ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 3, с. 90–99

УДК 539.374

ПЛАСТИЧЕСКОЕ КРУЧЕНИЕ ПРИ ВЫСОКОМ ДАВЛЕНИИ С НЕОДНОРОДНЫМ НАПРЯЖЕННЫМ СОСТОЯНИЕМ

© 2021 г. Г. М. Севастьянов

Хабаровский федеральный исследовательский центр ДВО РАН,
Комсомольск-на-Амуре, Россия
e-mail: akela.86@mail.ru

Поступила в редакцию 18.06.2020 г.
После доработки 04.07.2020 г.
Принята к публикации 13.08.2020 г.

Получено аналитическое решение для кручения при высоком давлении цилиндрического образца, помещенного в жесткую обойму. Деформируемый материал полагается изотропным идеально пластическим. Учтена зависимость предела текучести от давления. Используется модель неассоциированного пластического течения, включающая пластический потенциал Треска и условие текучести Мора–Кулона. Решение прогнозирует неоднородность тензора напряжений в образце. Напряженное состояние соответствует гипотезе Хаара–Кармана (условию полной пластичности). Определены крутящий момент, среднее нормальное давление на торце цилиндрического образца, а также распределение среднего напряжения по радиусу образца. Указаны условия, при которых отсутствует проскальзывание на контактной поверхности.

Ключевые слова: кручение при высоком давлении, интенсивная пластическая деформация, чувствительные к давлению материалы, неассоциированное пластическое течение, неоднородные материалы, гипотеза Хаара–Кармана

DOI: 10.31857/S0572329921030119

Введение. Влияние высокого давления на способность материалов сопротивляться пластическому сдвигу, вероятно, впервые было рассмотрено в работах Бриджмена [1, 2]. Его опыты по кручению образцов, подвергнутых сильному сжатию, показывают, что для самых разных материалов (в том числе, металлических) кривые крутящего момента и предельная разрушающая нагрузка зависят от величины приложенного гидростатического давления. Дальнейшие экспериментальные исследования в этом направлении проводились различными научными группами [3–5]. Достаточно полный исторический обзор представлен в работе [6]. В 1988 году группой профессора Валиева было сообщено о получении в алюминиевом сплаве размера зерна меньше 1 микрометра при обработке образца кручением под высоким давлением [5]. С этих пор процессы кручения под высоким давлением (HPT – high-pressure torsion) интенсивно исследуются методами механики твердого тела, материаловедения и физики материалов [7, 8]. Схемы деформирования при кручении под высоким давлением различаются по степени ограниченности течения образца [9] (рис. 1, U – неограниченная, L – ограниченная, QL – квазиограниченная). Неограниченная схема никак не препятствует радиальному течению материала, при этом образец в ходе деформирования существенно изменяет толщину и диаметр. Квазиограниченная схема [10] допускает некоторое радиальное течение, однако основной объем образца не слишком сильно из-

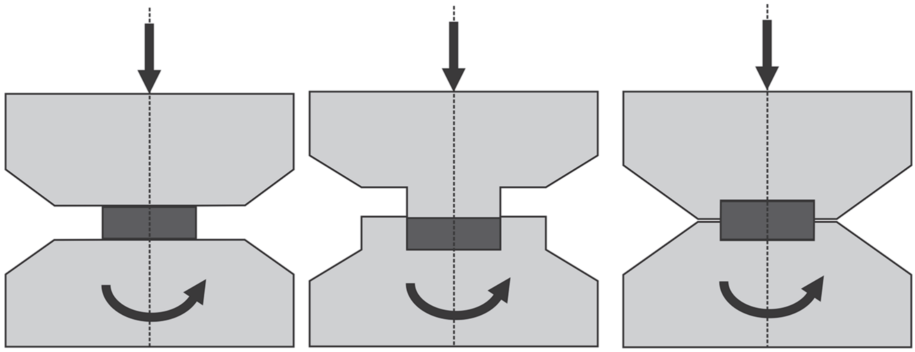

Рис. 1

меняет свою геометрию. При полностью ограниченной схеме деформирования образец может менять свои размеры только за счет изменения плотности и деформирования оснастки. Различные варианты деформирования, близкие к полностью ограниченной схеме описаны, например, в работах [4, 11, 12]. Как правило, используются цилиндрические образцы с достаточно большим отношением диаметра к толщине. Процесс проводят в два этапа. На первом к образцу прикладывается начальное давление путем сведения наковален. При этом для ограниченных схем деформирования создается начальное давление, близкое к однородному гидростатическому [9]. На втором этапе одна или обе наковальни сообщают образцу деформации кручения.

Для прогнозирования напряженного состояния образца и его итоговых свойств широко используются различные аналитические и вычислительные модели. Отметим здесь работу [13], в которой учитываются процессы фазовых превращений в материалах, протекание которых связано с накоплением пластической деформации и зависит от локальной величины давления, а также их влияние на механические характеристики образца. Также учитываются контактные условия между образцом и наковальнями, деформирование оснастки. А, кроме того, в численных расчетах учтено влияние давления на предел текучести образца при изохорной пластической деформации. В ряде работ строятся жестко-пластические решения для различных постановок задачи. В [14] для упрочняющегося по степенному закону материала рассмотрено кручение, нелинейное по высоте образца, с учетом дополнительного кругового сдвига (упомянем, что для комбинации кручения с круговым сдвигом есть точное нелинейно-упругое решение [15]); модель [14] прогнозирует однородное распределение давления. В [16] рассмотрено влияние сдвига в радиальном направлении, вызванного радиальным течением материала, и на основе упрощенного уравнения равновесия получено неоднородное распределение давления в образце. Также упомянем некоторые результаты, связанные с использованием градиентных теорий пластичности [17, 18].

Следует отметить, что для полностью закрепленной схемы деформирования принятие пластического потенциала Мизеса приводит к тому, что напряженное состояние образца в цилиндрическом координатном базисе $\left(\mathbf{e_r}, \mathbf{e_\varphi}, \mathbf{e_z}\right)$ представляется тензором напряжений Коши вида

$$\boldsymbol{\sigma} = -p_0\mathbf{I} + \sigma_{\varphi z}\left(\mathbf{e_\varphi} \otimes \mathbf{e_z} + \mathbf{e_z} \otimes \mathbf{e_\varphi}\right)$$

Здесь p_0 = const – величина начального гидростатического давления в образце перед фазой кручения. Таким образом, полагается, что давление в образце однородно и постоянно в течение всего процесса деформирования.

В экспериментах с использованием квазиограниченной схемы деформирования, которые, как правило, проводятся при постоянном давлении, в фазе кручения наблюдается уменьшение толщины образца (по сравнению с гидростатически сжатым образцом перед началом кручения) за счет радиального течения. Это дает основания ожидать, что если в начале фазы кручения расстояние между наковальнями (и, следовательно, высота образца) будет зафиксировано, то нормальное давление на наковальни и среднее давление в образце будут снижаться, а радиальное течение материала будет сведено к минимуму. Это ничего не говорит об однородности среднего давления в образце, но, тем не менее, не соответствует указанному выше напряженному состоянию, поскольку величина p_0 остается неизменной в ходе деформирования. Отметим также, что проведенные непосредственные измерения на контактной поверхности между образцом и наковальней в ходе процесса [19] демонстрируют неоднородность давления по радиусу образца. По косвенным данным, в частности, по распределению микротвердости по радиусу обработанного образца, теоретически возможно оценить степень неоднородности давления. Однако, при том условии, что ключевым механизмом изменения твердости является выделение новых фаз материала, связанное с локальной величиной давления. Эта оценка, однако, представляет собой достаточно нетривиальную задачу. Кроме того, данные МКЭ-моделирования также говорят о достаточно сильной неоднородности давления в образце. В качестве причин называются: радиальное течение материала, деформирование оснастки, фазовые превращения и соответствующая им объемная деформация, а также изменение механических свойств, начальная неоднородность давления и другие факторы. Тем не менее, кажется интересным, что даже на базе очень простой жестко-пластической модели можно построить решение указанной проблемы, которое не приводит к однородности давления в образце.

Далее будет использована модель изотропного идеально-пластического несжимаемого материала. Это положение основывается на том, что заметное изменение предела текучести материалов из-за деформационного упрочнения (или разупрочнения) прекращается после некоторой степени деформации (которая обычно имеет порядок единицы) [20]. При обработке кручением при высоком давлении величины деформации могут превышать это значение на 1–2 порядка. В таком случае будет разумно использовать в качестве предела текучести при чистом сдвиге его предельную величину.

В этих же условиях вызванная пластической деформацией анизотропия также не проявляется при монотонном нагружении, если исходный (недеформированный) материал изотропен. Эти положения нашли подтверждение при деформировании самых различных материалов [20]. Кроме этого, мы не рассматриваем процессы фазовых превращений в материале, однако учитываем, что давление может оказывать существенное влияние на локальный предел текучести в образце. Последнее утверждение верно в той или иной значимой степени для самых различных материалов – металлических стекол, полимеров, а также металлов в твердом состоянии. Для металлов зависимость предела текучести от величины всестороннего сжатия нехарактерна при обычных условиях, однако отметим, что в случае рассматриваемого процесса речь может идти о давлениях в десятки гигапаскаль. Пластическая несжимаемость компактных материалов в процессе интенсивной деформации является естественным допущением. Отметим, что для кручения с конечными деформациями изотропного неупрочняющегося несжимаемого материала нечувствительного к среднему напряжению имеются аналитические упруго-пластические решения [21–23]. Также отметим недавнее исследование [24], в котором построено приближенное аналитическое решение, которое учитывает зависимость предела текучести от давления.

1. Постановка задачи и уравнения модели. Рассмотрим изохорную деформацию кручения цилиндрического образца высотой h и радиусом R, подвергнутого начальному однородному гидростатическому сжатию величиной p_0. Будем рассматривать идеализированный случай полностью ограниченного деформирования и пренебрегать обратимыми деформациями. Тензор скорости (пластической) деформации имеет вид

$$2\boldsymbol{\varepsilon} = 2\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}} = (\nabla \otimes \mathbf{v}) + (\nabla \otimes \mathbf{v})^T = 2r\theta_t \left(\mathbf{e}_{\boldsymbol{\varphi}} \otimes \mathbf{e}_{\mathbf{z}} + \mathbf{e}_{\mathbf{z}} \otimes \mathbf{e}_{\boldsymbol{\varphi}}\right) \tag{1.1}$$

Здесь вектор скорости $\mathbf{v} = rz\theta_t\mathbf{e}_{\boldsymbol{\varphi}}$, $\theta_t = \partial\theta/\partial t$, t – время, $\theta(t)$ – угол кручения на единицу высоты цилиндрического образца.

Напряженное состояние характеризуется тензором Коши вида

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{rr}\mathbf{e}_{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{e}_{\mathbf{r}} + \sigma_{\varphi\varphi}\mathbf{e}_{\boldsymbol{\varphi}} \otimes \mathbf{e}_{\boldsymbol{\varphi}} + \sigma_{zz}\mathbf{e}_{\mathbf{z}} \otimes \mathbf{e}_{\mathbf{z}} + \sigma_{\varphi z}\left(\mathbf{e}_{\boldsymbol{\varphi}} \otimes \mathbf{e}_{\mathbf{z}} + \mathbf{e}_{\mathbf{z}} \otimes \mathbf{e}_{\boldsymbol{\varphi}}\right) \tag{1.2}$$

Условие равновесия $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ приводит к уравнению

$$r\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \left(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}\right) = 0 \tag{1.3}$$

Мы используем неассоциированную пластическую модель, которая включает условие текучести Мора–Кулона

$$(\sigma_1 - \sigma_3) + \vartheta(\sigma_1 + \sigma_3) = 2\kappa \tag{1.4}$$

и пластический потенциал Треска

$$f = \sigma_1 - \sigma_3 \tag{1.5}$$

Здесь σ_1, σ_3 – наибольшее и наименьшее собственные значения тензора напряжений Коши, $\vartheta \in (0,1)$ – параметр материала. Функция (1.5) дифференцируема везде, кроме угловых точек [25] (рис. 2): $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}} = \Lambda\,\partial f/\partial\boldsymbol{\sigma}$, где Λ – скалярный пластический множитель. Правило определения тензора скорости пластической деформации в угловых точках функции пластического потенциала оговорим далее отдельно. Уравнение равновесия (1.3), условие текучести (1.4) и ассоциированный с пластическим потенциалом (1.5) закон должны исчерпывающе определять компоненты тензоров (1.1) и (1.2) с учетом граничного условия $\sigma_{rr}\big|_{r=R} = -p_0$.

2. Анализ напряженного состояния. Исходя из (1.2), собственные значения тензора напряжений выражаются в следующем виде (нумерация произвольная):

$$\lambda_2 = \sigma_{rr}, \quad \lambda_{1,3} = \left(\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}\right)/2 \pm \sqrt{\left(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz}\right)^2/4 + \sigma_{\varphi z}^2} \tag{2.1}$$

Согласно правилу нормальности $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}} = \Lambda\,\partial f/\partial\boldsymbol{\sigma}$ и (9), из первого равенства в (2.1) следует, что радиальная компонента тензора скорости пластической деформации может быть нулевой, только если напряженное состояние соответствует либо стороне AB с примыкающими узловыми точками (рис. 2), либо симметричной ей стороне. Последний случай исключен, поскольку $\lambda_1 > \lambda_3$. Будем полагать, что в пластическом состоянии при достаточно большой величине деформации напряженное состояние всех точек образца соответствует одной и той же точке на AB.

Для угловых точек пластического потенциала Койтер [26] ввел обобщенное правило нормальности, которое говорит о том, что собственный вектор тензора скорости деформации принадлежит вееру, ограниченному нормалями к смежным сторонам шестиугольника (рис. 2). В рассматриваемой задаче кинематические ограничения (1.1) приводят к тому, что и в угловых точках A или B собственный вектор

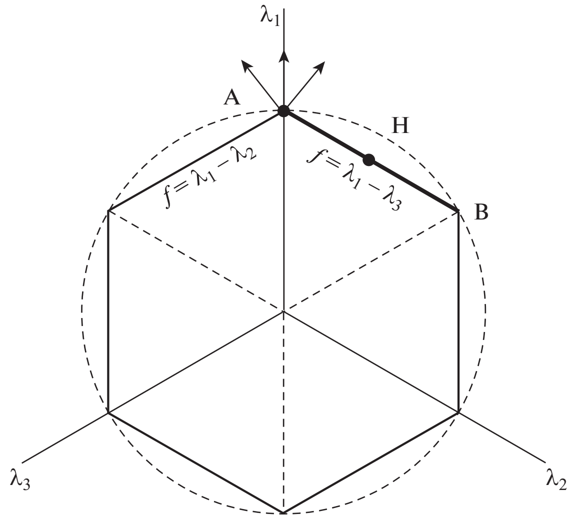

Рис. 2

тензора скорости деформации ортогонален AB. Тогда тензор скорости деформации имеет вид [27]

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}} = \Lambda\frac{\partial(\lambda_1-\lambda_3)}{\partial\boldsymbol{\sigma}} = \Lambda\frac{\boldsymbol{\sigma}-\lambda_2\mathbf{I}}{\lambda_1-\lambda_3}\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}-\lambda_3\mathbf{I}}{\lambda_1-\lambda_2}-\frac{\boldsymbol{\sigma}-\lambda_1\mathbf{I}}{\lambda_2-\lambda_3}\right)$$

С учетом (2.1) и (1.2), имеем

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}} = \frac{\Lambda}{\sqrt{\left(\sigma_{\varphi\varphi}-\sigma_{zz}\right)^2+4\sigma_{\varphi z}^2}}\left(\frac{\sigma_{\varphi\varphi}-\sigma_{zz}}{2}\left(\mathbf{e}_{\boldsymbol{\varphi}}\otimes\mathbf{e}_{\boldsymbol{\varphi}}-\mathbf{e}_{\mathbf{z}}\otimes\mathbf{e}_{\mathbf{z}}\right)+\sigma_{\varphi z}\left(\mathbf{e}_{\boldsymbol{\varphi}}\otimes\mathbf{e}_{\mathbf{z}}+\mathbf{e}_{\mathbf{z}}\otimes\mathbf{e}_{\boldsymbol{\varphi}}\right)\right) \quad (2.2)$$

Из (2.2) и (1.1) следует $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{zz}$. Условие пластичности (1.4) с учетом $\sigma_{\varphi z} > 0$ имеет вид

$$\sigma_{\varphi z} + \vartheta\sigma_{\varphi\varphi} = \kappa \quad (2.3)$$

Введем параметр напряженного состояния

$$L = \frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_3} = \frac{\sigma_{\varphi z}-\left(\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}\right)}{\sigma_{\varphi z}+\left(\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}\right)} \quad (2.4)$$

Значение $L = 1$ соответствует точке H и состоянию гидростатического сжатия с наложенной деформацией сдвига, значение $L = 0$ соответствует угловой точке B, значение $L \to +\infty$ – угловой точке A. Из (2.4) следует

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = -\sigma_{\varphi z}\frac{L-1}{L+1} \quad (2.5)$$

Из (2.3) и (2.5) следует

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{zz} = \left(\sigma_{rr} + \kappa\frac{L-1}{L+1}\right)\left(1+\vartheta\frac{L-1}{L+1}\right)^{-1} \quad (2.6)$$

Тогда, согласно уравнению равновесия (1.3), при $0 \le L < 1$ $\partial\sigma_{rr}/\partial r < 0$, а также $\partial\sigma_{\varphi\varphi}/\partial r < 0$ и $\partial\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}/\partial r < 0$, что не согласуется с расчетными и экспериментальными

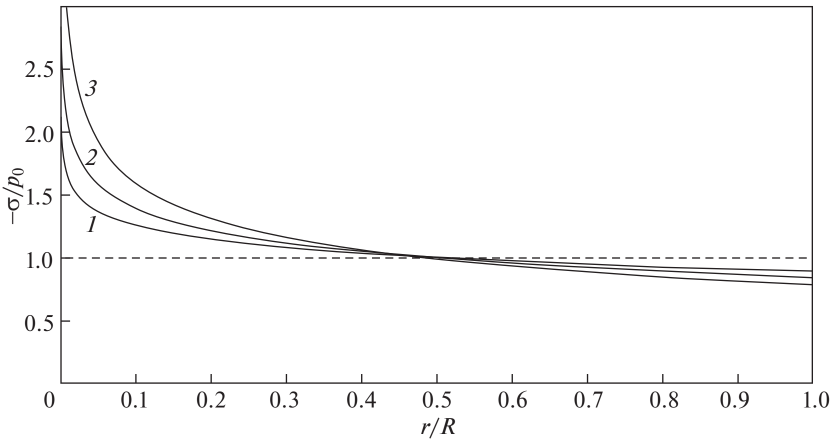

Рис. 3

данными. Таким образом, мы будем рассматривать только напряженные состояния, которым соответствуют точки из отрезка AH.

Поскольку параметр L неизвестен, промежуточное главное напряжение остается неопределенным, система уравнений не имеет однозначного решения без принятия дополнительных условий.

В качестве такого условия может выступать уже упомянутое предположение $\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{zz} = -p_0$. В этом случае напряженное состояние однородно (соответствует точке H на рис. 2):

$$\boldsymbol{\sigma} = -p_0\mathbf{I} + (\kappa + \vartheta p_0)(\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\varphi) \tag{2.7}$$

Другой возможный вариант – принятие условия полной пластичности [28] (гипотезы Хаара–Кармана). В этом случае напряженное состояние соответствует угловой точке A ($L \to +\infty$). Уравнение равновесия принимает вид

$$r\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \sigma_{rr}\frac{\vartheta}{1+\vartheta} - \frac{\kappa}{1+\vartheta} = 0$$

и интегрируется с краевым условием $\sigma_{rr}(R) = -p_0$:

$$\sigma_{rr}(r) = \kappa/\vartheta - (p_0 + \kappa/\vartheta)(r/R)^{-\vartheta/(1+\vartheta)} \tag{2.8}$$

Напряженное состояние в этом случае неоднородно. Среднее напряжение согласно (2.8) и (2.6) равно

$$\sigma = (\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma})/3 = \frac{\kappa}{\vartheta} - \frac{3+\vartheta}{3\vartheta(1+\vartheta)}(\kappa + \vartheta p_0)\left(\frac{r}{R}\right)^{-\vartheta/(1+\vartheta)} \tag{2.9}$$

На рис. 3 приведено распределение среднего напряжения при различных значениях параметра ϑ, полученное по формуле (2.9) при $\kappa/p_0 = 0.15$; кривая *1* соответствует значению $\vartheta = 0.01$, кривая *2* значению $\vartheta = 0.1$, кривая *3* значению $\vartheta = 0.25$.

На рис. 4 приведено распределение среднего напряжения при различных значениях параметра κ/p_0, полученное по формуле (2.9) при $\vartheta = 0.05$; кривая *1* соответствует значению $\kappa/p_0 = 0.05$, кривая *2* значению $\kappa/p_0 = 0.15$, кривая *3* значению $\kappa/p_0 = 0.3$.

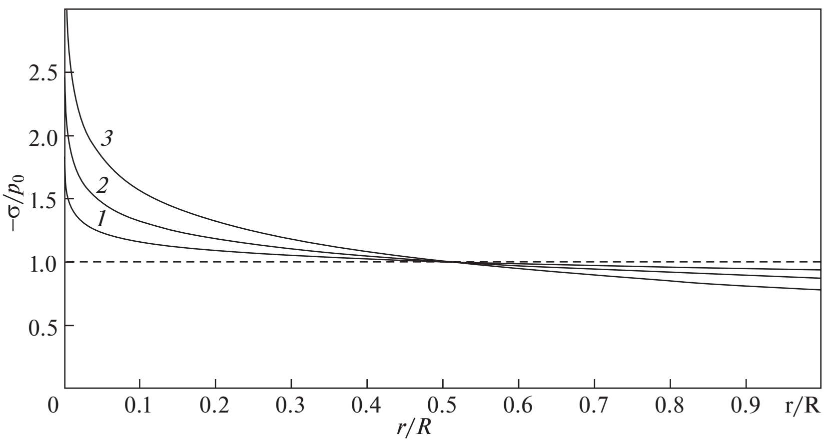

Рис. 4

Касательное напряжение

$$\sigma_{\varphi z} = \frac{\kappa + \vartheta p_0}{1 + \vartheta}\left(\frac{r}{R}\right)^{-\vartheta/(1+\vartheta)} \tag{2.10}$$

Крутящий момент

$$M = 2\pi\int_0^R r^2\sigma_{\varphi z}dr = \frac{2\pi R^3(\kappa + \vartheta p_0)}{3 + 2\vartheta} \tag{2.11}$$

Среднее осевое давление

$$\langle\sigma_{zz}\rangle = \frac{2}{R^2}\int_0^R r\sigma_{zz}dr = -\frac{p_0 - \kappa/2}{1 + \vartheta/2}$$

3. Заключительные замечания. Соответствующее решению (2.8) напряженное состояние следует трактовать как предельное при неограниченном росте пластической деформации. В таком случае сингулярность тензора напряжений в центре образца просто отражает тот факт, что для упруго-пластического материала условие пластичности никогда не выполнится в точке $r = 0$.

Предельный переход $\vartheta \to 0$ в (2.9) дает $\lim\limits_{\vartheta\to 0}\sigma = -p_0 + 2\kappa/3 + \kappa\ln(R/r)$. Интересно вспомнить работу [29], в которой полученное напряженное состояние в задаче о кручении материала, не чувствительного к среднему напряжению, также имеет логарифмическую сингулярность на оси симметрии.

Крутящий момент, согласно (2.11) несколько ниже, чем прогнозируется решением с однородным напряженным состоянием ($M = 2\pi R^3(\kappa + \vartheta p_0)/3$). Учет неоднородности напряженного состояния в частности может повлиять на результаты определения величины ϑ по экспериментальным данным крутящего момента. Среднее осевое давление ниже начального значения, причем снижение существеннее для материалов с большим пределом текучести при чистом сдвиге κ. Локальная величина среднего напряжения на периферии образца также может быть существенно ниже p_0. Среднее напряжение должно мало отличаться от p_0 в средней зоне образца ($r/R \approx 1/2$) в достаточно широком диапазоне используемых параметров материала.

Приведенное аналитическое решение может реализоваться при ограничении на величину κ/p_0. Отношение локального касательного напряжения $\sigma_{\varphi z}$ к локальному осевому давлению σ_{zz} согласно (2.6), (2.8) и (2.10) есть

$$-\sigma_{\varphi z}/\sigma_{zz} = \vartheta[1 - \kappa(1+\vartheta)(\kappa + \vartheta p_0)^{-1}(r/R)^{\vartheta/(1+\vartheta)}]^{-1}$$

Эта функция растет с ростом координаты r, для отсутствия кругового сдвига, вызванного проскальзыванием между образцом и наковальнями, требуется, чтобы выполнялось

$$0 < -\sigma_{\varphi z}/\sigma_{zz}\big|_{r=R} = (\kappa + \vartheta p_0)/(p_0 - \kappa) < \mu$$

где μ — коэффициент трения покоя (для сухого трения без адгезии $\mu \leq 1$). Следовательно, принятая кинематика (1.1) не нарушается только если

$$p_0 > \kappa(1+\mu)(\mu - \vartheta)^{-1}, \quad \vartheta < \mu$$

Предельное (при неограниченном росте деформации кручения) напряженное состояние в упруго-пластическом материале может существенно отличаться как от однородного, так и от прогнозируемого решением (2.8). Отметим, что для материала нечувствительного к давлению с условием текучести Треска локальное значение параметра напряженного состояния L в каждой точке образца не меняется после прохождения упруго-пластической границы через эту точку [22]. При этом распределение параметра L однородно в пластической зоне, значение L конечно и больше единицы (то есть напряженное состояние соответствует некоторой точке между A и H, рис. 2). В этой же задаче, но с учетом изменения свойств материала (из-за нагрева вследствие пластической диссипации [23]) параметр L изменяется в ходе необратимого деформирования. Вместе с тем, учет чувствительности материала к давлению приводит к практически стационарному, но неоднородному распределению параметра L в пластической области [24].

Работа выполнена в рамках государственного задания ХФИЦ ДВО РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bridgman P.W.* Effects of high shearing stress combined with high hydrostatic pressure // Phys. Rev. 1935. V. 48. P. 825–847.
https://doi.org/10.1103/PhysRev.48.825
2. *Bridgman P.W.* Studies in large plastic flow and fracture: With special emphasis on the effects of hydrostatic pressure. New York-London: McGraw-Hill, 1952. 362 p.
3. *Верещагин Л.Ф., Шапочкин В.А.* Влияние гидростатического давления на сопротивление сдвигу в твердых телах // ФММ. 1960. Т. 9. С. 258–264.
4. *Бланк В.Д., Коняев Ю.С., Кузнецов А.И., Эстрин Э.И.* Алмазная камера для исследования влияния деформации сдвига на структуру и свойства твердых тел при давлении до 43 ГПа // ПТЭ. 1984. № 5. С. 178–180.
5. *Валиев Р.З., Кайбышев О.А., Кузнецов Р.И., Мусалимов Р.Ш., Ценев Н.К.* Низкотемпературная сверхпластичность металлических материалов // Докл. АН СССР. 1988. Т. 301. С. 864–866.
6. *Edalati K., Horita Z.* A review on high-pressure torsion (HPT) from 1935 to 1988 // Mat. Sci. Eng. A – Struct. 2016. V. 652. P. 325–352.
https://doi.org/10.1016/j.msea.2015.11.074
7. *Valiev R.Z., Islamgaliev R.K., Alexandrov I.V.* Bulk nanostructured materials from severe plastic deformation // Prog. Mater. Sci. 2000. V. 45. P. 103–189.
https://doi.org/10.1016/S0079-6425(99)00007-9
8. *Levitas V.I.* High-pressure phase transformations under severe plastic deformation by torsion in rotational anvils // Mater. Trans. 2019. V. 60(7). P. 1294–1301.
https://doi.org/10.2320/matertrans.MF201923

9. *Zhilyaev A.P., Langdon T.G.* Using high-pressure torsion for metal processing: Fundamentals and applications // Prog. Mater. Sci. 2008. V. 53. P. 893–979. https://doi.org/10.1016/j.pmatsci.2008.03.002

10. *Wadsack R., Pippan R., Schedler B.* Structural refinement of chromium by severe plastic deformation // Fusion Eng. Des. 2003. V. 66–68. P. 265–269. https://doi.org/10.1016/S0920-3796(03)00136-4

11. *Ma Y., Levitas V.I., Hashemi J.* X-ray diffraction measurements in a rotational diamond anvil cell // J. Phys. Chem. Solids. 2006. V. 67 (9). P. 2083–2090. https://doi.org/10.1016/j.jpcs.2006.05.052

12. *Joo S.-H., Kim H.S.* Ring-constraint high-pressure torsion process // Metall. Mater. Trans. A. 2016. V. 47 (7). P. 3473–3478. https://doi.org/10.1007/s11661-016-3518-3

13. *Feng B., Levitas V.I., Li W.* FEM modeling of plastic flow and strain-induced phase transformation in BN under high pressure and large shear in a rotational diamond anvil cell // Int. J. Plasticity. 2019. V. 113. P. 236–254. https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2018.10.004

14. *Beygelzimer Y., Kulagin R., Toth L.S., Ivanisenko Y.* The self-similarity theory of high pressure torsion // Beilstein J. Nanotechnol. 2016. V. 7. P. 1267–1277. https://doi.org/10.3762/bjnano.7.117

15. *Sevastyanov G.M.* Torsion with circular shear of a Mooney – Rivlin solid // Mech. Solids. 2020. V. 55 (2). P. 273–276. https://doi.org/10.3103/S0025654420020156

16. *Levitas V.I.* High-pressure mechanochemistry: Conceptual multiscale theory and interpretation of experiments // Phys. Rev. B. 2004. V. 70, 184118. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.70.184118

17. *Estrin Y., Molotnikov A., Davies C.H.J., Lapovok R.* Strain gradient plasticity modelling of high-pressure torsion // J. Mech. Phys. Solids. 2008. V. 56 (4). P. 1186–1202. https://doi.org/10.1016/j.jmps.2007.10.004

18. *Lubarda V.A.* Rigid-plastic torsion of a hollow tube in strain-gradient plasticity // Int. J. Solids Struct. 2016. V. 100–101. P. 127–137. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.07.029

19. *Levitas V.I., Ma Y., Hashemi J., Holtz M., Guven N.* Strain-induced disorder, phase transformations, and transformation-induced plasticity in hexagonal boron nitride under compression and shear in a rotational diamond anvil cell: In situ x-ray diffraction study and modeling // J. Chem. Phys. 2006. V. 125, 044507. https://doi.org/10.1063/1.2208353

20. *Levitas V.I.* Large deformation of materials with complex rheological properties at normal and high pressure. N.-Y.: Nova Science Publishers, 1996. 385 p.

21. *Arutyunyan N.Kh., Radayev Yu.N.* Elastoplastic torsion of a cylindrical rod for finite deformations // J. Appl. Math. Mech. 1989. V. 53 (6). P. 804–811. https://doi.org/10.1016/0021-8928(89)90090-7

22. *Sevastyanov G.M., Burenin A.A.* Finite strain upon elastic–plastic torsion of an incompressible circular cylinder // Dokl. Phys. 2018. V. 63. P. 393–395. https://doi.org/10.1134/S1028335818090094

23. *Sevast'yanov G.M., Burenin A.A.* Local adiabatic heating effect in finite-strain elastic-plastic torsion // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2019. V. 60. P. 1104–1114. https://doi.org/10.1134/S0021894419060166

24. *Sevastyanov G.M.* Analytical solution for high-pressure torsion in the framework of geometrically nonlinear non-associative plasticity // Int. J. Solids Struct. 2020. V. 206. P. 383–395. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.09.028

25. *He Q.-C., Vallée C., Lerintiu C.* Explicit expressions for the plastic normality-flow rule associated to the Tresca yield criterion // Z. Angew. Math. Phys. 2005. V. 56 (2). P. 357–366. https://doi.org/10.1007/s00033-005-4121-4
26. *Koiter W.T.* Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elasto-plastic materials with a singular yield surface // Quart. Appl. Math. 1953. V. 11. P. 350–354. https://doi.org/10.1090/qam/59769
27. *Itskov M.* Tensor algebra and tensor analysis for engineers with applications to continuum mechanics. Springer, 2015. 300 p.
28. *Ивлев Д.Д.* Механика пластических сред. Т. 1. Теория идеальной пластичности. М.: Физматлит, 2001.
29. *Seth B.R.* Elastic-plastic transition in torsion // Z. Angew. Math. Mech. 1964. V. 44 (6). P. 229–233. https://doi.org/10.1002/zamm.19640440602