

УДК 534.015.1

АНАЛИЗ ДЕЙСТВИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ РЕЗОНАНСНЫХ СИСТЕМ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

© 2021 г. В. Ф. Журавлев^{a,*}, А. Г. Петров^{a,**}

^a Институт проблем механики, РАН им. А.Ю. Ишлинского, Москва, Россия

* e-mail: zhurav@ipmnet.ru

** e-mail: petrovipmech@gmail.com

Поступила в редакцию 12.03.2020 г.

После доработки 14.03.2020 г.

Принята к публикации 16.03.2020 г.

Рассматривается система с двумя степенями свободы в случае двухкратной собственной частоты. Невозмущенная система состоит из двух независимых осцилляторов. Координаты системы описывают эллиптическую траекторию с четырьмя элементами орбиты. Проводится анализ действия линейных возмущений (сил) на элементы орбиты. Возмущения подразделяются на шесть типов сил и для каждого типа сил получена система дифференциальных уравнений для элементов орбиты. Для всех шести типов сил найдено общее решение системы дифференциальных уравнений в элементарных функциях.

Ключевые слова: резонансные системы, две степени свободы, линейные возмущения, эволюции эллиптической траектории

DOI: 10.31857/S0572329921020185

Координаты системы с двумя степенями свободы в случае двухкратной собственной частоты изменяются по эллиптической траектории [1]. Под действием малых возмущающих сил эллиптическая траектория изменяется. Для описания изменений элементов эллиптической орбиты применяется система дифференциальных уравнений, полученная методом осреднения [2]. Прикладываемые к системе линейные по координатам и скоростям силы подразделяются на шесть типов. Три типа сил, зависящие от координат, называются позиционными силами, остальные три типа сил зависят от скоростей и называются скоростными силами [3, 4]. В [1, 3] показано, что к чистым эволюциям формы колебаний приводят четыре типа сил: силы первого типа приводят только к изменению частоты, второго и третьего типа — только к изменению полуосей эллипса и силы четвертого типа приводят к прецессии эллипса. Эти четыре типа сил удобны для решения задачи управления формой колебаний. Остальные два типа сил приводят сразу ко всем типам эволюции формы и разрушают ее. Разрушение формы для этих типов сил описывается нелинейной системой дифференциальных уравнений четвертого порядка. Данная статья посвящена интегрированию этих систем уравнений. В результате получено описание эволюции форм в элементарных функциях для любых начальных условий.

1. Постановка задачи. Рассмотрим, следуя [1], систему

$$\ddot{q}_i + q_i = \varepsilon Q_i(t, q, \dot{q}), \quad i = 1, 2 \quad (1.1)$$

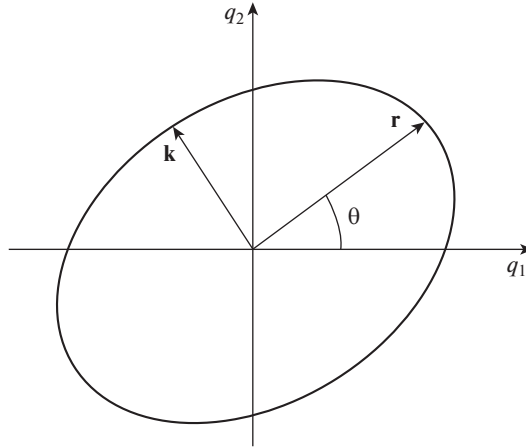


Рис. 1

Если $\varepsilon = 0$, то решение этой системы записывается в виде

$$\begin{aligned} q_1 &= r \cos(t + \tau) \cos \theta - k \sin(t + \tau) \sin \theta \\ q_2 &= r \cos(t + \tau) \sin \theta + k \sin(t + \tau) \cos \theta \\ p_1 &= \dot{q}_1 = -r \sin(t + \tau) \cos \theta - k \cos(t + \tau) \sin \theta \\ p_2 &= \dot{q}_2 = -r \sin(t + \tau) \sin \theta + k \cos(t + \tau) \cos \theta \end{aligned} \quad (1.2)$$

Постоянные интегрирования называются элементами орбиты. Их геометрический смысл ясен из рис. 1 (r и k — полуоси эллиптической траектории, параметр τ характеризует положение точки на эллипсе в начальный момент). Если правые части (1.1) ненулевые, то элементы орбиты становятся функциями времени. Чтобы получить уравнения, описывающие их изменение, нужно сделать в (1.1) замену переменных по формулам (1.2). Это приводит к следующим уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\varepsilon(Q_1 \cos \theta + Q_2 \sin \theta) \sin t, \quad \dot{k} = -\varepsilon(Q_1 \sin \theta - Q_2 \cos \theta) \cos t \\ \dot{\theta} &= \frac{\varepsilon}{r^2 - k^2} [k(Q_1 \cos \theta + Q_2 \sin \theta) \cos t + r(Q_1 \sin \theta - Q_2 \cos \theta) \sin t] \\ \dot{\tau} &= -\frac{\varepsilon}{r^2 - k^2} [r(Q_1 \cos \theta + Q_2 \sin \theta) \cos t + k(Q_1 \sin \theta - Q_2 \cos \theta) \sin t] \end{aligned}$$

Осредненная по периоду автономная система уравнений для элементов орбиты имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\varepsilon(Q_{12} \cos \theta + Q_{22} \sin \theta), \quad \dot{k} = -\varepsilon(Q_{11} \sin \theta - Q_{21} \cos \theta) \\ \dot{\theta} &= \frac{\varepsilon}{r^2 - k^2} [k(Q_{11} \cos \theta + Q_{21} \sin \theta) + r(Q_{12} \sin \theta - Q_{22} \cos \theta)] \\ \dot{\tau} &= -\frac{\varepsilon}{r^2 - k^2} [r(Q_{11} \cos \theta + Q_{21} \sin \theta) + k(Q_{12} \sin \theta - Q_{22} \cos \theta)] \\ Q_{11} &= \overline{Q_1 \cos t}, \quad Q_{12} = \overline{Q_1 \sin t}, \quad Q_{21} = \overline{Q_2 \cos t}, \quad Q_{22} = \overline{Q_2 \sin t} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь черта сверху означает знак осреднения по явному времени

$$\bar{f} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt$$

Аналогичная система уравнений была получена в [2].

2. Анализ действия возмущений в линейном случае. Естественно начать анализ с линейных по координатам q_1, q_2 и скоростям $\dot{q}_1, \dot{q}_2$ сил Q_1, Q_2

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix}$$

Произвольные матрицы позиционных сил P и скоростных сил R единственным образом разлагаются на симметрическую и кососимметрическую части. В свою очередь, симметрические части этих матриц могут быть единственным образом разложены на скалярную матрицу и на матрицу с нулевым следом. В результате получаем для матриц P и R следующие представления:

$$P = C + H + N, \quad R = D + G + \Gamma$$

$$C = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad H = h \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad G = g \begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{pmatrix}$$

Полученные шесть типов сил Q имеют следующие наименования: Cq — потенциальные силы сферического типа; Hq — потенциальные силы гиперболического типа; Nq — в литературе встречается несколько названий для этих сил: циркулярные силы, псевдогирокоскопические, собственно неконсервативные силы, силы радиальной коррекции; $D\dot{q}$ — диссипативные силы сферического типа, если $d < 0$; $G\dot{q}$ — скоростные силы гиперболического типа; $\Gamma\dot{q}$ — гироскопические силы. Симметрические матрицы H и G , имеющие нулевой след, называются девиаторами.

Коэффициенты h и g определяют нормы девиаторов гиперболических сил, а углы α и β ориентацию главных осей жесткости и демпфирования относительно осей q_1 и q_2 .

При подстановке соответствующих сил в уравнения (1.3) и последующего осреднения получим шесть систем уравнений для параметров орбиты.

Рассмотрим более подробно эту процедуру на примере потенциальной силы.

Для невозмущенной системы (1.1) имеем решение (1.2)

$$q_1 = r \cos t \cos \theta - k \sin t \sin \theta, \quad q_2 = r \cos t \sin \theta + k \sin t \cos \theta$$

Находим компоненты потенциальных сил на невозмущенном решении $Q_1 = cq_1$, $Q_2 = cq_2$ и осредненные по периоду выражения

$$Q_{11} = \frac{1}{2} cr \cos \theta, \quad Q_{12} = -\frac{1}{2} ck \sin \theta$$

$$Q_{21} = \frac{1}{2} cr \sin \theta, \quad Q_{22} = \frac{1}{2} ck \cos \theta$$

Подставляя эти выражения в уравнения (1.2), получим следующие осредненные уравнения для элементов орбиты $\dot{r} = 0$, $\dot{k} = 0$, $\dot{\theta} = 0$, $\dot{t} = -(1/2)c\epsilon$.

С помощью найденных значений и (1.2) находим решение

$$q_1 = r \cos(1 - (1/2)c\epsilon)t, \quad q_2 = k \sin(1 - (1/2)c\epsilon)t$$

Для всех остальных случаев скорости изменений параметров орбиты находятся аналогично. Результаты представлены в таблице.

Из приведенной таблицы следует, что к чистым эволюциям формы колебаний приводят четыре типа сил из шести.

1. Потенциальные силы сферического типа Cq приводят только к изменению частоты $1 \rightarrow 1 - (1/2)\epsilon\epsilon$.

2. Циркулярные силы Nq приводят только к изменению осей эллипса

$$r = r_0 \operatorname{ch}(n\epsilon t/2) - k_0 \operatorname{sh}(n\epsilon t/2), \quad k = k_0 \operatorname{ch}(n\epsilon t/2) - r_0 \operatorname{sh}(n\epsilon t/2)$$

3. Диссипативные (или ускоряющие) силы $D\dot{q}$ также приводят только к изменению осей эллипса

$$r = r_0 e^{d\epsilon t/2}, \quad k = k_0 e^{d\epsilon t/2}$$

4. Гироскопические силы приводят только к прецессии формы колебаний $\theta = \theta_0 + \frac{1}{2}(k^2 - r^2)\gamma\epsilon t$

Если возникает задача управления формой колебаний, то именно эти силы и следует выбирать для управления соответствующими эволюциями формы. Все эти результаты приведены в [1].

Гиперболические силы Hq и $G\dot{q}$ в общем случае приводят сразу ко всем типам эволюции формы. Эти случаи описываются достаточно сложной системой дифференциальных уравнений, но их тоже можно точно проинтегрировать. В этом и состоит цель данного исследования.

3. Эволюция системы под действием сил Hq . Систему уравнений под действием Hq можно записать в комплексной форме

$$\begin{aligned} \dot{r} + i\dot{k} &= -\frac{1}{2}i\epsilon h \sin 2(\theta - \alpha)(r + ik) \\ \dot{\theta} &= -\frac{1}{2}\epsilon h \frac{kr}{k^2 - r^2} \cos 2(\theta - \alpha), \quad \dot{\tau} = \frac{1}{2}\epsilon h \frac{r^2 + k^2}{k^2 - r^2} \cos 2(\theta - \alpha) \end{aligned} \quad (3.1)$$

От переменных r, k, θ перейдем к новым переменным ρ, Φ, Θ с помощью замен

$$r + ik = \rho e^{i\Phi/2}, \quad \Theta = 2(\theta - \alpha), \quad t' = \epsilon h t.$$

Отсюда следуют соотношения

$$\frac{d\rho}{dt'} + \frac{1}{2}i\rho \frac{d\Phi}{dt'} = -\frac{1}{2}\rho i \sin \Theta, \quad \operatorname{tg} \Phi = \frac{2rk}{r^2 - k^2}, \quad \frac{r^2 + k^2}{k^2 - r^2} = -\frac{1}{\cos \Phi}$$

с помощью которых система уравнений (4) в новых переменных принимает вид

$$\S \frac{d\rho}{dt'} = 0, \quad \frac{d\Phi}{dt'} = -\sin \Theta, \quad \frac{d\Theta}{dt'} = \operatorname{tg} \Phi \cos \Theta, \quad 2\frac{d\tau}{dt'} = -\frac{\cos \Theta}{\cos \Phi} \quad (3.2)$$

Система уравнений имеет два интеграла

$$\rho = \sqrt{r_0^2 + k_0^2}, \quad \cos \Phi \cos \Theta = \cos \Phi_0 \cos \Theta_0 \quad (3.3)$$

где индексом "0" обозначены начальные значения соответствующих переменных. Из соотношений для переменных r, k

$$r^2 + k^2 = r_0^2 + k_0^2, \quad r^2 - k^2 = (r_0^2 + k_0^2) \cos \Phi, \quad 2rk = (r_0^2 + k_0^2) \sin \Phi$$

выражаем r и k через Φ

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{2} \sqrt{r_0^2 + k_0^2} (\sqrt{1 + \sin \Phi} + \sqrt{1 - \sin \Phi}) \\ k &= \frac{1}{2} \sqrt{r_0^2 + k_0^2} (\sqrt{1 + \sin \Phi} - \sqrt{1 - \sin \Phi}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Зависимость от времени $\Phi(t')$ можно найти из уравнения $d^2 \sin \Phi / dt'^2 + \sin \Phi = 0$, которое получается так. Преобразуем вторую производную $\sin \Phi$ с помощью уравнений (3.2) и интеграла (3.3).

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \sin \Phi}{dt'^2} &= \frac{d}{dt'} (\cos \Phi (-\sin \Theta)) = -\cos \Phi_0 \cos \Theta_0 \frac{d}{dt'} \text{tg } \Theta = \\ &= -\frac{\cos \Phi \cos \Theta}{\cos^2 \Theta} \text{tg } \Phi \cos \Theta = -\sin \Phi \end{aligned}$$

Решение этого уравнения имеет вид $\sin \Phi = a \cos t' + b \sin t'$. Выразив постоянные a и b через начальные данные, получим

$$\begin{aligned} \sin \Phi &= \sin \Phi_0 \cos t' - \cos \Phi_0 \sin \Theta_0 \sin t' \\ \sin \Phi_0 &= \frac{2r_0 k_0}{r_0^2 + k_0^2}, \quad \cos \Phi_0 = \frac{r_0^2 - k_0^2}{r_0^2 + k_0^2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Из уравнения (3.2) для τ с помощью (3.3) найдем

$$\tau = -\frac{1}{2} \int \frac{\cos \Theta_0 \cos \Phi_0}{1 - \sin^2 \Phi} dt'$$

После подстановки выражения (3.5) интеграл вычисляется

$$\tau = -\frac{1}{2} \arctg \left[\frac{(\sin \Phi_0)^2 + (\cos \Theta_0)^2 (\cos \Phi_0)^2}{\cos \Theta_0 \cos \Phi_0} \text{tg } t' + \sin \Phi_0 \text{tg } \Theta_0 \right] \quad (3.6)$$

Таким образом, найдены все зависимости от времени $t' = \varepsilon h t$: зависимости $\Phi(t')$ и $\Theta(t')$ находятся по (3.5) и (3.3) соответственно, зависимости $r(t')$ и $k(t')$ находятся подстановкой (3.5) в (3.4) и зависимость $\tau(t')$ находится по формуле (3.6).

Функцию $\tau(t')$ удобно выразить через функцию $T(t')$ так: $\tau(t') = \frac{1}{2} t' \sigma + T(t')$, где $\sigma = \text{sign}[\cos \Theta_0 \cos \Phi_0]$, а функция $T(t')$ имеет период равный π .

Все параметры орбиты претерпевают весьма сложное изменение, но через каждый период повторяются. Для функций r и k период равен $2\pi/(\varepsilon h)$, а для Θ и T период в два раза меньше.

На рис. 2 изображены графики функций $T(t') - 1$, $k(t') - 2$, $\cos \Theta(t') - 3$ при $\Phi_0 = 1$, $\Theta_0 = 0.5$. Они обозначены цифрами 1, 2 и 3 соответственно.

Отдельно рассмотрим вырожденный случай $\Theta = \pi/2$, $\tau = \tau_0$, $\Phi = \Phi_0 - t'$,

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{2} \sqrt{r_0^2 + k_0^2} (\sqrt{1 + \sin(\Phi_0 - t')} + \sqrt{1 - \sin(\Phi_0 - t')}) \\ k &= \frac{1}{2} \sqrt{r_0^2 + k_0^2} (\sqrt{1 + \sin(\Phi_0 - t')} - \sqrt{1 - \sin(\Phi_0 - t')}) \end{aligned}$$

Начальное значение Φ_0 находится из уравнений $\cos \Phi_0 = \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + k_0^2}}$, $\sin \Phi_0 = \frac{k_0}{\sqrt{r_0^2 + k_0^2}}$.

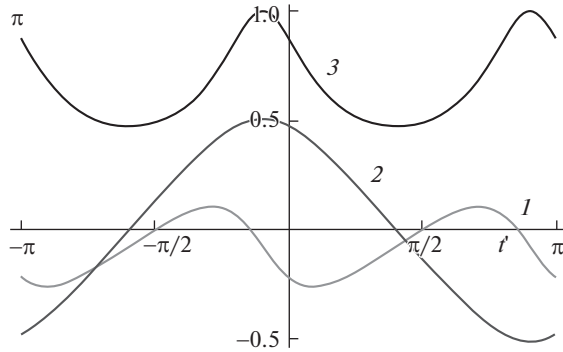


Рис. 2

4. Эволюция системы под действием сил $G\dot{q}$. Систему уравнений можно записать в комплексной форме

$$\begin{aligned} \dot{r} + i\dot{k} &= \frac{1}{2}\varepsilon g \cos 2(\theta - \beta)(r - ik) \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{2}\varepsilon g \frac{r^2 + k^2}{k^2 - r^2} \sin 2(\theta - \beta), \quad \dot{\tau} = -\varepsilon g \frac{rk}{k^2 - r^2} \sin 2(\theta - \beta) \end{aligned} \quad (4.1)$$

От переменных r, k, θ перейдем к новым переменным ρ, Φ, Θ с помощью замен

$$r + ik = \rho e^{i\Phi/2}, \quad \Theta = 2(\theta - \beta), \quad t' = \varepsilon g t \quad (4.2)$$

Отсюда следуют соотношения

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt'} + \frac{1}{2}i\rho \frac{d\Phi}{dt'} &= \frac{1}{2}\rho \cos \Theta e^{-i\Phi} \\ \operatorname{tg} \Phi &= \frac{2rk}{r^2 - k^2}, \quad \frac{r^2 + k^2}{r^2 - k^2} = \frac{1}{\cos \Phi} \\ r &= \rho \cos(\Phi/2), \quad k = \rho \sin(\Phi/2) \end{aligned} \quad (4.3)$$

с помощью которых система уравнений (3.1) в новых переменных принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt'} &= \frac{1}{2}\rho \cos \Theta \cos \Phi, \quad \frac{d\Phi}{dt'} = -\cos \Theta \sin \Phi \\ \frac{d\Theta}{dt'} &= -\frac{\sin \Theta}{\cos \Phi}, \quad 2\frac{d\tau}{dt'} = \sin \Theta \operatorname{tg} \Phi \\ \frac{dr}{dt'} &= \frac{1}{2}r \cos \Theta, \quad \frac{dk}{dt'} = -\frac{1}{2}k \cos \Theta \end{aligned} \quad (4.4)$$

Безразмерное время t' меняется в пределах $(0, \infty)$ при $g > 0$ и $(0, -\infty)$ при $g < 0$.

Система уравнений (4.4) имеет интегралы

$$rk = r_0 k_0 \Rightarrow \rho^2 \sin \Phi = \rho_0^2 \sin \Phi_0, \quad \sin \Theta \operatorname{tg} \Phi = \sin \Theta_0 \operatorname{tg} \Phi_0 \quad (4.5)$$

где индексом “0” обозначены начальные значения соответствующих функций.

С помощью последнего интеграла можно в уравнении для Φ исключить Θ

$$\frac{d \sin \Phi}{dt'} = -\sin \Phi \cos \Phi \cos \Theta = -\sigma \sin \Phi \sqrt{1 - s^2 \sin^2 \Phi}$$

$$s = \sqrt{1 + (\sin \Theta_0 \operatorname{ctg} \Phi_0)^2}, \quad \sigma = \operatorname{sign}(\cos \Phi_0 \cos \Theta_0)$$

Общее решение этого уравнения

$$\sin \Phi = \pm (\operatorname{sch}(t' \pm t_0))^{-1} \quad (4.6)$$

Из начального условия получаем уравнение $\sin \Phi_0 = (s \operatorname{ch}(\sigma t_0))^{-1}$. Из него находится положительное значение постоянной t_0 . Знаки в решении (4.6) выбираются так. Первый знак должен совпадать со знаком $\sin \Phi_0$. Знак при t_0 положителен, если производная функции $(\sin \Phi(t'))^2$ при $t' = 0$ отрицательна, в противном случае знак отрицательный. Знак производной функции $(\sin \Phi(t'))^2$ совпадает со знаком числа $-\cos \Phi_0 \cos \Theta_0$. С учетом выбора знаков решение (4.6) можно представить в виде

$$\sin \Phi = \operatorname{sign}(\sin \Phi_0) [s \operatorname{ch}(t' + \operatorname{sign}(\cos \Phi_0 \cos \Theta_0) t_0)]^{-1} \quad (4.7)$$

Если знак $\operatorname{sign}(\cos \Phi_0 \cos \Theta_0) = -1$ отрицателен и $g > 0$, то все функции меняются не монотонно, достигая следующих максимальных значений в точке $t = t_0$

$$\sin \Phi(t_0) = 1/s, \quad \sin \Theta_0 = 1,$$

$$r(t_0) = \sqrt{\frac{r_0 k_0}{s + \sqrt{s^2 - 1}}}, \quad 2\tau'(t_0) = \frac{\operatorname{sign}(\sin \Theta_0 \operatorname{ctg} \Phi_0)}{\sqrt{s^2 - 1}} \quad (4.8)$$

Через функцию $\sin \Phi$ выражаются все элементы орбиты. Из интегралов (4.5) находим

$$\rho = \rho_0 \sqrt{\sin \Phi_0 / \sin \Phi}, \quad \sin \Theta = \sin \Theta_0 \operatorname{ctg} \Phi_0 \operatorname{tg} \Phi$$

Переменные r и k находим из (4.3)

$$k = \sqrt{r_0 k_0 |\operatorname{tg}(\Phi/2)|}, \quad r = \sqrt{r_0 k_0 |\operatorname{ctg}(\Phi/2)|}$$

которые можно выразить через функцию времени $\sin \Phi$, определяемой по (4.7)

$$k = \frac{\sqrt{r_0 k_0 |\sin \Phi|}}{\sqrt{1 + \cos \Phi}} = \frac{\sqrt{r_0 k_0 |\sin \Phi|}}{\sqrt{1 - \cos \Phi}}$$

$$r = \frac{\sqrt{r_0 k_0 (1 - \cos \Phi)}}{|\sin \Phi|} = \frac{\sqrt{r_0 k_0 (1 + \cos \Phi)}}{|\sin \Phi|}$$

Из этого решения следует, что площадь эллиптической орбиты сохраняется, эллипс вытягивается в бесконечную прямую, а угол наклона к оси x большей полуоси эллиптической орбиты r стремится к нулю.

Уравнение для τ также интегрируется, откуда находится

$$2\tau = \frac{\operatorname{tg} \Phi_0}{\sin \Theta_0} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} \Phi_0}{\sin \Theta_0} \operatorname{th}(t' \pm t_0) \right)$$

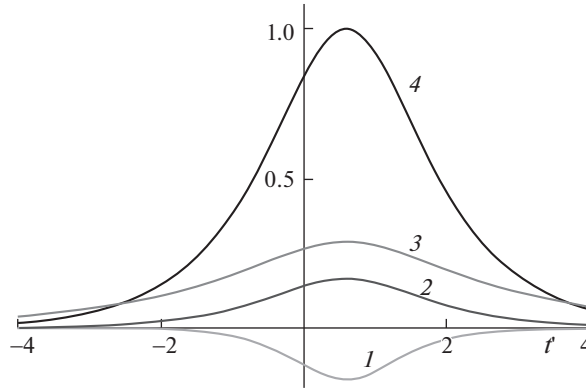


Рис. 3

На рис. 3 представлены графики зависимостей

$$2\tau'(t') = \sin \Theta(t') \operatorname{tg} \Phi(t'), \quad k(t'), \quad \sin \Theta(t'), \quad \sin \Phi(t')$$

при значениях параметров $\Theta_0 = 1$, $\Phi_0 = 3$. Они помечены цифрами 1, 2, 3, 4 соответственно.

При $g > 0$ функции меняются на отрезке $(0, \infty)$, а при $g < 0$ — на отрезке $(0, -\infty)$.

При $t = t_0 = 0.597$ они достигают экстремума.

Экстремальные значения, вычисленные по формулам (18) таковы

$$\sin \Phi(t_0) = 0.167, \quad \sin \Theta_0 = 1, \quad r(t_0) = 0.29, \quad 2\tau'(t_0) = -0.169$$

Как при положительном так и при отрицательном значениях g при $t \rightarrow \infty$ полуоси эллипса стремятся принять направления декартовых осей q_1 и q_2 , одна из осей стремится к нулю, а вторая растет до бесконечности. Площадь эллипса при этом сохраняется.

5. Заключение. К чистым эволюциям формы колебаний приводят четыре типа сил.

1. Потенциальные силы сферического типа Cq приводят только к изменению частоты $1 \rightarrow 1 - (1/2)\epsilon\epsilon$.

2. Циркулярные силы Nq приводят только к изменению осей эллипса

$$r = r_0 \operatorname{ch}(n\epsilon t/2) - k_0 \operatorname{sh}(n\epsilon t/2), \quad k = k_0 \operatorname{ch}(n\epsilon t/2) - r_0 \operatorname{sh}(n\epsilon t/2)$$

3. Диссипативные (или ускоряющие) силы $D\dot{q}$ также приводят только к изменению осей эллипса

$$r = r_0 e^{d\epsilon t/2}, \quad k = k_0 e^{d\epsilon t/2}$$

4. Гироскопические силы приводят только к прецессии формы колебаний $\theta = \theta_0 + \frac{1}{2}(k^2 - r^2)\gamma\epsilon t$.

Если возникает задача управления формой колебаний, то именно эти силы и следует выбирать для управления соответствующими эволюциями формы. Все эти результаты приведены в [1, 3, 4].

Гиперболические силы Hq и $G\dot{q}$ в общем случае описываются достаточно сложной нелинейной системой дифференциальных уравнений. Решение их в общем случае представлено в элементарных функциях. Для сил Hq функция $\sin \Phi$ меняется по гармоническому закону и через нее выражены все элементы орбиты: полуоси эллипса по

Таблица 1

	Cq	Hq	Nq	$D\dot{q}$	$G\dot{q}$	$\Gamma\dot{q}$
$\dot{r}$	0	$\frac{1}{2}hk\epsilon \sin(2(\theta - \alpha))$	$-\frac{kn\epsilon}{2}$	$\frac{dr\epsilon}{2}$	$\frac{1}{2}gr\epsilon \cos(2(\theta - \beta))$	0
$\dot{k}$	0	$-\frac{1}{2}hr\epsilon \sin(2(\theta - \alpha))$	$-\frac{rn\epsilon}{2}$	$\frac{dk\epsilon}{2}$	$-\frac{1}{2}gk\epsilon \cos(2(\theta - \beta))$	0
$\dot{\theta}$	0	$-hkr\epsilon \frac{\cos(2(\theta - \alpha))}{k^2 - r^2}$	0	0	$\frac{1}{2}g\epsilon \frac{k^2 + r^2}{k^2 - r^2} \sin(2(\theta - \beta))$	$-\frac{1}{2}\gamma\epsilon$
$\dot{\tau}$	$-\frac{1}{2}c\epsilon$	$\frac{1}{2}h\epsilon \frac{r^2 + k^2}{k^2 - r^2} \cos(2(\theta - \alpha))$	0	0	$-\frac{gkr}{k^2 - r^2} \epsilon \sin(2(\theta - \beta))$	0

формулам (3.4), его площадь меняется по гармоническому закону $2rk = (r_0^2 + k_0^2)\sin\Phi$, угол прецессии θ выражается через функцию Φ по формулам $\Theta = 2(\theta - \alpha)$, $\cos\Phi\cos\Theta = \cos\Phi_0\cos\Theta_0$. Все элементы орбиты меняются по периодическому закону с периодом $2\pi/(\epsilon h)$.

Из решения задачи о движении системы под действием силы Gq следует, что площадь эллиптической орбиты сохраняется, эллипс вытягивается в бесконечную прямую, а угол наклона к оси q большей полуоси эллиптической орбиты r стремится к нулю.

Работа выполнена в рамках госзадания (номер госрегистрации АААА-А20-120011690138-6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Журавлев В.Ф. Управляемый маятник Фуко как модель одного класса свободных гироскопов // МТТ. 1997. Вып 6. С. 27–35.
2. Friedland B., Hulton M.F. Theory and error analysis of vibrating-member gyroscope // IEEE Trans. on Autom. Contr. 1978. V. 23. № 4. Р. 545–556.
3. Климов Д.М., Журавлев В.Ф., Жбанов Ю.К. Кварцевый полусферический резонатор (Волновой твердотельный гироскоп). М.: Изд-во “Ким Л.А.” 2017. 194 с.
4. Журавлев В.Ф., Петров А.Г., Шундерюк М.М. Избранные задачи гамильтоновой механики. М.: ЛЕНАНД, 2015. 304 с.