ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 2, с. 88–97

УДК 531.8

УРАВНЕНИЕ ТРОГАНИЯ ПОЕЗДА

© 2021 г. И. П. Попов

Курганский государственный университет, Курган, Россия
e-mail: ip.popow@yandex.ru

Поступила в редакцию 11.11.2019 г.
После доработки 18.11.2019 г.
Принята к публикации 20.11.2019 г.

Показано, что трогание состава с упругими сцепками значительно легче, чем недеформируемого. При этом, чем больше число вагонов, тем больше преимущество первого над вторым.

Ключевые слова: поезд, трогание, сцепки, трение, перемещение, скорость

DOI: 10.31857/S0572329921020148

Введение. Сила трения покоя значительно превосходит силу трения движения. Это приводит к тому, что режим трогания для наземного транспортного средства является наиболее тяжелым. Для поездов этот режим представляет настолько серьезную проблему, что иногда приходится принимать специальные меры, такие как использование песка в зоне контакта бандажа колеса с рельсом или вспомогательного локомотива.

Эффективным способом трогания поезда является выбор зазоров в сцепках. При этом вагоны приводятся в движение последовательно и инертная масса непосредственно в момент трогания минимальна [1].

Этот способ, однако, имеет два существенных недостатка — малую фиксированную величину зазоров в сцепках, что ограничивает эффективность способа и ударный характер передачи импульса, что отрицательно сказывается на состоянии конструктивных элементов поезда.

Указанных недостатков можно избежать, если использовать упруго деформируемые сцепки.

Целью работы является построение математической модели “легкого” трогания поезда с упругими сцепками.

Расчет механической системы в составе массивных локомотива, вагонов и упругих сцепок является достаточно громоздким. Для его минимизации принимаются следующие допущения: сила F, развиваемая локомотивом, — величина постоянная; массы локомотива и вагонов равны между собой и составляют m.

1. Локомотив и один вагон. Уравнение сил, приложенных к локомотиву, имеет вид:

$$F = m\frac{d^2x_1}{dt^2} + k(x_1 - x_2) \tag{1.1}$$

где x_1, x_2 — перемещение, соответственно, локомотива и вагона, k — коэффициент упругости сцепки.

Силы, приложенные к вагону, удовлетворяют уравнению:

$$0 = m\frac{d^2x_2}{dt^2} - k(x_1 - x_2)$$

Из последнего уравнения следует

$$x_1 = \frac{m}{k}\frac{d^2x_2}{dt^2} + x_2 \tag{1.2}$$

Подстановка этого выражения в (1.1) дает

$$F = \frac{m^2}{k}\frac{d^4x_2}{dt^2} + m\frac{d^2x_2}{dt^2} + m\frac{d^2x_2}{dt^2} + kx_2 - kx_2 = \frac{m^2}{k}\frac{d^4x_2}{dt^2} + 2m\frac{d^2x_2}{dt^2} \tag{1.3}$$

$$\text{Пусть } d^2x_2\Big/dt^2 = z \tag{1.4}$$

Тогда (1.3) запишется в виде

$$z'' + 2\frac{k}{m}z = \frac{kF}{m^2} \tag{1.5}$$

Характеристическое уравнение

$$r^2 + 2\frac{k}{m} = 0$$

Его корни равны

$$r_{1,2} = \pm i\sqrt{2\frac{k}{m}}$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения

$$z_1 = C_1\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t + C_2\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t$$

Частное решение в соответствии с (1.5) имеет вид

$$z_2 = A$$

Подстановка его в (1.5) дает

$$2\frac{k}{m}A = \frac{kF}{m^2}$$

откуда

$$A = \frac{F}{2m}$$

Общее решение уравнения (1.5) находится как

$$z = z_1 + z_2 = C_1\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t + C_2\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t + \frac{F}{2m}$$

В момент времени $t = 0$ сцепка не деформирована, следовательно, на вагон сила не действует и величина (1.4) равна нулю. Поэтому для $t = 0$ последнее выражение примет вид:

$$z(0) = 0 = C_1\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}0 + C_2\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}0 + \frac{F}{2m}$$

откуда

$$C_1 = -\frac{F}{2m}$$

С учетом этого

$$z = -\frac{F}{2m}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t + C_2\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t + \frac{F}{2m} \tag{1.6}$$

В соответствии с (1.4)

$$v_2 = \int z dt = -\frac{F}{2m}\sqrt{\frac{m}{2k}}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t - C_2\sqrt{\frac{m}{2k}}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t + \frac{F}{2m}t + C_3$$

$$x_2 = \int v_2 dt = \frac{F}{4k}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t - C_2\frac{m}{2k}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t + \frac{F}{4m}t^2 + C_3 t + C_4 \tag{1.7}$$

С учетом (1.2), (1.4), (1.6) и (1.7)

$$x_1 = -\frac{F}{2k}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t + C_2\frac{m}{k}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t + \frac{F}{2k} + \frac{F}{4k}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t -$$
$$-C_2\frac{m}{2k}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t + \frac{F}{4m}t^2 + C_3 t + C_4$$

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{F}{2k}\sqrt{2\frac{k}{m}}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t + C_2\sqrt{2\frac{k}{m}}\frac{m}{k}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t -$$
$$-\frac{F}{4k}\sqrt{2\frac{k}{m}}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t - C_2\sqrt{2\frac{k}{m}}\frac{m}{2k}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t + \frac{F}{2m}t + C_3$$

$$a_1 = \frac{dv_1}{dt} = \frac{F}{2k}2\frac{k}{m}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t - C_2 2\frac{k}{m}\frac{m}{k}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t -$$
$$-\frac{F}{4k}2\frac{k}{m}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t + C_2 2\frac{k}{m}\frac{m}{2k}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t + \frac{F}{2m}$$

$$x_2(0) = 0 = \frac{F}{4k}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}0 - C_2\frac{m}{2k}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}0 + \frac{F}{4m}0^2 + C_3 0 + C_4$$

$$\frac{F}{4k} + C_4 = 0$$

$$C_4 = -\frac{F}{4k}$$

$$v_2(0) = 0 = -C_2\sqrt{\frac{m}{2k}} + C_3$$

$$v_1(0) = 0 = C_2\sqrt{2\frac{k}{m}}\frac{m}{k} - C_2\sqrt{2\frac{k}{m}}\frac{m}{2k} + C_3 = C_2\sqrt{2\frac{k}{m}}\frac{m}{2k} + C_3$$

$$\left.\begin{aligned} -C_2\sqrt{\frac{m}{2k}} + C_3 = 0 \\ C_2\sqrt{\frac{m}{2k}} + C_3 = 0 \end{aligned}\right. \Rightarrow C_2 = 0, \quad C_3 = 0$$

Окончательное решение:

$$x_1 = -\frac{F}{4k}\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}t + \frac{F}{4m}t^2 + \frac{F}{4k}$$

$$x_2 = \frac{F}{4k}\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}t + \frac{F}{4m}t^2 - \frac{F}{4k}$$

$$v_1 = \frac{F}{2\sqrt{2km}}\sin\sqrt{\frac{2k}{m}}t + \frac{F}{2m}t$$

$$v_2 = -\frac{F}{2\sqrt{2km}}\sin\sqrt{\frac{2k}{m}}t + \frac{F}{2m}t$$

$$a_1 = \frac{F}{2m}\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}t + \frac{F}{2m}$$

$$a_2 = -\frac{F}{2m}\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}t + \frac{F}{2m}$$

Характерный отрезок времени τ_2 (индекс “$_2$” означает количество составных частей поезда) для рассматриваемого случая определяется из условия максимального растяжения упругой сцепки. При этом

$$a_1(\tau_2) - \frac{F}{2m} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{F}{2m}\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}\tau_2 = 0$$

$$\sqrt{2\frac{k}{m}}\tau_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$\tau_2 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}}$$

За время τ_2 локомотив пройдет расстояние

$$x_1(\tau_2) = -\frac{F}{4k}\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}} + \frac{F}{4m}\frac{\pi^2}{4}\frac{m}{2k} + \frac{F}{4k} = \frac{F\pi^2}{32k} + \frac{F}{4k}$$

и разовьет скорость

$$v_1(\tau_2) = \frac{F}{2\sqrt{2km}}\sin\sqrt{\frac{2k}{m}}\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}} + \frac{F}{2m}\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}} = \frac{F}{2\sqrt{2km}} + \frac{F\pi}{4\sqrt{2km}}$$

Уместно сравнить эти показатели с соответствующими величинами для недеформируемого состава.

$$a = \frac{F}{2m}, \quad v = \frac{F}{2m}t, \quad x = \frac{F}{4m}t^2$$

$$x(\tau_2) = \frac{F}{4m}\frac{\pi^2}{4}\frac{m}{2k} = \frac{F\pi^2}{32k}$$

$$v(\tau_2) = \frac{F}{2m}\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}} = \frac{F\pi}{4\sqrt{2km}}$$

$$\frac{x_1(\tau_2)}{x(\tau_2)} = \frac{F\pi^2\big/(32k) + F\big/(4k)}{F\pi^2\big/(32k)} = 1 + \frac{32}{4\pi^2} \approx 1.81$$

$$\frac{v_1(\tau_2)}{v(\tau_2)} = \frac{F\big/(2\sqrt{2km}) + F\pi\big/(4\sqrt{2km})}{F\pi\big/(4\sqrt{2km})} = 1 + \frac{2}{\pi} \approx 1.64$$

Отношение для кинетических энергий локомотива составляет

$$\frac{E_1(\tau_2)}{E(\tau_2)} = 2.69$$

Полученные соотношения наглядно демонстрируют, что трогание состава с упругими сцепками значительно легче, чем недеформируемого.

2. Локомотив и два вагона. Уравнения сил, приложенных, соответственно, к локомотиву и вагонам, имеют вид:

$$F = m\frac{d^2x_1}{dt^2} + k(x_1 - x_2) \tag{2.1}$$

$$k(x_1 - x_2) = m\frac{d^2x_2}{dt^2} + k(x_2 - x_3) \tag{2.2}$$

$$k(x_2 - x_3) = m\frac{d^2x_3}{dt^2}$$

Из последнего уравнения следует

$$x_2 = \frac{m}{k}\frac{d^2x_3}{dt^2} + x_3 \tag{2.3}$$

Производная этого выражения равна

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{m}{k}\frac{d^4x_3}{dt^4} + \frac{d^2x_3}{dt^2}$$

Подстановка последних двух выражений в (2.2) дает

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{m}{k}\frac{d^2x_2}{dt^2} + 2x_2 - x_3 = \frac{m^2}{k^2}\frac{d^4x_3}{dt^4} + \frac{m}{k}\frac{d^2x_3}{dt^2} + 2\frac{m}{k}\frac{d^2x_3}{dt^2} + 2x_3 - x_3 = \\ &= \frac{m^2}{k^2}\frac{d^4x_3}{dt^4} + 3\frac{m}{k}\frac{d^2x_3}{dt^2} + x_3 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Производная этого выражения равна

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{m^2}{k^2}\frac{d^6x_3}{dt^6} + 3\frac{m}{k}\frac{d^4x_3}{dt^4} + \frac{d^2x_3}{dt^2}$$

Подстановка полученных выражений в (2.1) дает

$$\begin{aligned} \frac{F}{k} &= \frac{m^3}{k^3}\frac{d^6x_3}{dt^6} + 3\frac{m^2}{k^2}\frac{d^4x_3}{dt^4} + \frac{m}{k}\frac{d^2x_3}{dt^2} + \frac{m^2}{k^2}\frac{d^4x_3}{dt^4} + 3\frac{m}{k}\frac{d^2x_3}{dt^2} + \\ &+ x_3 - \frac{m}{k}\frac{d^2x_3}{dt^2} - x_3 = \frac{m^3}{k^3}\frac{d^6x_3}{dt^6} + 4\frac{m^2}{k^2}\frac{d^4x_3}{dt^4} + 3\frac{m}{k}\frac{d^2x_3}{dt^2} \end{aligned}$$

$$\frac{d^6x_3}{dt^6} + 4\frac{k}{m}\frac{d^4x_3}{dt^4} + 3\frac{k^2}{m^2}\frac{d^2x_3}{dt^2} = \frac{k^2F}{m^3} \tag{2.5}$$

Пусть

$$\frac{d^2x_3}{dt^2} = z \tag{2.6}$$

Тогда (2.5) запишется в виде

$$z'''' + 4\frac{k}{m}z'' + 3\frac{k^2}{m^2}z = \frac{k^2F}{m^3} \tag{2.7}$$

Характеристическое уравнение

$$r^4 + 4\frac{k}{m}r^2 + 3\frac{k^2}{m^2} = 0$$

$$r_{1,2}^2 = -2\frac{k}{m} \pm \frac{k}{m}, \quad r_1^2 = -3\frac{k}{m}, \quad r_2^2 = -\frac{k}{m}, \quad r_{1,2} = \pm i\sqrt{3\frac{k}{m}}, \quad r_{3,4} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения

$$z_1 = C_1 \cos\sqrt{3\frac{k}{m}}t + C_2 \sin\sqrt{3\frac{k}{m}}t + C_3 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + C_4 \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

Частное решение имеет вид

$$z_2 = A$$

Подстановка его в (2.7) дает

$$3\frac{k^2}{m^2}A = \frac{k^2F}{m^3}, \quad A = \frac{F}{3m}$$

Общее решение находится как

$$z = z_1 + z_2 = C_1 \cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t + C_2 \sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t + C_3 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + C_4 \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{3m} \tag{2.8}$$

В соответствии с (2.6)

$$\begin{aligned} v_3 = \int z dt = C_1\sqrt{\frac{m}{3k}}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t - C_2\sqrt{\frac{m}{3k}}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \\ + C_3\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t - C_4\sqrt{\frac{m}{k}}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{3m}t + C_5 \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} x_3 = \int v_3 dt = -C_1\frac{m}{3k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t - C_2\frac{m}{3k}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t - \\ - C_3\frac{m}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t - C_4\frac{m}{k}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{6m}t^2 + C_5t + C_6 \end{aligned} \tag{2.10}$$

С учетом (2.3), (2.6), (2.8) и (2.10)

$$\begin{aligned} x_2 = \frac{m}{k}C_1\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{m}{k}C_2\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{m}{k}C_3\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{m}{k}C_4\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{m}{k}\frac{F}{3m} - \\ - C_1\frac{m}{3k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t - C_2\frac{m}{3k}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t - C_3\frac{m}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t - \\ - C_4\frac{m}{k}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{6m}t^2 + C_5t + C_6 = \\ = \frac{2m}{3k}C_1\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{2m}{3k}C_2\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{3k} + \frac{F}{6m}t^2 + C_5t + C_6 \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} v_2 = \frac{dx_2}{dt} = -\frac{2m}{3k}\sqrt{\frac{3k}{m}}C_1\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{2m}{3k}\sqrt{\frac{3k}{m}}C_2\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{3m}t + C_5 = \\ = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3m}{k}}C_1\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3m}{k}}C_2\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{3m}t + C_5 \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$a_2 = \frac{dv_2}{dt} = -2C_1 \cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t - 2C_2 \sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{3m} \tag{2.13}$$

С учетом (2.4), (2.13), (2.11) и (2.10)

$$\begin{aligned} x_1 &= -2C_1 \frac{m}{k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t - 2C_2 \frac{m}{k}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{3m}\frac{m}{k} + \\ &+ 2\frac{2m}{3k}C_1 \cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t + 2\frac{2m}{3k}C_2 \sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{2F}{3k} + \frac{2F}{6m}t^2 + 2C_5 t + 2C_6 - \\ &+ C_1 \frac{m}{3k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t + C_2 \frac{m}{3k}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t + C_3 \frac{m}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \\ &+ C_4 \frac{m}{k}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t - \frac{F}{6m}t^2 - C_5 t - C_6 = \\ &= -C_1 \frac{m}{3k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t - C_2 \frac{m}{3k}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t + C_3 \frac{m}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \\ &+ C_4 \frac{m}{k}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{k} + \frac{F}{6m}t^2 + C_5 t + C_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_1 = \frac{dx_1}{dt} &= C_1\sqrt{\frac{m}{3k}}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t - C_2\sqrt{\frac{m}{3k}}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t - C_3\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + \\ &+ C_4\sqrt{\frac{m}{k}}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{3m}t + C_5 \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$a_1 = C_1 \cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t - C_3 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{3m}$$

В соответствии с (2.13)

$$a_2(0) = -2C_1 + \frac{F}{3m} = 0, \quad C_1 = \frac{F}{6m}$$

В соответствии с (2.8)

$$z(0) = 0 = \frac{F}{6m} + C_3 + \frac{F}{3m}, \quad C_3 = -\frac{F}{2m}$$

В соответствии с (2.11)

$$x_2(0) = \frac{2m}{3k}C_1 + \frac{F}{3k} + C_6 = 0$$

$$\frac{F}{9k} + \frac{F}{3k} + C_6 = 0, \quad C_6 = -\frac{4F}{9k}$$

В соответствии с (2.14), (2.9) и (2.12)

$$v_1(0) = -C_2\sqrt{\frac{m}{3k}} + C_4\sqrt{\frac{m}{k}} + C_5 = 0$$

$$v_3(0) = -C_2\sqrt{\frac{m}{3k}} - C_4\sqrt{\frac{m}{k}} + C_5 = 0, \quad C_4 = 0$$

$$v_2(0) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3m}{k}}C_2 + C_5 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C_5 = 0$$

Окончательное решение:

$$x_1 = -\frac{F}{18k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t - \frac{F}{2k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{6m}t^2 + \frac{5F}{9k}$$

$$x_2 = \frac{F}{9k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{6m}t^2 - \frac{F}{9k}$$

$$x_3 = -\frac{F}{18k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{2k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{6m}t^2 - \frac{4F}{9k}$$

$$v_1 = \frac{F}{6\sqrt{3km}}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{2\sqrt{km}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{3m}t$$

$$v_2 = -\frac{F}{3\sqrt{3km}}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{3m}t$$

$$v_3 = \frac{F}{6\sqrt{3km}}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t - \frac{F}{2\sqrt{km}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{3m}t$$

$$a_1 = \frac{F}{6m}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{2m}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{3m}$$

$$a_2 = -\frac{F}{3m}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{3m}$$

$$a_3 = \frac{F}{6m}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t - \frac{F}{2m}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{3m}$$

Характерный отрезок времени τ_3 для рассматриваемого случая определяется из условия максимального растяжения упругой сцепки. При этом

$$a_1(\tau_3) - \frac{F}{3m} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{F}{6m}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}\tau_3 + \frac{F}{2m}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\tau_3 = 0$$

$$\frac{1}{3}\cos\sqrt{3}\sqrt{\frac{k}{m}}\tau_3 + \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\tau_3 = 0$$

Решение последнего уравнения имеет вид:

$$\sqrt{\frac{k}{m}}\tau_3 = 0.427\pi$$

$$\tau_3 = 0.427\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

За время τ_3 локомотив пройдет расстояние

$$x_1(\tau_3) = -\frac{F}{18k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}\cdot 0.427\pi\sqrt{\frac{m}{k}} - \frac{F}{2k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot 0.427\pi\sqrt{\frac{m}{k}} +$$

$$+ \frac{F}{6m}\left(0.427\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\right)^2 + \frac{5F}{9k} =$$

$$= \frac{F}{k}\left[-\frac{1}{18}\cos\sqrt{3}\cdot 0.427\pi - \frac{1}{2}\cos 0.427\pi + \frac{1}{6}(0.427\pi)^2 + \frac{5}{9}\right] =$$

$$= \frac{F}{k}\left[-\frac{1}{18}\cos\sqrt{3}\cdot 0.427\pi - \frac{1}{2}\cos 0.427\pi + \frac{1}{6}(0.427\pi)^2 + \frac{5}{9}\right] = 0.78\frac{F}{k}$$

Таблица 1

Количество секций поезда	$\dfrac{x_1(\tau)}{x(\tau)}$	$\dfrac{v_1(\tau)}{v(\tau)}$	$\dfrac{E_1(\tau)}{E(\tau)}$
2	1.81	1.64	2.69
3	2.6	2.22	4.93

и разовьет скорость

$$v_1(\tau_3) = \frac{F}{6\sqrt{3km}}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}\cdot 0.427\pi\sqrt{\frac{m}{k}} + \frac{F}{2\sqrt{km}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot 0.427\pi\sqrt{\frac{m}{k}} + \frac{F}{3m}0.427\pi\sqrt{\frac{m}{k}} =$$
$$= \frac{F}{\sqrt{km}}\left(\frac{1}{6\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}\cdot 0.427\pi + \frac{1}{2}\sin 0.427\pi + \frac{1}{3}0.427\pi\right) = \frac{F}{\sqrt{km}}$$

Уместно сравнить эти показатели с соответствующими величинами для недеформируемого состава.

$$a = \frac{F}{3m}, \quad v = \frac{F}{3m}t, \quad x = \frac{F}{6m}t^2$$

$$x(\tau_3) = \frac{F}{6m}\left(0.427\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\right)^2 = 0.3\frac{F}{k}$$

$$v(\tau_3) = \frac{F}{3m}\cdot 0.427\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0.45\frac{F}{\sqrt{mk}}$$

$$\frac{x_1(\tau_3)}{x(\tau_3)} = 2.6$$

$$\frac{v_1(\tau_3)}{v(\tau_3)} = 2.22$$

Отношение для кинетических энергий локомотива составляет

$$\frac{E_1(\tau_3)}{E(\tau_3)} = 4.93$$

Заключение. Применение упруго деформируемых сцепок решает проблему трогания тяжелого поезда.

В таблицу сведены перемещения, скорости и кинетические энергии локомотива для моментов максимального растяжения упругой сцепки, отнесенные к соответствующим параметрам недеформируемого состава.

Полученные соотношения наглядно демонстрируют, что трогание состава с упругими сцепками значительно легче, чем недеформируемого. При этом, чем больше число вагонов, тем больше преимущество первого над вторым.

Полученные выражения для перемещений, скоростей и ускорений локомотива и вагонов имеют гармонические составляющие [2–4]. Для исключения продольных колебаний состава после достижения максимального растяжения сцепки следует механически блокировать возможность ее гармонического сжатия с последующей выборкой упругой деформации, например, с использованием демпфирующих устройств [5, 6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воронков В.Н.* Метод нахождения параметров связей для составных линейных систем с дискретными связями между подсистемами // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 2. С. 100–108.
2. *Брискин Е.С., Калинин Я.В., Малолетов А.В.* Об оценке эффективности цикловых механизмов // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 2. С. 13–19.
3. *Попов И.П.* Свободные гармонические колебания в системах с однородными элементами // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76. Вып. 4. С. 546–549.
4. *Попов И.П.* Дифференциальные уравнения двух механических резонансов // Прикладная физика и математика. 2019. № 2. С. 37–40. https://doi.org/10.25791/pfim.02.2019.599
5. *Быков Д.Л., Мартынова Е.Д.* Идентификация численно-графическим методом характеристик вязкоупругих материалов при повторном сжатии после разгрузки // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 2. С. 3–9.
6. *Валеев А.Р., Зотов А.Н., Зубкова О.Е., Ризванов Р.Г., Свиридов М.В.* Системы с разрывной квазинулевой восстанавливающей силой // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 5. С. 130–136.