

УДК 539.3

**ВЛИЯНИЕ ТЕПЛООВОГО РАСШИРЕНИЯ
В НЕОДНОРОДНОМ СТАЦИОНАРНОМ ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ
НА НЕОДНОРОДНОЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ
ТЕЛА ИЗ НЕСЖИМАЕМОГО ЭЛАСТОМЕРА
ПРИ СТАТИЧЕСКИХ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ**

© 2021 г. Б. А. Жуков^{a,b,*}

^a Волгоградский государственный социально-педагогический университет, Волгоград, Россия

^b Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Россия

*e-mail: zhukov.b.a@gmail.com

Поступила в редакцию 17.10.2019 г.

После доработки 20.10.2019 г.

Принята к публикации 21.10.2019 г.

Предложена модификация постановки задачи статики однородного изотропного несжимаемого материала при конечных деформациях, учитывающая тепловое расширение. Рассмотрено влияние теплового расширения в неоднородном стационарном температурном поле на неоднородное напряженно-деформированное состояние тела на примере цилиндрической втулки, подвергнутой конечному продольному сдвигу. Исследовано влияние неоднородного поля температур на напряженно-деформированное состояние в поперечной плоскости цилиндрической втулки, порожденное как конечным продольным сдвигом, так и тепловым расширением.

Ключевые слова: термомеханика, тепловое расширение неоднородное, температурное поле, конечные деформации, гиперупругость, несжимаемость, продольный сдвиг

DOI: 10.31857/S057232992101013X

1. Введение. Будем описывать конечную деформацию с помощью тензора градиента деформации \mathbf{F} , задаваемого выражением

$$d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} \quad (1.1)$$

Здесь \mathbf{r} и \mathbf{R} – векторы места точек тела в деформированной и недеформированной (отсчетной) конфигурациях соответственно. Точка означает скалярное произведение (свертку по одному тензорному индексу). В чисто механической теории нелинейной гиперупругости однородного изотропного материала выделяется класс несжимаемых материалов, для которых

$$J = \det \mathbf{F} = 1 \quad (1.2)$$

а тензор напряжений Коши \mathbf{S} определяется выражением [1, 2]

$$\mathbf{S} = 2 \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{B} - \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{B}^{-1} + \gamma \mathbf{1} \right) \quad (1.3)$$

где $\mathbf{1}$ – единичный тензор; $\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$ – левый тензор деформации Коши–Грина [2] (в [1] это мера деформации Фингера), значок T обозначает транспонирование; $W = W(I_1, I_2)$ – удельная энергия упругой деформации (потенциал энергии деформа-

ции), отнесенная к единице объема отсчетной конфигурации; $I_1 = \mathbf{1} \cdot \mathbf{B}$, $I_2 = = 1/2(I_1^2 - \mathbf{1} \cdot \mathbf{B}^2)$ – главные алгебраические инварианты тензора \mathbf{B} ; γ – функция гидростатического давления (аддитивная часть напряжения, неопределяемая деформацией).

При изменении температуры все тела, независимо от того сжимаемые они или несжимаемые изотермически, подвергаются тепловому расширению, и для несжимаемых тел уравнения (1.2) и (1.3) не имеют места. Необходимо выражения (1.2) и (1.3) модифицировать так, чтобы учесть тепловое расширение, а в случае отсутствия теплового воздействия новые выражения должны редуцироваться к старым.

Существует довольно обширный список работ, в которых эта задача решалась тем или иным способом. В первой серии работ тепловое расширение выделяется из общей деформации. В работах [3–5] предлагается мультипликативное разложение тензора градиента деформации

$$\mathbf{F} = \Phi_\theta \cdot \Phi_E \quad (1.4)$$

причем $\Phi_\theta = g(\theta)\mathbf{1}$ – шаровой тензор, описывающий тепловое расширение в термически изотропных телах, а Φ_E – тензор, описывающий упругую составляющую деформации, и для несжимаемых тел $\det \Phi_E = 1$. Здесь $g(\theta)$ некоторая монотонная функция приращения температуры $\theta = T - T_0$, где T – абсолютная температура деформированной конфигурации, а T_0 – однородная абсолютная температура отсчетной конфигурации и $g(0) = 1$. Существенным недостатком такого представления является то, что в общем случае неоднородного распределения температуры T тензор Φ_E не является градиентом упругой деформации. Действительно, введем материальную систему координат (q^1, q^2, q^3) тогда основной \mathbf{R}_k и сопряженный \mathbf{R}^k базисы этой системы в отсчетной конфигурации вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_k &= \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^k}, & \mathbf{R}^1 &= \frac{\mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_3}{v_0}, & \mathbf{R}^2 &= \frac{\mathbf{R}_3 \times \mathbf{R}_1}{v_0} \\ \mathbf{R}^3 &= \frac{\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2}{v_0}, & v_0 &= \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_3 \end{aligned}$$

Крестик означает векторное произведение. Введем в отсчетной конфигурации оператор Гамильтона $\overset{0}{\nabla} = \mathbf{R}^k \partial / \partial q^k$, тогда из выражения (1.1) следует связь тензора градиента деформации с тензором градиентом вектора места $\mathbf{F}^T = \overset{0}{\nabla} \mathbf{r}$ [1] и необходимым условием интегрируемости (1.1) является выражение

$$\overset{0}{\nabla} \times \overset{0}{\nabla} \mathbf{r} = \overset{0}{\nabla} \times \mathbf{F}^T = \overset{0}{\nabla} \times (g(\theta) \Phi_E^T) = 0$$

В развернутом виде это уравнение выглядит так

$$\frac{dg(\theta)}{d\theta} \overset{0}{\nabla} \theta \times \Phi_E^T + g(\theta) \overset{0}{\nabla} \times \Phi_E^T = 0$$

Поскольку $g(\theta)$ монотонно возрастает и отлична от нуля, а Φ_E произвольный тензор с $\det \Phi_E = 1$, то для выполнения условия $\overset{0}{\nabla} \times \Phi_E^T = 0$ требуется чтобы $\overset{0}{\nabla} \theta = 0$. То есть тензор Φ_E является градиентом деформации только в случае однородного температурного поля. В работе [7] предполагается аддитивное разбиение массовой плотности

свободной энергии Гельмгольца $\Psi = W/\rho_0$ на слагаемое, описывающее дисторсию, слагаемое, описывающие дилатацию и слагаемое, связанное с теплоемкостью

$$\Psi(J, I_1, I_2, T) = \frac{\mu}{\rho_0} f(I_1, I_2) \frac{T}{T_0} + \frac{\kappa}{\rho_0} \left(l(J) \frac{T}{T_0} - \bar{\alpha} h(J) (T - T_0) \right) - \int_{T_0}^T \left(\frac{T}{\bar{T}} - 1 \right) c(\bar{T}) d\bar{T} \quad (1.5)$$

Здесь $c(T)$ – удельная теплоемкость, ρ_0 – плотность массы, μ – модуль сдвига, κ – изотермический объемный модуль и $\bar{\alpha}$ – коэффициент объемного теплового расширения, отнесенные к недеформированной конфигурации, f , l и h – функции отклика. Но приложение этой гипотезы рассмотрено только для однородного температурного поля. В работе [8] дилатация и дисторсия разделяются путем введения модифицированных главных кратностей удлинения

$$\lambda_i^* = \frac{\lambda_i}{J}, \quad \lambda_1^* \lambda_2^* \lambda_3^* = 1$$

далее вся работа выдержана в терминах главных удлинений и главных напряжений, а в качестве приложения рассмотрена задача об одноосном растяжении. В работе [9] оба предыдущих подхода объединяются, то есть удельная свободная энергия представляется в виде суммы энергии дилатации и энергии дисторсии, выраженной через I_1^* , I_2^* – модифицированные главные алгебраические инварианты тензора \mathbf{B}

$$\Psi(J, I_1^*, I_2^*, T) = \frac{1}{\rho_0 \kappa} (J - 1) [(J - 1) - 2(J_T - 1)] + \frac{1}{\rho_0} A(I_1^*, I_2^*)$$

$$I_1^* = J^{-\frac{2}{3}} I_1, \quad I_2^* = J^{-\frac{4}{3}} I_2, \quad I_3^* = J^{-\frac{6}{3}} I_3 = 1, \quad J_T = g(\theta)$$

Здесь $A(I_1^*, I_2^*)$ – функция отклика. Кроме общих рассуждений никаких приложений в работе не приводится. Попутно следует отметить [5], что поскольку $I_1 = J^{2/3} I_1^*$, $I_2 = J^{2/3} I_2^*$, то первое слагаемое в (1.5) не описывает чистую дисторсию. Более четкое разделение дилатации и дисторсии проведено в [5]

$$\Psi(J, I_1^*, I_2^*, T) = f(I_1^*, I_2^*) + \frac{\kappa}{2\rho} [g^3(T) J - 1]^2 - c_e T \left[1 - \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) \right] + \varphi_0$$

Здесь c_e постоянная теплоемкость, а $\varphi_0 = c_e T_0$, но как было отмечено, это выражение получено в предположении (1.4).

Во второй серии работ модификация уравнений (1.2) и (1.3) либо полностью, либо частично не проводится. Так в работах [10–13] уравнения (1.2) и (1.3) не меняются, при этом полагается, что такая модель несжимаемости является грубым, но важным приближением к точной теории термоупругости. В работах [14–17] уравнение (1.2) модифицируется в $\det \mathbf{F} = g(\theta)$, а (1.3) остается неизменным. Список приведенных работ неисчерпывающий, обозначены основные направления. В нашей работе мы не делаем предположений о структуре термоупругой деформации, кроме того, что изменение объема происходит исключительно вследствие теплового расширения.

2. Основные соотношения. Термоупругую деформацию однородного и изотропного материала будем представлять с помощью тензора градиента деформации \mathbf{F} определенным выражением (1.1). Положим, что изменение объема происходит только за счет теплового расширения (материал изотермически несжимаемый), то есть

$$\det \mathbf{F} = g(\theta) \quad (2.1)$$

где по [3, 4, 9, 14]

$$g(\theta) = e^{3\alpha\theta} \quad \text{или} \quad g(\theta) = 1 + 3\alpha\theta \quad (2.2)$$

Здесь α – коэффициент линейного расширения. Ниже будем пользоваться первой формулой из (2.2).

Согласно [1, 2] для простого однородного материала с массовой плотностью свободной энергии $\Psi = \Psi(\mathbf{F}, T, \nabla T)$ уравнения состояния принимают вид

$$\mathbf{P} = \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}^{Tr}}, \quad \hat{\eta} = -\frac{\partial \Psi}{\partial T}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \nabla T} = 0$$

Здесь \mathbf{P} – тензор напряжений Пиолы [1] (по [2] это транспонированный первый тензор Пиолы – Кирхгофа), $\hat{\eta}$ – массовая плотность энтропии. Из последнего уравнения следует, что для простого однородного материала $\Psi = \Psi(\mathbf{F}, T)$, а если он изотропен, то $\Psi = \Psi(I_1, I_2, I_3, T)$. Здесь $I_3 = \det \mathbf{B} = J^2$. Вспоминая, что $W = \rho_0 \Psi$, по [1] получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}^{Tr}} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \cdot \mathbf{F}^{Tr} = 2 \left[\frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{F}^{Tr} + \frac{\partial W}{\partial I_2} (I_1 \mathbf{1} - \mathbf{C}) \cdot \mathbf{F}^{Tr} + I_3 \frac{\partial W}{\partial I_3} \mathbf{F}^{-1} \right] = \\ &= 2\mathbf{F}^{-1} \cdot \left[\frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{B} + \frac{\partial W}{\partial I_2} (I_1 \mathbf{B} - \mathbf{B}^2) + I_3 \frac{\partial W}{\partial I_3} \mathbf{1} \right] = \\ &= 2\mathbf{F}^{-1} \cdot \left[\frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{B} - I_3 \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{B}^{-1} + \left(I_2 \frac{\partial W}{\partial I_2} + I_3 \frac{\partial W}{\partial I_3} \right) \mathbf{1} \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь $\mathbf{C} = \mathbf{F}^{Tr} \cdot \mathbf{F}$ – правый тензор деформации Коши–Грина [2] (по [1] это мера деформации Коши). Использована формула Гамильтона–Келли $I_1 \mathbf{B} - \mathbf{B}^2 = I_2 \mathbf{1} - I_3 \mathbf{B}^{-1}$ [1].

Для несжимаемого материала ($I_3 = J^2 = e^{6\alpha\theta}$) вводится множитель Лагранжа h_1 , зависящий от координат точек и температуры, так что удельная энергия деформации представляется выражением $W = W(I_1, I_2, T) + h_1(I_3 - e^{6\alpha\theta})$. Используя последнее выражение в (2.3) получим

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}^{-1} \cdot 2 \left[\frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{B} - e^{6\alpha\theta} \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{B}^{-1} + \left(I_2 \frac{\partial W}{\partial I_2} + e^{6\alpha\theta} h_1 \right) \mathbf{1} \right]$$

Введем обозначение $h = I_2 \partial W / \partial I_2 + e^{6\alpha\theta} h_1$, тогда

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}^{-1} \cdot 2 \left[\frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{B} - e^{6\alpha\theta} \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{B}^{-1} + h \mathbf{1} \right] = 2 \left[\frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{F}^{Tr} - e^{6\alpha\theta} \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{B}^{-1} + h \mathbf{F}^{-1} \right] \quad (2.4)$$

Вспоминая связь тензора напряжений Коши с тензором Пиолы $\mathbf{P} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{S}$ [1] из (2.4) будем иметь

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}^{-1} \cdot 2 \left[\frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{B} - e^{6\alpha\theta} \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{B}^{-1} + h \mathbf{1} \right] = e^{3\alpha\theta} \mathbf{F}^{-1} \cdot 2 \left[\frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{B} e^{-3\alpha\theta} - e^{3\alpha\theta} \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{B}^{-1} + \gamma \mathbf{1} \right]$$

где $\gamma = e^{-3\alpha\theta} h$. Следовательно,

$$\mathbf{S} = 2 \left[\frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{B} e^{-3\alpha\theta} - e^{3\alpha\theta} \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{B}^{-1} + \gamma \mathbf{1} \right] \quad (2.5)$$

Выражения (2.1), (2.5) и есть предлагаемая модификация выражений (1.2) и (1.3).

Среди простых, однородных и изотропных материалов будем рассматривать материалы, подчиняющиеся закону Фурье

$$\mathbf{q} = -\lambda \overset{0}{\nabla} T = -\lambda \overset{0}{\nabla} \theta \quad (2.6)$$

Здесь \mathbf{q} – удельный тепловой поток, рассчитанный на единицу площади поверхности в отсчетной конфигурации, λ – коэффициент теплопроводности, тоже отнесенный к отсчетной конфигурации.

В отсутствие массовых сил и внутренних источников теплоты уравнения равновесия и теплового баланса имеют вид [1]

$$\overset{0}{\nabla} \cdot \mathbf{P} = 0, \quad \overset{0}{\nabla} \cdot \mathbf{q} = 0 \quad (2.7)$$

Из второго уравнения (2.7) и выражения (2.6) следует стационарное уравнение теплопроводности

$$\overset{0}{\nabla} \cdot \overset{0}{\nabla} \theta = 0 \quad (2.8)$$

Первое уравнение в (2.7) можно переписать в виде [1]

$$\overset{0}{\nabla} \cdot \mathbf{P} = \nabla \cdot \mathbf{S} = 0 \quad (2.9)$$

Здесь $\nabla = \mathbf{r}^k \partial / \partial q^k$ – оператор Гамильтона в деформированной конфигурации, \mathbf{r}^k – базис взаимный с базисом \mathbf{r}_k , то есть

$$\mathbf{r}_k = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^k} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{R}_k, \quad \mathbf{r}^1 = \frac{\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3}{v}, \quad \mathbf{r}^2 = \frac{\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1}{v}, \quad \mathbf{r}^3 = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{v}, \quad v = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3$$

Согласно (2.5) из (2.9) получим

$$\nabla \gamma = -\nabla \cdot \left[e^{-3\alpha\theta} \frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{B} - e^{3\alpha\theta} \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{B}^{-1} \right] \quad (2.10)$$

Исключая в (2.10) функцию γ , будем иметь

$$\nabla \times \nabla \cdot \left[e^{-3\alpha\theta} \frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{B} - e^{3\alpha\theta} \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{B}^{-1} \right] = 0 \quad (2.11)$$

Уравнение (2.11) совместно с уравнением (2.1) служат для нахождения деформированного состояния, а уравнение (2.10) совместно с выражением (2.5) или (2.4) используются для нахождения напряженного состояния. Эти уравнения дополняются силовыми и кинематическими граничными условиями. Для нахождения температурного поля используется уравнение (2.8) так же дополненное граничными условиями.

3. Приложение предложенной модели к случаю неоднородного температурного поля и неоднородного напряженно-деформированного состояния. Рассматривается свободное тепловое расширение цилиндрической эластомерной втулки, подвергнутой на внутренней и внешней боковых поверхностях действию уравновешенной системы продольных сдвигающих сил с модулем Q . На внутренней боковой поверхности поддерживается температура T_1 , а на внешней T_2 . Через R_1 и R_2 обозначаются внутренний и внешний радиусы втулки, а через H ее длина. В чисто механической постановке в рамках геометрической нелинейности эта задача решалась в [18], а в нелинейной постановке с потенциалом Муни–Ривлина в [20].

3.1. Постановка задачи в рамках полуобратного метода. Материальная система координат выбрана совпадающей в отсчетной конфигурации с цилиндрической системой (R, Φ, Z) , причем ось OZ совпадает с осью симметрии втулки. Втулка считается достаточно длинной, чтобы пренебречь торцевыми эффектами и считать напряжен-

но-деформированное состояние независимым от Z . В этих условиях можно использовать кинематическую гипотезу коаксиальных сечений, то есть сечения цилиндрические и коаксиальные до деформации остаются таковыми и после деформации (ось единая для всех таких сечений совпадает с осью симметрии втулки). В цилиндрической системе координат в силу осевой симметрии вектор места в деформированной конфигурации задается соотношением

$$\mathbf{r} = f(R)\mathbf{e}_R + [Z + w(R)]\mathbf{k} \quad (3.1)$$

Здесь $w(R)$ и $f(R)$ подлежащие определению функции, $\{\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\Phi, \mathbf{k}\}$ – единичный базис цилиндрической системы координат. Температурное поле так же полагается осесимметричным $\theta = \theta(R)$. Оператор Гамильтона материальной системы координат в отсчетной конфигурации записывается в форме

$$\overset{0}{\nabla} = \mathbf{e}_R \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\mathbf{e}_\Phi}{R} \frac{\partial}{\partial \Phi} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial Z} \quad (3.2)$$

Тензор градиента вектора места по (3.1) и (3.2) получается в виде

$$\overset{0}{\nabla} \mathbf{r} = \mathbf{F}^{Tr} = \frac{df(R)}{dR} \mathbf{e}_R \mathbf{e}_R + \frac{f(R)}{R} \mathbf{e}_\Phi \mathbf{e}_\Phi + \frac{dw(R)}{dR} \mathbf{e}_R \mathbf{k} + \mathbf{k} \mathbf{k} \quad (3.3)$$

Так, что условие несжимаемости ($J = \det \overset{0}{\nabla} \mathbf{r} = e^{3\alpha\theta(R)}$) принимает форму дифференциального уравнения

$$ff' = R e^{3\alpha\theta(R)} \quad (3.4)$$

Штрих означает производную по R .

Решение краевой задачи с уравнением (2.8) в цилиндрической системе координат

$$(R\theta')' = 0, \quad \theta(R_1) = \theta_1, \quad \theta(R_2) = \theta_2, \quad \theta_1 = T_1 - T_0, \quad \theta_2 = T_2 - T_0$$

известно и имеет вид

$$\theta(R) = \frac{\theta_2 - \theta_1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \ln\left(\frac{R}{R_1}\right) + \theta_1$$

Используя это решение, получим

$$A(R) = e^{3\alpha\theta(R)} = a \left(\frac{R}{R_1}\right)^b, \quad a = e^{3\alpha\theta_1}, \quad b = \frac{3\alpha(\theta_2 - \theta_1)}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

Подставим это выражение в (3.4) и решим его. Выбирая из двух решений положительное, получим

$$f(R) = R_1 \sqrt{\eta + \frac{2a\left(\frac{R}{R_1}\right)^{2+b}}{2+b}} = R_1 \sqrt{\eta + \frac{2\left(\frac{R}{R_1}\right)^2 A(R)}{2+b}} \quad (3.5)$$

Здесь η – безразмерная константа интегрирования, в дальнейшем играющая роль параметра.

Используя (3.4) из (3.3) будем иметь

$$\mathbf{F}^{Tr} = \frac{RA(R)}{f(R)} \mathbf{e}_R \mathbf{e}_R + \frac{f(R)}{R} \mathbf{e}_\Phi \mathbf{e}_\Phi + w'(R) \mathbf{e}_R \mathbf{k} + \mathbf{k} \mathbf{k}, \quad f'(R) = \frac{RA(R)}{f(R)}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= \frac{RA(R)}{f(R)} \mathbf{e}_R \mathbf{e}_R + \frac{f(R)}{R} \mathbf{e}_\Phi \mathbf{e}_\Phi + w'(R) \mathbf{k} \mathbf{e}_R + \mathbf{k} \mathbf{k} \\
(\mathbf{F}^{Tr})^{-1} &= \frac{f(R)}{RA(R)} \mathbf{e}_R \mathbf{e}_R + \frac{R}{f(R)} \mathbf{e}_\Phi \mathbf{e}_\Phi - w'(R) \frac{f(R)}{RA(R)} \mathbf{e}_R \mathbf{k} + \mathbf{k} \mathbf{k} \\
\mathbf{F}^{-1} &= \frac{f(R)}{RA(R)} \mathbf{e}_R \mathbf{e}_R + \frac{R}{f(R)} \mathbf{e}_\Phi \mathbf{e}_\Phi - w'(R) \frac{f(R)}{RA(R)} \mathbf{k} \mathbf{e}_R + \mathbf{k} \mathbf{k}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

По этим выражениям вычисляются

$$\mathbf{B} = \frac{R^2 A^2(R)}{f^2(R)} \mathbf{e}_R \mathbf{e}_R + \frac{f^2(R)}{R^2} \mathbf{e}_\Phi \mathbf{e}_\Phi + w'(R) \frac{RA(R)}{f(R)} (\mathbf{e}_R \mathbf{k} + \mathbf{k} \mathbf{e}_R) + (1 + w'^2(R)) \mathbf{k} \mathbf{k} \tag{3.7}$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{f^2(R)(1 + w'^2(R))}{R^2 A^2(R)} \mathbf{e}_R \mathbf{e}_R + \frac{R^2}{f^2(R)} \mathbf{e}_\Phi \mathbf{e}_\Phi - w'(R) \frac{f(R)}{RA(R)} (\mathbf{e}_R \mathbf{k} + \mathbf{k} \mathbf{e}_R) + \mathbf{k} \mathbf{k} \tag{3.8}$$

Дальнейшее продвижение требует некоторых соглашений насчет удельной энергии деформации W . Имея ввиду учет влияния теплового расширения, будем считать в первом приближении, что удельная энергия деформации зависит от температуры неявно, только через главные инварианты тензора деформации \mathbf{B} . В литературе описано множество конститутивных моделей (выражений для удельной энергии деформации) несжимаемого материала, зависящих как от одного, так и от двух главных инвариантов. В [19–21] показано, что более простые, конститутивные модели, не включающие зависимость от второго инварианта, не в состоянии охватить некоторые физические эффекты. Поэтому будем использовать модель, зависящую от двух инвариантов. Простейшей конститутивной моделью, зависящей от двух главных инвариантов, является модель Муни–Ривлина

$$W = \frac{\mu}{4} [(1 + \beta)(I_1 - 3) + (1 - \beta)(I_2 - 3)] \tag{3.9}$$

Здесь μ – модуль сдвига линейной теории, отнесенный к отсчетной конфигурации, $\beta \in [-1, 1]$ безразмерный коэффициент. Полагаем, что $p = 4\gamma/\mu$ является осесимметричным $p = p(R)$. Используя (2.5), (3.7), (3.8) и (3.9) получим

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} &= \frac{\mu}{2} \left\{ \left[(1 + \beta) \frac{R^2 A(R)}{f^2(R)} - (1 - \beta) \frac{f^2(R)(1 + w'^2(R))}{R^2 A(R)} + p(R) \right] \mathbf{e}_R \mathbf{e}_R + \right. \\
&+ \left[(1 + \beta) \frac{f^2(R)}{R^2 A(R)} - (1 - \beta) \frac{R^2 A(R)}{f^2(R)} + p(R) \right] \mathbf{e}_\Phi \mathbf{e}_\Phi + \\
&+ \left[(1 + \beta) \frac{R}{f(R)} + (1 - \beta) \frac{f(R)}{R} \right] w'(R) (\mathbf{e}_R \mathbf{k} + \mathbf{k} \mathbf{e}_R) + \\
&\left. + \left[(1 + \beta) \frac{(1 + w'^2(R))}{A(R)} - (1 - \beta) A(R) + p(R) \right] \mathbf{k} \mathbf{k} \right\} \tag{3.10}
\end{aligned}$$

Поскольку $\mathbf{r}_k = \mathbf{F} \cdot \mathbf{R}_k$, то используя (3.6), получим

$$\mathbf{r}_1 = \frac{RA(R)}{f(R)} \mathbf{e}_R + w'(R) \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_2 = f(R) \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{r}_3 = \mathbf{k}$$

Вычисляя сопряженный базис

$$\mathbf{r}^1 = \frac{f(R)}{RA(R)} \mathbf{e}_R, \quad \mathbf{r}^2 = \frac{1}{f(R)} \mathbf{e}_\Phi, \quad \mathbf{r}^3 = -\frac{f(R)w'(R)}{RA(R)} \mathbf{e}_R + \mathbf{k}$$

будем иметь оператор Гамильтона в деформированной конфигурации

$$\begin{aligned} \nabla &= \frac{f(R)}{RA(R)} \mathbf{e}_R \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{f(R)} \mathbf{e}_\Phi \frac{\partial}{\partial \Phi} + \left[-\frac{f(R)w'(R)}{RA(R)} \mathbf{e}_R + \mathbf{k} \right] \frac{\partial}{\partial Z} = \\ &= \mathbf{e}_R \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\Phi \frac{\partial}{\partial \phi} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Здесь $r = f(R)$, $\phi = \Phi$, $z = Z + w'(R)$ координаты точек в деформированной конфигурации в цилиндрической системе координат. Теперь вычислим уравнение равновесия (2.10). Используя обозначения $\mathbf{S} = S_{RR} \mathbf{e}_R \mathbf{e}_R + S_{\Phi\Phi} \mathbf{e}_\Phi \mathbf{e}_\Phi + S_{RZ} (\mathbf{e}_R \mathbf{k} + \mathbf{k} \mathbf{e}_R) + S_{ZZ} \mathbf{k} \mathbf{k}$, в компонентной форме будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial r} (r S_{RZ}) = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left[(1 + \beta) \frac{R}{f(R)} + (1 - \beta) \frac{f(R)}{R} \right] w'(R) \right\} = 0 \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} &r \frac{\partial}{\partial r} S_{RR} + S_{RR} - S_{\Phi\Phi} = \\ &= r \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 + \beta) \frac{R^2 A(R)}{f^2(R)} - (1 - \beta) \frac{f^2(R)(1 + w'^2(R))}{R^2 A(R)} + p(R) \right] + \\ &+ \left[(1 + \beta) \frac{R^2 A(R)}{f^2(R)} - (1 - \beta) \frac{f^2(R)(1 + w'^2(R))}{R^2 A(R)} \right] - \\ &- \left[(1 + \beta) \frac{f^2(R)}{R^2 A(R)} - (1 - \beta) \frac{R^2 A(R)}{f^2(R)} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Уравнение (2.11) приводится к виду

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left\{ r \left[(1 + \beta) \frac{R}{f(R)} + (1 - \beta) \frac{f(R)}{R} \right] w'(R) \right\} = 0$$

и является следствием (3.12).

Первый интеграл уравнения (3.12) записывается в форме

$$r \left[(1 + \beta) \frac{R}{f(R)} + (1 - \beta) \frac{f(R)}{R} \right] w'(R) = c$$

или

$$\left[(1 + \beta) \frac{R}{f(R)} + (1 - \beta) \frac{f(R)}{R} \right] w'(R) = \frac{c}{f(R)} \quad (3.14)$$

Константа интегрирования c находится из силовых граничных условий на боковой поверхности. Вектор единичной нормали к боковой поверхности не меняется в про-

пессе деформации и совпадает с \mathbf{e}_R . Главный вектор на боковой поверхности получим, используя (3.10) и (3.14), в виде

$$\begin{aligned} \frac{Q}{H} \mathbf{k} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{e}_R \cdot \mathbf{S}(R) r d\varphi = \int_0^{2\pi} [S_{RR}(R) \mathbf{e}_R + S_{RZ}(R) \mathbf{k}] f(R) d\Phi = \\ &= 2\pi S_{RZ}(R) f(R) \mathbf{k} = \pi\mu \left[(1+\beta) \frac{R}{f(R)} + (1-\beta) \frac{f(R)}{R} \right] w'(R) f(R) \mathbf{k} = \pi\mu c \mathbf{k} \end{aligned}$$

То есть $c = Q/(\pi\mu H)$. Теперь имеем выражение для касательных напряжений

$$S_{RZ} = \frac{Q}{2\pi H} \frac{1}{f(R)} \quad (3.15)$$

и уравнение для нахождения продольного смещения

$$w'(R) = \frac{Q}{\pi\mu H} \frac{1}{f(R) \left[(1+\beta) \frac{R}{f(R)} + (1-\beta) \frac{f(R)}{R} \right]} \quad (3.16)$$

Для предотвращения жесткого смещения втулки вдоль оси OZ положим, что внутренняя боковая поверхность продольно не смещается, а смещается внешняя боковая поверхность. Тогда

$$w(R) = \frac{Q}{\pi\mu H} \int_{R_0}^R \frac{dt}{f(t) \left[(1+\beta) \frac{t}{f(t)} + (1-\beta) \frac{f(t)}{t} \right]} \quad (3.17)$$

В выражения (3.15)–(3.17) входит параметр η . Для его определения обратимся к плоской части напряженного состояния. Из (3.11) следует выражение

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{f(R)}{RA(R)} \frac{\partial}{\partial R} - \frac{w'(R) f(R)}{RA(R)} \frac{\partial}{\partial Z}$$

используя которое перепишем уравнение (3.13) в виде

$$\begin{aligned} \frac{f^2(R)}{RA(R)} \frac{\partial}{\partial R} \left[(1+\beta) \frac{R^2 A(R)}{f^2(R)} - (1-\beta) \frac{f^2(R)(1+w'^2(R))}{R^2 A(R)} + p(R) \right] + \\ + (1+\beta) \frac{R^2 A(R)}{f^2(R)} - (1-\beta) \frac{f^2(R)(1+w'^2(R))}{R^2 A(R)} - \\ - \left[(1+\beta) \frac{f^2(R)}{R^2 A(R)} - (1-\beta) \frac{R^2 A(R)}{f^2(R)} \right] = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} p'(R) &= (1-\beta) \frac{w'^2(R)}{R} + 2 \left(\frac{1}{R} - \frac{R^3 A^2(R)}{f^4(R)} \right) - \\ &- \left[(1+\beta) \frac{R^2 A(R)}{f^2(R)} - (1-\beta) \frac{f^2(R)(1+w'^2(R))}{R^2 A(R)} \right] \end{aligned}$$

Из этого уравнения, получаем выражение для p

$$p(R) = \int_{R_1}^R (1-\beta) \frac{w'^2(t)}{t} + 2 \left(\frac{1}{t} - \frac{t^3 A^2(t)}{f^4(t)} \right) dt - \left[(1+\beta) \frac{R^2 A(R)}{f^2(R)} - (1-\beta) \frac{f^2(R)(1+w'^2(R))}{R^2 A(R)} \right] + p_0 \quad (3.18)$$

Здесь p_0 – константа интегрирования. Для нахождения η и p_0 служат уравнения, полученные из силовых граничных условий на боковой поверхности

$$S_{RR}(R_1) = S_{RR}(R_2) = 0 \quad (3.19)$$

Перейдем к безразмерным величинам, переменным и параметрам.

$$\rho = \frac{R}{R_1}, \quad \kappa = \frac{R_2}{R_1}, \quad \delta = \frac{\Delta}{R_1}, \quad \omega = \frac{w}{R_1}, \quad \nu = \frac{f}{R_1}, \quad q = \frac{Q}{2\pi R_1 H \mu}$$

$$\sigma_{RZ} = \frac{S_{RZ}}{\mu}, \quad \sigma_{RR} = \frac{S_{RR}}{\mu}, \quad \sigma_{RZ} = \frac{S_{\Phi\Phi}}{\mu}, \quad \dot{\omega}(\rho) = \frac{\partial \omega(\rho)}{\partial \rho} = \frac{\partial w(R)}{\partial R} = w'(R)$$

Здесь Δ – продольное смещение внешней боковой поверхности втулки относительно внутренней. Используя эти соотношения и выражения (3.17), (3.18), получим

$$A(\rho) = a\rho^b, \quad a = e^{3\alpha\theta_1}, \quad b = \frac{3\alpha(\theta_2 - \theta_1)}{\ln \kappa}$$

$$\dot{\omega}(\rho) = \frac{2q}{\left[(1+\beta)\rho + (1-\beta) \frac{\nu^2(\rho)}{\rho} \right]}$$

$$p(\rho) = \int_1^\rho (1-\beta) \frac{\dot{\omega}^2(t)}{t} + 2 \left(\frac{1}{t} - \frac{t^3 A^2(t)}{\nu^4(t)} \right) dt - \left[(1+\beta) \frac{\rho^2 A(\rho)}{\nu^2(\rho)} - (1-\beta) \frac{\nu^2(\rho)(1+\dot{\omega}^2(\rho))}{\rho^2 A(\rho)} \right] + p_0 \quad (3.20)$$

Из (3.20) имеем

$$\sigma_{RR} = \frac{1}{2} \left[\int_1^\rho (1-\beta) \frac{\dot{\omega}^2(t)}{t} + 2 \left(\frac{1}{t} - \frac{t^3 A^2(t)}{\nu^4(t)} \right) dt + p_0 \right]$$

Уравнения (3.19) для определения p_0 и η получаются в форме

$$p_0 = 0, \quad \int_1^\kappa (1-\beta) \frac{\dot{\omega}^2(t)}{t} + 2 \left(\frac{1}{t} - \frac{t^3 A^2(t)}{\nu^4(t)} \right) dt = 0$$

Таким образом, напряженно-деформированное состояние полностью определено. Относительные продольное и радиальное смещения, а так же зависимость продольного смещения внешней обоймы от приложенной нагрузки (жесткостная характеристика) имеют вид

$$\omega(\rho) = 2q \int_1^\rho \frac{dt}{\left[(1+\beta)t + (1-\beta) \frac{\nu^2(t)}{t} \right]}, \quad \nu(\rho) = \sqrt{\eta + \frac{2\rho^2 A(\rho)}{2+b}}$$

$$\delta = 2q \int_1^{\kappa} \frac{d\rho}{\left[(1 + \beta)\rho + (1 - \beta) \frac{v^2(\rho)}{\rho} \right]}$$

Относительные касательное, радиальное и тангенциальное напряжения записываются в форме

$$\begin{aligned} \sigma_{RZ} &= \frac{q}{v(\rho)}, \quad \sigma_{RR} = \frac{1}{2} \int_1^{\rho} (1 - \beta) \frac{\dot{\omega}^2(t)}{t} + 2 \left(\frac{1}{t} - \frac{t^3 A^2(t)}{v^4(t)} \right) dt \\ \sigma_{\Phi\Phi} &= \frac{1}{2} \left\{ \int_1^{\rho} (1 - \beta) \frac{\dot{\omega}^2(t)}{t} + 2 \left(\frac{1}{t} - \frac{t^3 A^2(t)}{v^4(t)} \right) dt + \left[(1 + \beta) \frac{v^2(\rho)}{\rho^2 A(\rho)} - (1 - \beta) \frac{\rho^2 A(\rho)}{v^2(\rho)} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \left[(1 + \beta) \frac{\rho^2 A(\rho)}{v^2(\rho)} - (1 - \beta) \frac{v^2(\rho)(1 + \dot{\omega}^2(\rho))}{\rho^2 A(\rho)} \right] \right\} \end{aligned}$$

3.2. Вычисления. В качестве значения коэффициента линейного расширения для эластомеров примем $\alpha = 2 \times 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ [22]. Недеформированной конфигурации соответствует однородная температура $T_0 = 293 \text{ K}$. Значение разностной температуры на внутренней поверхности $\theta_1 = T_1 - T_0$ возьмем равным нулю. Значение разностной температуры на внешней поверхности $\theta_2 = T_2 - T_0$ возьмем равным 60°C . Отсутствию дополнительного температурного поля соответствует разностная температура на внешней поверхности $\theta_2 = 0^\circ\text{C}$.

Следует отметить влияние параметра β . При $\beta = 1$ потенциал энергии деформации Муни–Ривлина переходит в потенциал Трелоара $W = 0.5\mu(I_1 - 3)$, зависящий только от первого инварианта. Для такой модели материала при $\theta = 0$ поля напряжений и перемещений в поперечной плоскости не выявляются, и напряженно-деформированное состояние является антиплоским. С ростом θ проявляются поля напряжений и перемещений в поперечной плоскости, связанные с тепловым расширением, и напряженно-деформированное состояние является цилиндрическим (то есть комплексом из плоской и антиплоской деформации [21]). С уменьшением β от 1 до -1 появляется зависимость от I_2 и при $\beta = -1$ потенциал энергии деформации зависит только от I_2 . Поля напряжений и перемещений в поперечной плоскости проявляются даже при $\theta = 0$, то есть поле в поперечной плоскости порождается продольным сдвигом, и плоская и антиплоская составляющие цилиндрической деформации связаны. Рост температуры усиливает этот эффект.

Для $[q = 1, \kappa = 2]$ на рис. 1 представлено удельное радиальное смещение $u = v(\rho) - \rho$ для $\beta = 1$ (а) и $\beta = -0.95$ (б). Кривая 1 соответствует $\theta = 60^\circ\text{C}$, а кривая 2 – $\theta = 0^\circ\text{C}$. Для $[q = 1, \beta = 1, \kappa = 2]$ на рис. 2 представлены распределения относительных радиальных (а) и тангенциальных (б) напряжений. Кривая 1 соответствует $\theta = 60^\circ\text{C}$, а кривая 2 – $\theta = 0^\circ\text{C}$. Для $[q = 1, \beta = -0.95, \kappa = 2]$ на рис. 3 представлены распределения относительных радиальных (а) и тангенциальных (б) напряжений. Кривая 1 соответствует $\theta = 60^\circ\text{C}$, а кривая 2 – $\theta = 0^\circ\text{C}$. На рис. 4 представлены распределения касательного напряжения сдвига для $[q = 1, \beta = -0.95, \kappa = 2]$ (а) и кривые жесткости для $[\beta = -0.95, \kappa = 2]$ (б). Кривая 1 соответствует $\theta = 60^\circ\text{C}$, а кривая 2 – $\theta = 0^\circ\text{C}$.

4. Заключение. Предложена модификация постановки задачи статики однородного изотропного несжимаемого материала при конечных деформациях, учитывающая тепловое расширение. Рассмотрено влияние теплового расширения в неоднородном стационарном температурном поле на неоднородное напряженно-деформированное

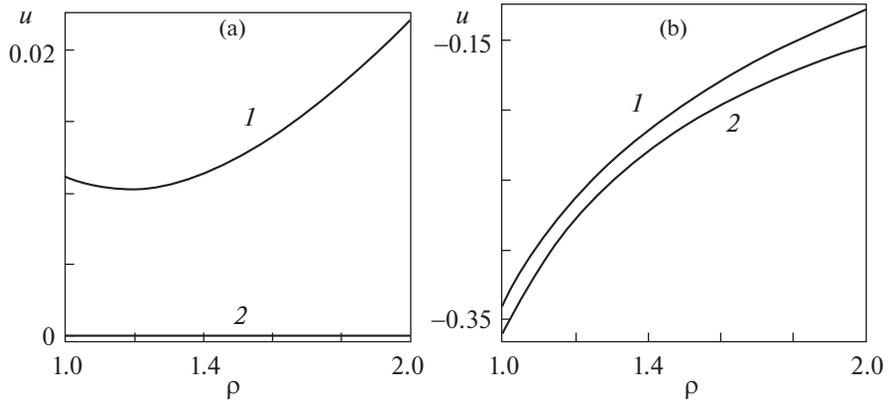


Рис. 1

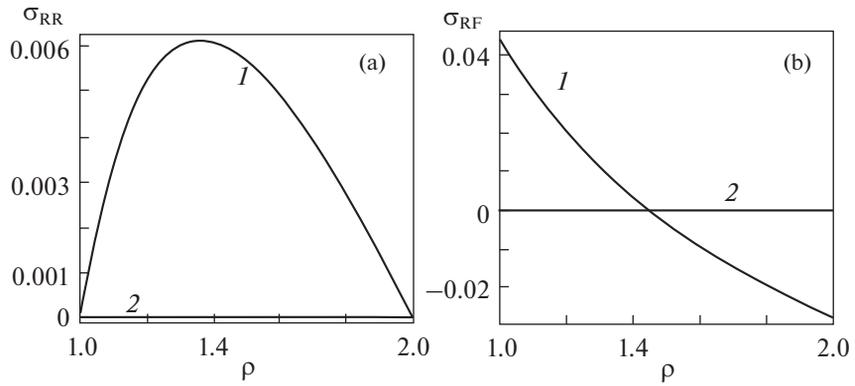


Рис. 2

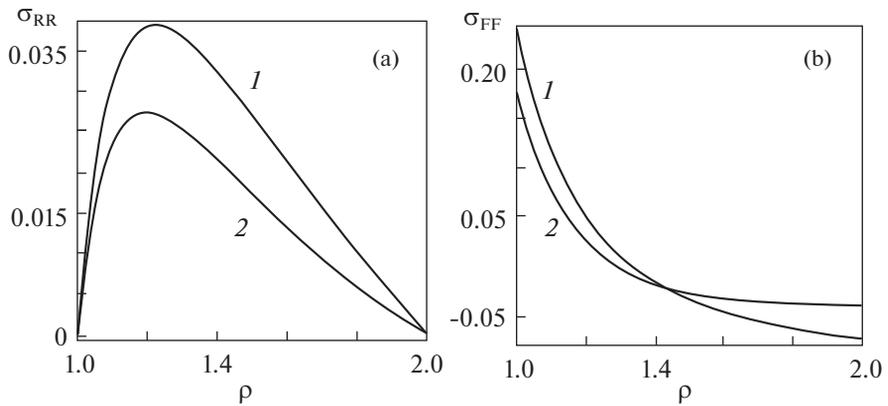


Рис. 3

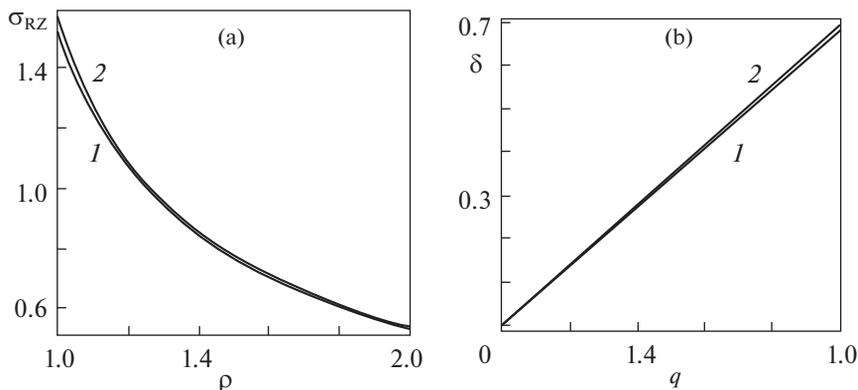


Рис. 4

состояние тела на примере цилиндрической втулки, подвергнутой конечному продольному сдвигу. Исследовано влияние неоднородного поля температур на напряженно-деформированное состояние в поперечной плоскости, порожденное как конечным продольным сдвигом, так и тепловым расширением.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
2. Truesdell C., Noll W. The Non-linear Field Theories of Mechanics. N.Y.: Springer, 2003. 602 p.
3. Macon J.D. Thermal and mechanical behavior of rubber systems. (1997). Doctoral Dissertations 1896 – February 2014. 95. 956 p. http://scholarworks.umass.edu/dissertations_1/956.
4. Dippel B., Johlitz M., Lion A. Thermo-mechanical couplings in elastomers – experiments and modelling // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2015. V. 95. No. 11. P. 1117–1128. DOI: 10.1002/zamm.201400110.
5. Nicholson D.W., Lin B. Theory of the termohyperelasticity for near-incompressible elastomers // Acta Mechanica. 1996. V. 116. Issue 1–4. P. 15–28. <https://doi.org/10.1007/BF01171417>
6. Жуков Б.А. Влияние однородного стационарного температурного поля на напряженно-деформированное состояние эластомеров при статических конечных деформациях // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 6. С. 136–147.
7. Chadwick P. Thermo-mechanics of rubberlike materials // Phll. Trans. Soc. Lond. A. 1974. V. 276. P. 371–403. <https://doi.org/10.1098/rsta.1974.0026>
8. Ogden R.W. On the thermoelastic modeling of rubberlike solids // Journal of Thermal Stresses. 1992. V. 15. P. 533–557. DOI: 10.1080/01495739208946155.
9. Пальмов В.А. Определяющие уравнения термоупругих, термовязких и термопластических материалов: учеб. пособие / В.А. Пальмов. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2009. 138 с.
10. Chen D.D., Petroski H.J. Controllable states of elastic heat conductors obeying a Fourier law // Int. J. Eng. Sci. 1975. V. 13. P. 799–814.
11. Muller W.C. Universal solutions for thermodynamic Fourier material // Quarterly of applied mathematics. 1975. October. P. 281–290.
12. Saccomandi G. On inhomogeneous deformations in finite thermoelasticity // IMA Journal of Applied Mathematics. 1999. V. 63. P. 131–148.
13. Petroski H.J. On the finite deformation and heating of thermoelastic spherical sectors // Int. J. Non-Linear Mechanics. 1975. V. 10. P. 327–332.
14. Horgan C., Saccomandi G. Finite thermoelasticity with limiting chain extensibility // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2003. V. 51. P. 1127–1146.

15. *Gurtin M.E., Guidugli P.P.* Thermodynamics of Constrained Materials // Arch. Rat. Mech. Anal. 1973. V. 51. 192–208.
16. *Erbe H.H.* Thermoelastic effects in incompressible elastic solids // Mech. Res. Commun. 1974. V. 1. P. 137–142.
17. *Trapp J.A.* Reinforced materials with thermo-mechanical constraints // Int. J. Eng. Sci. 1971. V. 9. P. 757–773.
18. *Григолюк Э.И., Носатенко П.Я.* Плоское геометрически нелинейное напряженно-деформированное состояние цилиндра при сдвиге // Изв. вузов. Машиностроение. 1986. № 2. С. 28–31.
19. *Horgan C.* The importance of the second strain invariant in the constitutive modeling of elastomers and soft biomaterials // Mechanics of Materials. 2012. V. 51. P. 43–52. DOI: 10.1016 /j. mechmat.2012.03
20. *Жуков Б.А.* Плоское напряженно-деформированное состояние круговой цилиндрической втулки, порожденное конечным антиплоским сдвигом // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 1. С. 136–144.
21. *Жуков Б.А.* Нелинейное взаимодействие конечного продольного сдвига и конечного кручения втулки из резиноподобного материала // Изв. РАН. МТТ. 2015. № 3. С. 127–135.
22. *Бухина М.Ф.* Техническая физика эластомеров. М.: Химия, 1984. 224 с.