ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 3, с. 36–41

УДК 531.36: 531.53

ОБ ЭВОЛЮЦИИ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ПОДВЕШЕННОГО НА НИТИ В ОДНОРОДНОМ ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ

А. П. Маркеев[a,b,*]

[a] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

[b] *Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия*

**e-mail: anat-markeev@mail.ru*

Поступила в редакцию 25.04.2020 г.
После доработки 25.07.2020 г.
Принята к публикации 07.08.2020 г.

Изучается плоское движение твердого тела в однородном поле тяжести. Тело подвешено на невесомой нерастяжимой нити, которая во все время движения остается натянутой. Предполагается, что длина нити имеет большую величину ($\sim\varepsilon^{-1/2}$), а расстояние от точки подвеса тела до его центра тяжести является малым ($\sim\varepsilon$). Уравнения движения представлены как уравнения системы с одной быстро вращающейся фазой. Эта система исследуется при помощи классической теории возмущений и КАМ-теории. Показано, что для всех значений времени движение мало (на величины $\sim\varepsilon$) отличается от медленных колебаний нити в окрестности нисходящей вертикали и вращения тела относительно точки подвеса с почти постоянной угловой скоростью. Мера множества движений, отличных от упомянутых движений, оценивается сверху величиной порядка $\exp(-c/\varepsilon)$ ($c > 0$ – const).

Ключевые слова: система Гамильтона, маятник, колебания, вращения, устойчивость

DOI: 10.31857/S0572329921020124

Введение. Рассмотрим твердое тело весом mg, подвешенное при помощи невесомой нерастяжимой нити длиной ℓ. Движение тела таково, что векторы скоростей всех его точек параллельны неподвижной вертикальной плоскости OXY, проходящей через центр тяжести C тела и его точку подвеса A (см. рис. 1). Считаем, что во все время движения нить натянута.

Рассматриваемая материальная система имеет две степени свободы. За обобщенные координаты примем угол θ, который составляет направление нити OA с вертикалью OX, и угол ψ между отрезком AC и горизонтальной осью OY.

Целью статьи является исследование эволюции движения на бесконечном интервале времени при следующих двух предположениях: расстояние r от точки A до центра тяжести C является малой величиной, длина нити ℓ – большая величина. Анализ проводится при помощи классических и современных методов теории возмущений [1–4].

Динамика твердого тела на невесомой идеально гибкой нерастяжимой нити (струне) к настоящему времени получила значительное развитие. Подробно исследован вопрос о существовании, устойчивости и бифуркациях периодических, стационарных и прецессионных движений, рассмотрен также случай, когда струна не является идеаль-

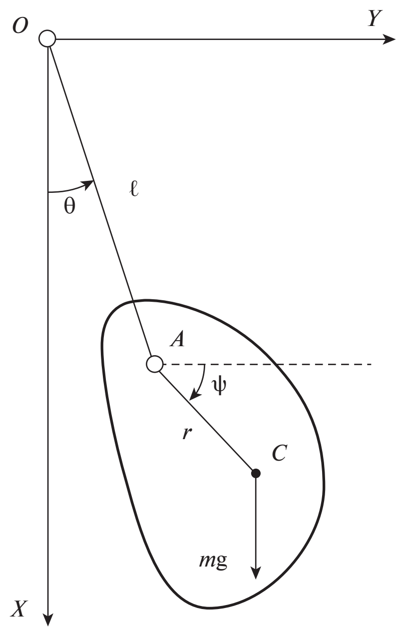

Рис. 1

ной [5–8]. В статьях [9, 10] исследованы некоторые задачи динамики твердого тела, в которых нить рассматривается как идеальная неудерживающая связь.

1. Уравнения движения. Кинетическая и потенциальная энергия тела вычисляются по формулам

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}J_c\dot{\psi}^2, \quad \Pi = -mgx_c \tag{1.1}$$

$$x_c = \ell\cos\theta + r\sin\psi, \quad y_c = \ell\sin\theta + r\cos\psi \tag{1.2}$$

Здесь точкой обозначается дифференцирование по времени t, а J_c – момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр тяжести перпендикулярно плоскости OXY.

Из (1.1) и (1.2) имеем выражение для функции Лагранжа $L = T - \Pi$:

$$L = \frac{1}{2}(J_c + mr^2)\dot{\psi}^2 - mr\ell\sin(\theta + \psi)\dot{\psi}\dot{\theta} + \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg(\ell\cos\theta + r\sin\psi)$$

В дальнейшем будет использоваться гамильтонова форма уравнений движения. Функция Гамильтона Γ задается равенством $\Gamma = T + \Pi$, в правой части которого величины $\dot{\psi}$ и $\dot{\theta}$ должны быть выражены через обобщенные импульсы p_ψ, p_θ:

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}}, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}$$

После несложных выкладок получаем функцию Гамильтона в следующем виде:

$$\Gamma = \frac{1}{2[J_c + mr^2\cos^2(\theta + \psi)]}\left[p_\psi^2 + 2\frac{r}{\ell}\sin(\theta + \psi)p_\psi p_\theta + \frac{J_c^2 + mr^2}{m\ell^2}p_\theta^2\right] - \\ - mg(\ell\cos\theta + r\sin\psi) \tag{1.3}$$

2. Малый параметр. Представление функции Гамильтона в виде ряда. Вместо p_ψ, p_θ введем безразмерные импульсы p_χ, p_δ при помощи канонического (с валентностью $(m\ell\sqrt{g\ell})^{-1}$) преобразования вида

$$p_\psi = (m\ell\sqrt{g\ell})^{-1} p_\chi, \quad p_\theta = (m\ell\sqrt{g\ell})^{-1} p_\delta, \quad \psi = \chi, \quad \theta = \delta \tag{2.1}$$

и перейдем к новой (безразмерной) независимой переменной τ:

$$\tau = (m\ell\sqrt{g\ell}/J_c)t \tag{2.2}$$

Новым переменным отвечает функция G, вычисляемая по формуле

$$G = J_c\Big/(m^2 g\ell^3)\,\Gamma \tag{2.3}$$

где Γ – функция (1.3), в которой сделана замена (2.1).

В соответствии с принятыми (см. Введение) предположениями введем в уравнения движения малый параметр ε ($0 < \varepsilon \ll 1$), положив

$$r = \varepsilon\, \mathrm{a}, \quad \ell = \varepsilon^{-1/2}\sqrt{J_c/m} \tag{2.4}$$

где a – величина порядка единицы, имеющая размерность длины.

Функция Гамильтона (2.3) представима в виде ряда по степеням параметра ε:

$$G = G_0 + \varepsilon G_1 + \varepsilon^2 G_2 + O(\varepsilon^3) \tag{2.5}$$

$$G_0 = \frac{1}{2}p_\chi^2, \quad G_1 = -\frac{1}{2}\frac{a^2}{\ell^2}p_\chi^2\cos^2(\delta+\chi) + \frac{a}{\ell}p_\chi p_\delta\sin(\delta+\chi) + \frac{1}{2}p_\delta^2 - \cos\delta,$$

$$G_2 = -\frac{a}{\ell}\sin\chi + \frac{1}{2}\frac{a^4}{\ell^4}p_\chi^2\cos^4(\delta+\chi) -$$

$$-\frac{a^3}{\ell^3}p_\chi p_\delta\sin(\delta+\chi)\cos^2(\delta+\chi) + \frac{1}{2}\frac{a^2}{\ell^2}p_\delta^2\sin^2(\delta+\chi)$$

3. Упрощение функции Гамильтона. Система с функцией Гамильтона (2.5) имеет быстро вращающуюся фазу χ. При помощи классической теории возмущений можно построить близкое к тождественному каноническое преобразование χ, δ, p_χ, $p_\delta \to x, y, p_x, p_y$, которое исключает зависимость функции Гамильтона от быстрой фазы в любом конечном приближении по ε. Приведем явный вид канонической замены, исключающей быструю фазу в членах до второй степени ε включительно. Производящую функцию $S(p_x, p_y, \chi, \delta)$ возьмем в виде

$$S = p_x\chi + p_y\delta + \varepsilon S_1(p_x, p_y, \chi, \delta) + \varepsilon^2 S_2(p_x, p_y, \chi, \delta) \tag{3.1}$$

Из (3.1) и соотношений

$$x = \frac{\partial S}{\partial p_x}, \quad y = \frac{\partial S}{\partial p_y}, \quad p_\chi = \frac{\partial S}{\partial \chi}, \quad p_\delta = \frac{\partial S}{\partial \delta}$$

следует, что

$$\begin{gathered}\chi = x - \varepsilon\frac{\partial S_1}{\partial p_x} + O(\varepsilon^2), \quad \delta = y - \varepsilon\frac{\partial S_1}{\partial p_y} + O(\varepsilon^2),\\ p_\delta = p_y + \varepsilon\frac{\partial S_1}{\partial y} + O(\varepsilon^2)\end{gathered} \tag{3.2}$$

$$p_\chi = p_x + \varepsilon\frac{\partial S_1}{\partial x} + \varepsilon^2\left(\frac{\partial S_2}{\partial x} - \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2}\frac{\partial S_1}{\partial p_x} - \frac{\partial^2 S_1}{\partial x\partial y}\frac{\partial S_1}{\partial p_y}\right) + O(\varepsilon^3) \tag{3.3}$$

где $S_i = S_i(p_x, p_y, x, y)$ $(i = 1, 2)$.

Подставив выражения (3.2) и (3.3) в правую часть равенства (2.5) и проведя несложные вычисления, получим, что для исключения быстрой фазы x из членов до второй степени включительно в разложении новой функции Гамильтона $F(p_x, p_y, x, y, \varepsilon)$ в ряд по ε функции S_1 и S_2 следует взять такими:

$$S_1 = \frac{a}{\ell} p_y \cos(x+y) + \frac{1}{8}\frac{a^2}{\ell^2} p_x \sin(2x+2y)$$

$$S_2 = -\frac{a}{2\ell p_x}\cos x - \frac{a}{8\ell p_x}\left(\frac{a^2}{\ell^2}p_x^2 + 8p_y^2\right)\cos(x+y) - \frac{a}{2\ell p_x}\cos(x+2y) +$$

$$+\frac{1}{24}\frac{a^3}{\ell^3} p_x \cos(3x+3y) - \frac{1}{16}\frac{a^2}{\ell^2}\left(\frac{a^2}{\ell^2}p_x + 6p_y\right)\sin(2x+2y) - \frac{1}{256}\frac{a^4}{\ell^4}p_x\sin(4x+4y)$$

Новая функция Гамильтона записывается в следующем виде:

$$F = \frac{1}{2}A_0 p_x^2 - \frac{1}{2}\varepsilon^2\frac{a^2}{\ell^2}p_x p_y + \varepsilon\left(\frac{1}{2}p_y^2 - \cos y\right) + \varepsilon^3 F_3(p_x, p_y, x, y, \varepsilon) \tag{3.4}$$

где введено обозначение

$$A_0 = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{9}{32}\varepsilon^2\frac{a^4}{\ell^4} \tag{3.5}$$

Структуру функции Гамильтона (3.4) можно упростить, если сделать унивалентное каноническое преобразование $x, y, p_x, p_y \to w_0, q, I_0, p$ по формулам

$$x = w_0 - \frac{1}{2}\varepsilon\frac{a^2}{\ell^2}q, \quad y = q, \quad p_x = I_0, \quad p_y = p + \frac{1}{2}\varepsilon\frac{a^2}{\ell^2}I_0 \tag{3.6}$$

Преобразование (3.6) уничтожает в функции (3.4) второе слагаемое, и в новых переменных уравнения движения задаются функцией Гамильтона

$$F = \frac{1}{2}A_0 I_0^2 + \varepsilon\left(\frac{1}{2}p^2 - \cos q\right) + \varepsilon^3 A_3(I_0, p, w_0, q, \varepsilon), \quad A_3 = F_3 - \frac{1}{8}\frac{a^4}{\ell^4}I_0^2 \tag{3.7}$$

Здесь F_3 – функция из (3.4), в которой сделана замена (3.6).

Еще большего упрощения можно добиться, приняв в качестве независимой переменной величину $\tau_* = A_0\tau$. Это приводит к делению функции Гамильтона (3.7) на A_0.

Если еще вместо ε ввести новый малый параметр μ по формуле $\mu = \varepsilon/A_0$, то вместо функции F из (3.7) получим функцию H вида

$$H = H^{(0)}(I_0) + \mu H^{(1)}(p,q) + \mu^3 H^{(3)}(I_0, p, w_0, q, \mu) \tag{3.8}$$

$$H^{(0)} = \frac{1}{2}I_0^2, \quad H^{(1)} = \frac{1}{2}p^2 - \cos q \tag{3.9}$$

4. Анализ системы с функцией Гамильтона (3.8). В приближенной системе с функцией $H^{(0)} + \mu H^{(1)}$ переменная I_0 постоянна, а угловая координата w_0 равномерно меняется со временем. Переменные же q, p отвечают движению математического маятника. Будем предполагать, что реализуется колебательный режим его движения. Амплитуду колебаний обозначим через $q_{\max}$ $(0 < q_{\max} < \pi/2)$. Для описания колебаний введем переменные действие-угол I, w. Переменная I вычисляется [11] по формуле

$$I = \frac{8}{\pi}[E(k) - (1-k^2)K(k)] \tag{4.1}$$

Здесь и далее используются общепринятые обозначения для эллиптических интегралов и функций. В (4.1) $k = \sin(q_{\max}/2)$ $(0 < k^2 < 1/2)$.

Каноническое преобразование $q, p \to w, I$ задается формулами [11]:

$$q = 2\arcsin(k\,\mathrm{sn}(u,k)), \quad p = 2k\,\mathrm{cn}(u,k), \quad u = (2K(k)/\pi)w \tag{4.2}$$

в которых $k = k(I)$ – функция, обратная функции (4.1).

Функцию Гамильтона (3.8) можно теперь записать в виде

$$H = H^{(0)}(I_0) + \mu H^{(1)}(I) + \mu^3 H^{(3)}(I_0, p, w_0, q, \mu) \tag{4.3}$$

Здесь функция $H^{(1)} = -1 + 2k^2(I)$, она представима сходящимся рядом по степеням I. Переменные p и q в функции $H^{(3)}$должны быть заменены по формулам (4.2).

Функция (4.3) аналитична по всем своим аргументам и 2π – периодична по w_0 и w. При этом имеет место случай собственного вырождения [1], так как при $\mu = 0$ в системе есть только одна отличная от нуля частота:

$$\frac{\partial H^{(0)}}{\partial I_0} = I_0 \neq 0 \tag{4.4}$$

Для производных функции $H^{(1)}$ из (4.3) справедливы неравенства

$$\frac{\partial H^{(1)}}{\partial I} \neq 0, \quad \frac{\partial^2 H^{(1)}}{\partial I^2} \neq 0 \tag{4.5}$$

Действительно,

$$\frac{\partial H^{(1)}}{\partial I} = \frac{\pi}{2K(k)} = 1 - \frac{1}{8}I - \frac{3}{256}I^2 - \frac{5}{2048}I^3 + O(I^4) > 0$$

$$\frac{\partial^2 H^{(1)}}{\partial I^2} = -\pi^2 \frac{E(k) - (1-k^2)K(k)}{16k^2(1-k^2)K^3(k)} = -\frac{1}{8} - \frac{3}{128}I - \frac{15}{2048}I^2 + O(I^3) < 0$$

Так как приближенная система с функцией Гамильтона $H^{(0)} + \mu H^{(1)}$ удовлетворяет условиям (4.4), (4.5), то [2] в полной системе с функцией Гамильтона (4.3) переменные действия I_0, I при всех значениях t остаются вблизи своих начальных значений и отличаются от них на величины порядка μ (или порядка ε, что одно и то же). При этом мера инвариантных торов приближенной системы, разрушающихся при учете возмущения $H^{(3)}$ в (4.3), имеет порядок $\exp(-c/\varepsilon)$ ($c > 0$ – const).

Основной результат анализа. Из сказанного следует, что при малых ε движение твердого тела, подвешенного на идеальной нити в однородном поле тяжести, устойчиво по отношению к возмущениям величин θ, $\dot\theta$, ψ. В частности, если начальные значения θ и $\dot\theta$ имеют, например, порядок $\varepsilon^{1-\sigma}$ $(0 < \sigma < 1)$, то θ и $\dot\theta$ при всех t остаются малыми того же порядка.

Замечание. В статье [12], посвященной динамике маятника Максвелла, утверждается, что “отклонение маятника от вертикали имеют конечный размах при соответствующих сколь угодно малых начальных значениях координат и скоростей нити. Причиной этой неустойчивости является достаточно быстрое переходное движение маятника при перемене его движения снизу вверх”. В приведенной в статье [12] попытке обоснования этого утверждения содержатся неточности, а само утверждение ошибочно.

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00116) в Московском авиационном институте (Национальном исследовательском университете) и в Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 414 с.
2. *Нейштадт А.И.* Оценки в теореме Колмогорова о сохранении условно-периодических движений // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 6. С. 1016–1025.
3. *Giacaglia G.E.O.* Perturbation Methods in Non-Linear Systems. N.Y.etc. Springer, 1972. = *Джакалья Г.Е.О.* Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 320 с.
4. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 328 с.
5. *Ишлинский А.Ю., Стороженко В.А., Темченко М.Е.* Вращение твердого тела на струне и смежные задачи. М.: Наука, 1991. 330 с.
6. *Ишлинский А.Ю., Стороженко В.А., Темченко М.Е.* Динамика быстровращающихся на струне тел и некоторые смежные вопросы (обзор) // Прикладная механика. 1994. Т. 30. № 8. С. 3–30.
7. *Мирер С.А., Сарычев В.А.* О стационарных движениях тела на струнном подвесе // Нелинейная механика: сб. статей. М.: Физматлит, 2001. С. 281–322.
8. *Маркеев А.П.* О периодических движениях твердого тела, подвешенного на нити в однородном поле тяжести // Вестник Удм. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29. Вып. 2. С. 245–260.
9. *Иванов А.П.* Об устойчивости перманентных вращений тела, подвешенного на струне, при наличии ударных взаимодействий // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 6. С. 47–50.
10. *Маркеев А.П.* Об устойчивости периодического движения стержня, подвешенного на идеальной нити // Изв. РАН. МТТ. 2007. № 4. С. 3–13.
11. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. Москва–Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2007. 592 с.
12. *Розенблат Г.М.* О неустойчивости движения маятника Максвелла // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 5. С. 59–67.