больших длительностях возмущения предложенные управления и значения функционалов совпадают, а при относительно небольших длительностях возмущений первое управление предпочтительнее использовать для небольших амплитуд возмущения, а при относительно больших амплитудах возмущения предпочтительнее использовать второе управление. На основе этих двух управлений было построено комбинированное управление, сочетающее преимущества обоих управлений.

Работа выполнена по теме государственного задания АААА-А20-120011690138-6.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гурецкий В.В.* Об одной задаче оптимального управления // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 1. С. 159–162.
2. *Гурецкий В.В.* О задаче минимизации максимального смещения // Труды ЛПИ. Механика и процессы управления. 1969. № 307. С. 11–21.
3. *Sevin E. and Pilkey W.* Optimum Shock and Vibration Isolation. Washington DC: Shock and Vibration Information Analysis Center, 1971, 162 с.
4. *Коловский М.З.* Автоматическое управление виброзащитными системами. М.: Наука, 1976, 320 с.
5. *Болотник Н.Н.* Оптимизация амортизационных систем. М.: Наука, 1983, 256 с.
6. *Balandin D.V., Bolotnik N.N., and Pilkey W.D.* Optimal Protection from Impact, Shock, and Vibration. Amsterdam: Gordon and Breach Science, 2001, 440 p.
7. *Pilkey W.D., Balandin D.V., Bolotnik N.N., Crandal J.R., Purtsezev S.V.* Injury Biomechanics and Control: Optimal Protection from Impact. Wiley and Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2010. 286 p.
8. *Болотник Н.Н., Корнеев В.А.* Анализ предельных возможностей противоударной изоляции при кратковременных внешних воздействиях // Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. № 1. С. 147–168.
9. *Болотник Н.Н., Корнеев В.А.* Противоударная изоляция с упреждающим управлением для внешних возмущений различной формы // Известия РАН. Теория и системы управления. 2018. № 3. С. 48–63.
10. *Болотник Н.Н., Корнеев В.А.* Гарантирующее упреждающее управление в задаче противоударной изоляции // Доклады РАН. 2018. Т. 445. № 4. С. 381–385.
11. *Корнеев В.А.* Защита объекта на подвижном основании с помощью упреждающего управления при наихудших возмущениях // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 1. С. 89–97.
12. *Корнеев В.А.* Оптимизация управления с упреждением и запаздыванием в задаче противоударной защиты объекта на подвижном основании // Изв. РАН. ТиСУ. 2020. № 3. С. 30–38.
13. *Корнеев В.А.* Использование постоянного управления с упреждением и запаздыванием в задаче защиты объекта от удара на подвижном основании // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2020. № 2. С. 147–158.
14. *Ledezma-Ramirez D.F., Tapia-Gonzalez P.E., Ferguson N, Brennan M., Tang B.* Recent Advances in Shock Vibration Isolation: An Overview and Future Possibilities // Appl. Mech. Rev. 2019. V. 71. № 6.
<https://doi.org/10.1115/1.4044190>