

УДК 517.938

ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ УПРУГОГО СЛЕДЯЩЕГО МАНИПУЛЯТОРА

© 2021 г. Г. А. Геворкян

*Институт механики НАН, Ереван, Армения
e-mail: hrgevorkian@mail.ru*

Поступила в редакцию 05.02.2020 г.

После доработки 08.02.2020 г.

Принята к публикации 12.02.2020 г.

Актуальные задачи моделирования механизмов с упругими звеньями предполагают усовершенствование существующих формализмов и алгоритмов динамического анализа, синтеза и оптимального управления рассматриваемого класса систем. В то же время, современные исследования в указанной области главным образом ориентированы на повышение быстродействия расчетных алгоритмов без причинения ущерба точности вычислительного процесса. Если упругие многозвенные динамические системы, не включающие в себя замкнутых кинематических цепей, могут быть исчерпывающим образом исследованы на основе стратегии без обращения матрицы масс (обобщенный метод Ньютона–Эйлера), то упругие механизмы с замкнутыми кинематическими цепями подлежат исследованию с использованием стратегии обращения матрицы масс. К последнему классу принадлежат задачи на нахождение условного минимума функционала действия по Остроградскому при наличии голономных (геометрических) дополнительных связей. Здесь предстоит ознакомиться с задачей оптимизации движения упругого трехзвенного следящего манипулятора, заключающейся в минимизации функции отклонения исполнительного органа от наперед заданной окружной траектории. Эта задача также сводится к нахождению условного минимума функционала действия по Остроградскому при наличии голономной дополнительной связи.

Ключевые слова: следящий манипулятор, оптимизация движения, траектория движения исполнительного органа, функция отклонения, упругие деформации

DOI: 10.31857/S0572329921020070

Введение. В предлагаемой статье представлены итоги численного решения задачи точного воспроизведения упругим манипулятором заданной траектории движения исполнительного органа. В качестве воспроизводимой траектории движения выступает окружная траектория, а в роли следящей динамической системы — трехзвенный манипулятор с упруго-деформируемым звеном [1].

В указанной постановке задача оптимизации движения следящего манипулятора сводится к нахождению условного экстремума (минимума) функционала действия по Остроградскому при наличии дополнительной склерономной связи [2]. В качестве критерия оптимизации движения манипулятора используется условие тождественности функций положений исполнительного органа с учетом и без учета упругого отклонения [1].

Численное решение задачи осуществляется на основе стратегии, использующей процедуру обращения матрицы масс, в силу разработанного модифицированного ме-

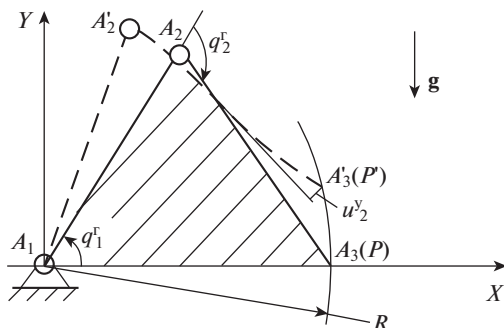


Рис. 1

тода Лагранжа, нашедшего успешное применение в процессе динамического анализа сложного класса упругих многосвязных систем с замкнутыми кинематическими цепями [3–18].

1. Моделирование движения упругого следящего манипулятора. Рассматривается трехзвенный манипулятор (рис. 1), состоящий из неподвижной и недеформируемой опорной стойки C_0 , абсолютно жесткого звена C_1 и линейно-упругого звена C_2 . В предположении идеальности связей между звеньями (кинематических пар A_i , $i = 1, 2$), упругий манипулятор помещается в потенциальное поле силы тяжести.

Когда звено C_2 предполагается абсолютно жестким, исполнительный орган A_3 в точности описывает дугу окружности A_3A_3' (рис. 1) при движении манипулятора по законам, удовлетворяющим условию: $A_1A_3 = R = \text{const}$. Очевидно, что это условие обеспечивается в том случае, если замкнутый контур $A_1A_2A_3A_1$ сохраняется неизменным на протяжении всего интервала действия следящего манипулятора.

Когда же звено C_2 принимается упругим, точное воспроизведение желаемой траектории путем несложного выбора законов движения не представляется возможным. В самом деле, вследствие наличия упругих деформаций второго звена, проблема соблюдения постоянства кривизны траектории точки A_3 сводится к задаче минимизации функции отклонения исполнительного органа A_3 от заданной окружной траектории. А это означает, что воспроизводимая траектория выражает не что иное, как дополнительную геометрическую связь, налагаемую на движение упругого трехзвенного манипулятора [1].

2. Задача нахождения абсолютного минимума функционала действия. При отсутствии дополнительной связи, налагаемой на движение исполнительного органа манипулятора, первая задача динамики трехзвенного манипулятора с упругим выходным звеном сводится к нахождению абсолютного экстремума (минимума) функционала действия по Остроградскому:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[(T - \Pi) + \sum_{i=1}^{n=2} Q_i^r q_i^r \right] dt \quad (2.1)$$

где Q_i , $i = 1, 2$ – неконсервативные силы, действующие в сопряжениях звеньев манипулятора.

В развернутом виде условие минимума функционала (2.1) сводится к системе нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка [2]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{rr} & \mathbf{M}_{re} \\ \mathbf{M}_{er} & \mathbf{M}_{ee} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}^r \\ \ddot{\mathbf{q}}^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}^r \\ \mathbf{C}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Q}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Система нелинейных дифференциальных уравнений (2.2) предполагает численное решение путем их линеаризации относительно обобщенных координат q_i^r , $i = 1, 2$, их скоростей $\dot{q}_i^r$, $i = 1, 2$, а также варьируемых параметров $\bar{q}_i^e$, $i = 1, 2$ и их скоростей $\dot{\bar{q}}_i^e$, $i = 1, 2$ [3–12].

3. Задача нахождения условного минимума функционала действия. При наличии дополнительной связи, налагаемой на движение исполнительного органа манипулятора, первая задача динамики трехзвенного манипулятора с упругим выходным звеном сводится к нахождению условного экстремума (минимума) функционала действия по Остроградскому, а именно – к нахождению минимума функционала (2.1) с учетом условия

$$\begin{aligned} & [L_1 \cos q_1^r + L_2 \cos(q_1^r + q_2^r) - u_2^y \sin(q_1^r + q_2^r)]^2 + \\ & + [L_1 \sin q_1^r + L_2 \sin(q_1^r + q_2^r) + u_2^y \cos(q_1^r + q_2^r)]^2 = R^2 \\ & |L_1 - L_2| \leq R \leq |L_1 + L_2| \end{aligned} \quad (3.1)$$

которое выражает в развернутом виде критерий оптимизации движения исполнительного органа следящего манипулятора по окружной траектории (см. рис. 1).

В таком случае, система алгебро-дифференциальных уравнений движения упругого следящего манипулятора, объединяющих (2.2) и (3.1), принимает вид [2]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{rr} & \mathbf{M}_{re} & \mathbf{M}_{r\lambda} \\ \mathbf{M}_{er} & \mathbf{M}_{ee} & \mathbf{M}_{e\lambda} \\ \mathbf{M}_{\lambda r} & \mathbf{M}_{\lambda e} & \mathbf{M}_{\lambda\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}^r \\ \ddot{\mathbf{q}}^e \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}^r \\ \mathbf{C}^e \\ \mathbf{C}^\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Q}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Критерий оптимизации. Отождествление функций положений исполнительного органа Р трехзвенного манипулятора с учетом и без учета упругого отклонения (см. рис. 1) выступает необходимым и достаточным признаком минимизации начального упругого отклонения следящего манипулятора, причем минимизация этого отклонения при отсутствии сил сопротивления подчиняется зависимости, близкой к линейной.

Доказательство. Рассмотрим функции отклонений исполнительного органа следящего манипулятора (см. рис. 1) с учетом и без учета начального упругого отклонения:

$$x_{P^*} = L_1 \cos q_1^r + L_2 \cos(q_1^r + q_2^r) - u_2^y \sin(q_1^r + q_2^r) \quad (3.3)$$

$$y_{P^*} = L_1 \sin q_1^r + L_2 \sin(q_1^r + q_2^r) + u_2^y \cos(q_1^r + q_2^r)$$

$$\begin{aligned} x_P &= R \cos \omega t \\ y_P &= R \sin \omega t \end{aligned} \quad (3.4)$$

где ω – угловая скорость вращения контура $A_1 A_2 A_3'$ относительно оси вращения, проходящей через точку A_1 .

После приравнивания функций отклонений в системах равенств (3.3) и (3.4), их возведения в квадрат и последующего почленного сложения образуется уравнение дополнительной связи (3.1). Можно показать, что тригонометрическое уравнение (3.1) в

результате двойного дифференцирования и последующих упрощений приводится к следующему эквивалентному дифференциальному уравнению дополнительной связи:

$$\ddot{y}_2^y \approx 0 \quad (3.5)$$

Следовательно, при соответствующих ненулевых начальных условиях (например, при положительном начальном отклонении и отрицательной скорости) упругая следящая система, изображенная на рис. 1 и подчиненная условию (3.5), будет стремиться к обнулению этого отклонения при отсутствии демпфирования, следуя линейной зависимости.

Что и требовалось доказать.

4. Численная реализация задачи при отсутствии дополнительной связи. Процесс численной реализации сформулированной задачи предполагается произвести в два этапа с применением явной схемы численного интегрирования Ньюмарка [16]. Первый этап усматривает моделирование движения трехзвенного манипулятора при отсутствии дополнительной геометрической связи (3.1) на основании системы дифференциальных уравнений (2.2), тогда как второй этап подразумевает решение задачи в полной постановке, т.е. принимая во внимание дополнительную связь (3.1), в силу системы алгебро-дифференциальных уравнений (3.2).

Положим длины звеньев C_1 и C_2 изображенного на рис. 1 следящего манипулятора равными радиусу описываемой окружности, т.е. $R = L_1 = L_2 = 0.35$ м, вследствие чего замкнутый контур $A_1A_2A_3A_1$ отождествляется с правильным треугольником. Поперечные сечения звеньев принимаются круглыми радиусов $r_1 = 6.0 \times 10^{-3}$ м и $r_2 = 3.0 \times 10^{-3}$ м, массы звеньев — равными $m_1 = 0.309$ кг и $m_2 = 0.0772$ кг, а модуль Юнга второго звена — $E_2 = 200$ ГПа.

Исследуемый манипулятор функционирует в интервале $t \in [0, T]$, где $T = 0.7$ с, согласно следующим законам движения:

$$\begin{aligned} \omega &\equiv \dot{q}_1^r(t) \equiv 10 \\ \dot{q}_2^r(t) &\equiv 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

которые при размерности рад/с формулируют условие равномерного обращения замкнутого контура $A_1A_2A_3A_1$ как жесткого целого вокруг оси вращения, проходящей через точку A_1 .

Ограничиваясь рассмотрением одной изгибной степени свободы звена C_2 , т.е. $N_2 = N_2^y = 1$, задаются начальные условия в обобщенных координатах и скоростях: $q_1^r(0) = \pi/3$ рад, $q_2^r(0) = -2\pi/3$ рад и $\dot{q}_1^r(0) = 10$ рад/с, $\dot{q}_2^r(0) = 0$. На первом этапе тестирования задачи начальные условия для упругого перемещения и скорости будут полагаться нулевыми: $u_2^y(P, 0) = \dot{u}_2^y(P, 0) = 0$. Шаг численного интегрирования полагается равным $\Delta t = 10^{-5}$ с.

На рис. 2, а представлен график зависимости упругого перемещения (м) концевой точки звена C_2 (исполнительного органа P) во времени (с) [16]; на рис. 2, б, в предлагаются графики функций обобщенных сил (Н · м), действующих в кинематических парах A_1 и A_2 .

Для оценки отклонения исполнительного органа P следящего манипулятора от заданной окружной траектории вследствие деформирования звена C_2 предусматривает-

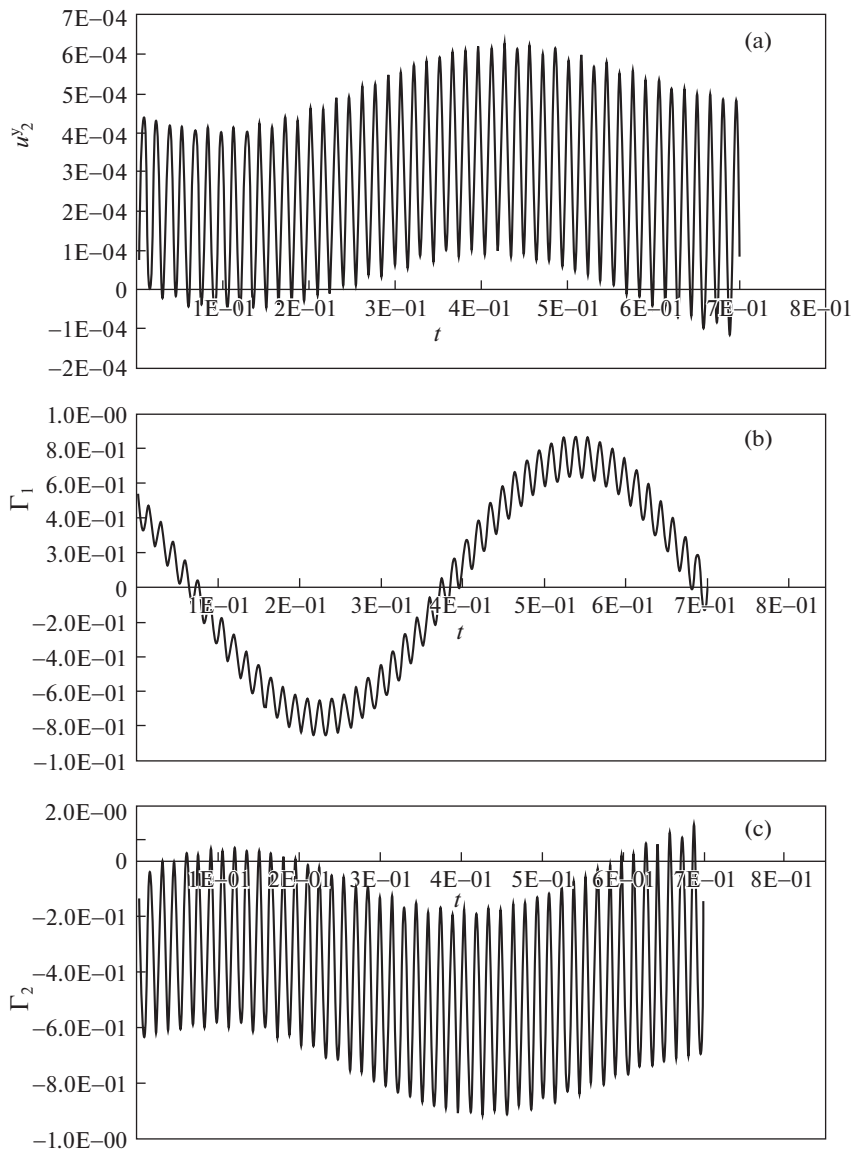


Рис. 2

ся функция ошибки E_{Γ} , которая в проекциях на оси неподвижной системы координат OXY определяется следующими равенствами [16]:

$$\begin{aligned} Er_X &= |P_X - P'_X| = |R \cos \omega t - [L_1 \cos(q_1^r) + L_2 \cos(q_1^r + q_2^r) - u_2^y \cos(q_1^r + q_2^r)]| \\ Er_Y &= |P_Y - P'_Y| = |R \sin \omega t - [L_1 \sin(q_1^r) + L_2 \sin(q_1^r + q_2^r) + u_2^y \cos(q_1^r + q_2^r)]| \end{aligned} \quad (4.2)$$

Графики первого теста функции отклонения (функции ошибки, м) исполнительного органа Р от окружной траектории в проекциях на оси неподвижной системы координат XOY представлены на рис. 3, а, б [16].

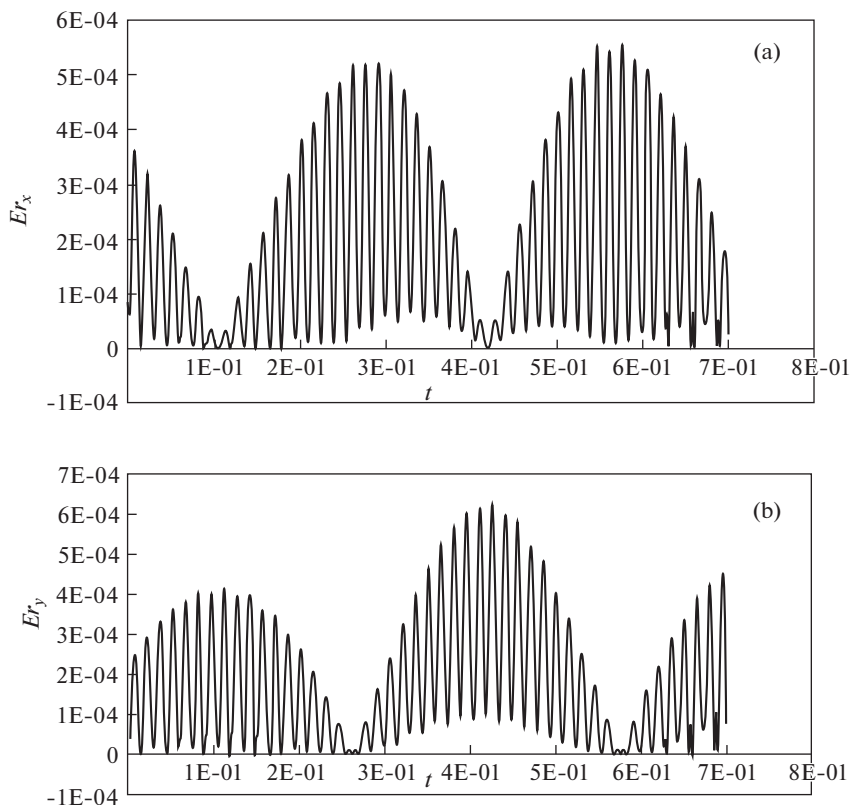


Рис. 3

5. Численная реализация задачи при наличии дополнительной связи. Вторичный тест моделирования движения упругого следающего манипулятора проводится с учетом дополнительной геометрической связи (3.1) путем численного решения системы алгебро-дифференциальных уравнений (3.2).

При аналогичных начальных условиях в обобщенных координатах и обобщенных скоростях начальные условия в упругом перемещении и в скорости упругого перемещения принимаются следующими (размерность перемещения – м, размерность скорости – м/с):

$$\begin{aligned} u_2^y(P, 0) &= 10^{-5} \\ \dot{u}_2^y(P, 0) &= -7 \times 10^{-6} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Принимая шаг численного интегрирования равным $\Delta t = 10^{-4}$ с, осуществляется тест численной реализации задачи минимизации упругого отклонения исполнительного органа от заданной окружной траектории следающего манипулятора (см. рис. 1). Результаты тестирования задачи приводятся на рис. 4, а, б, в [16]. Как видно из рис. 4, а, вблизи значения $u_2^y(P, 0) = 0$ имеет место искажение численного решения, что объясняется наличием особенности в этой точке.

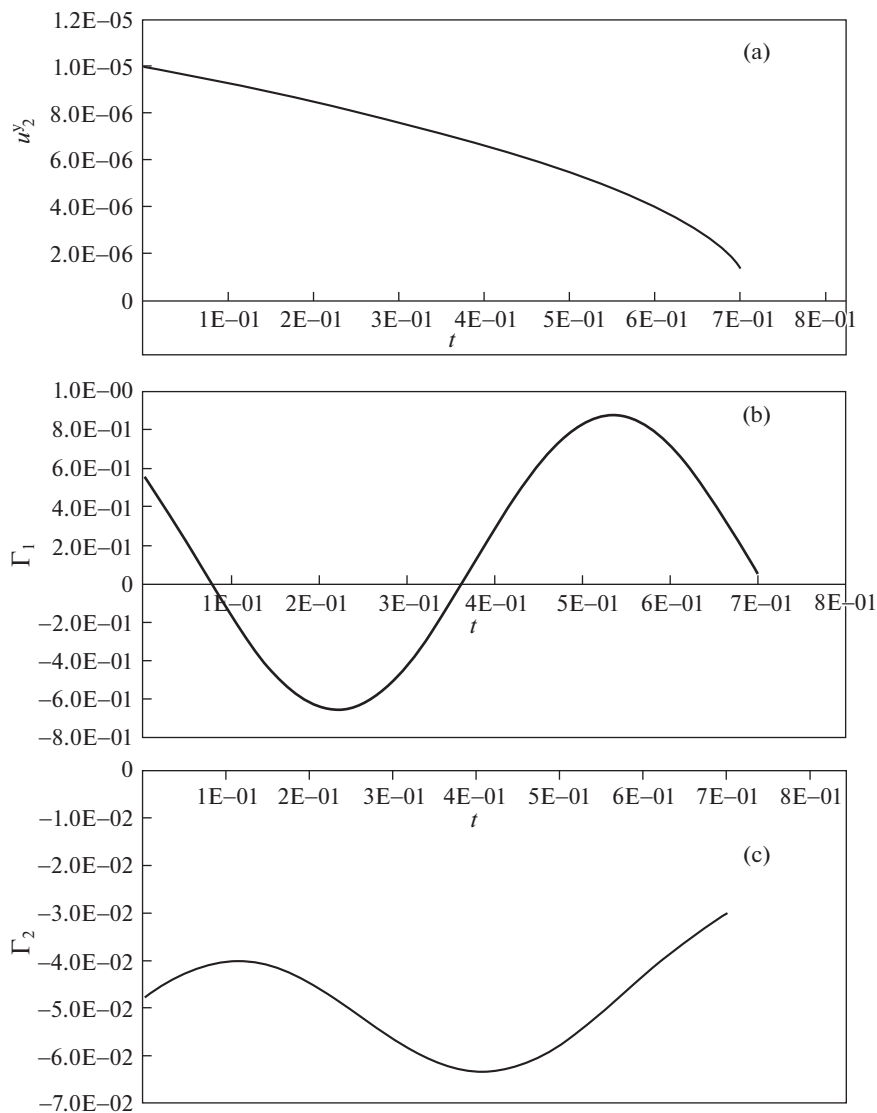


Рис. 4

Графики второго теста функции отклонения (функции ошибки, м) исполнительного органа Р от окружной траектории в проекциях на оси неподвижной системы координат ХОУ представлены на рис. 5, а и 5, б [16].

6. Заключение. В представленной статье проведено моделирование следящего трехзвенного манипулятора с упругим звеном на основе численного решения задачи нахождения условного минимума функционала действия по Остроградскому. По итогам минимизации начального упругого отклонения исполнительного органа следящего манипулятора от наперед заданной окружной траектории можно утверждать о хороших предпосылках приложения методов, алгоритмов и программного обеспечения

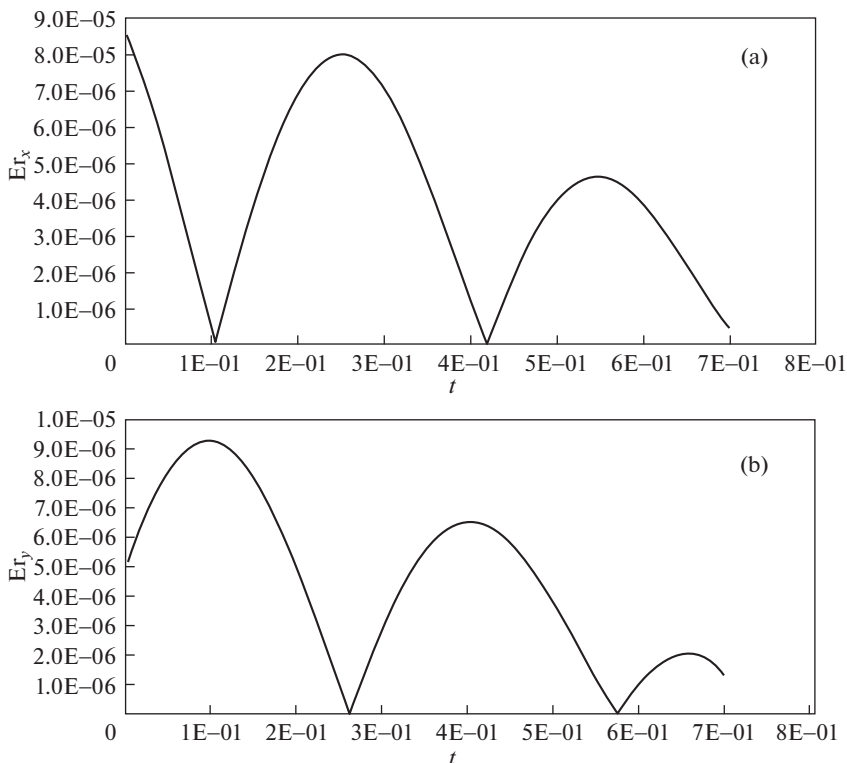


Рис. 5

динамического анализа упругих многосвязных систем к решению задач оптимального управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pascal M., Gagarina T.* A pseudo-rigid model for the dynamical simulation of flexible mechanisms // *Multibody System Dynamics*. 1999. V. 3. P. 303–331.
2. *Gofron M., Shabana A.A.* Control structure interaction in the nonlinear analysis of flexible mechanical systems // *International Journal of Nonlinear Dynamics*. 1993. V. 4. P. 183–206.
3. *Luh J.Y.S., Walker M.W., Paul R.* On-line computational scheme for mechanical manipulators // *Trans. ASME. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*. 1980. V. 74. P. 251–269.
4. *Featherstone R.* The calculation of robot dynamics using articulated-body inertias // *International Journal of Robotics Research*. 1983. V. 2. № 1. P. 13–30.
5. *Dombre E., Khalil W.* *Modélisation et commande des robots*. Edition Hermès, 1988. 448 p.
6. *Dombre E., Khalil W.* *Modélisation, identification et commande des robots*. Edition Hermès, 1999. 480 p.
7. *Verlinden O.* *Simulation du comportement dynamique de systèmes multicorps flexibles comportant des membrures de forme complexe: Doctoral Thesis of the Polytechnic Faculty of Mons*. 1994. 222 p.
8. *Fisette P., Samin J.-C.* Symbolic generation of large multibody system dynamic equations using a new semi-explicit Newton-Euler recursive scheme // *Archive of Applied Mechanics*. 1996. V. 66. P. 187–199.

9. *Boyer F., Coiffet P.* Generalization of Newton-Euler model for flexible manipulators // International Journal of Robotic Systems. 1996. V. 13. № 1. P. 11–24.
10. *Boyer F., Coiffet P.* Symbolic modeling of a flexible manipulator via assembling of its generalized Newton-Euler model // International Journal Mechanism and Machine Theory. 1996. V. 31. № 1. P. 45–56.
11. *Boyer F., Khalil W.* An efficient calculation of flexible manipulators inverse dynamics // International Journal of Robotics Research. 1998. V. 17. № 3. P. 282–293.
12. *Саркисян Ю.Л., Степанян К.Г., Азуз Н., Геворкян Г.А.* Динамический анализ упругих манипуляторов обобщенным методом Ньютона–Эйлера // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. Т.Н. – 2004. Т. 57. № 1. С. 3–10.
13. *Саркисян Ю.Л., Степанян К.Г., Геворкян Г.А.* Динамический анализ упругих древовидных механических систем без внешних связей // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. Т.Н. 2006. Т. 59. № 1. С. 3–9.
14. *Геворкян Г.А.* Динамический анализ упругих древовидных механических систем в присутствии внешних голономных связей // Information Technologies and Management. Encyclopedia-Armenica. 2004. № 4. С. 36–43.
15. *Геворкян Г.А.* Динамическое моделирование механизмов с упругими звеньями переменной длины // Вестник ГИУА. Серия: Механика, машиноведение, машиностроение. 2014. Выпуск 17. № 2. С. 34–41.
16. *Геворкян Г.А.* Приложение обобщенного метода Ньютона–Эйлера к задачам оптимального управления упругих механизмов // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. 2010. Т. 63. № 2. С. 133–138.
17. *Геворкян Г.А.* Об одной разновидности динамического анализа манипуляторов посредством обращения их матрицы масс // Мат. V межд. конф. “Актуальные проблемы механики сплошной среды”, окт. 02–07, 2017, Цахкадзор, Армения. С. 61–62.
18. *Геворкян Г.А.* Динамическое моделирование механизма шарнирного четырехзвенника с упругим шатуном // Труды VIII международной конференции “Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред”, сентябрь 22–26, 2014, Горис-Степанакерт. Ереван.: Чартарагет, 2014. С. 143–147.