

УДК 539.376

**ПРИМЕНЕНИЕ НАСЛЕДСТВЕННОЙ ФОРМЫ  
ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ  
ПРИ ОПИСАНИИ ПРОЦЕССОВ ЦИКЛИЧЕСКОГО  
ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ МЕТАЛЛОВ**

© 2021 г. Г. З. Шарафутдинов

*Научно-исследовательский институт механики  
Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия  
e-mail: sharaf@imec.msu.ru*

Поступила в редакцию 28.09.2020 г.

После доработки 04.10.2020 г.

Принята к публикации 11.10.2020 г.

Предложенная ранее кусочно-линейная форма определяющих соотношений связи между напряжениями и деформациями была применена к описанию процессов циклического высокотемпературного деформирования металлов и сплавов в областях линейной и нелинейной вязкоупругости. Исследовалось поведение двух сплавов: жаропрочного и жаростойкого сплава ХН55МВЦ при температуре 900°С и дюралюминия Д16Т при температуре 150°С. Приводятся методики определения входящих в эти соотношения материальных функций и предела линейности по результатам экспериментальных исследований. Получены механические характеристики исследуемых сплавов и демонстрируется их применение при описании различных процессов деформирования, в том числе циклического деформирования в линейной и нелинейной областях при нагружении по кусочно-ступенчатому и синусоидальному законам.

*Ключевые слова:* высокотемпературное деформирование металлов, линейная и нелинейная вязкоупругость, одноосное растяжение стержней, кручение трубчатых образцов, циклическое деформирование

DOI: 10.31857/S0572329921010104

**1. Введение.** Хорошо известно, что металлы при повышенных температурах обладают свойством ползучести, при наличии которого в деформируемом материале развиваются необратимые вязкопластические деформации. Такие деформации не возникают изолированно; им предшествуют, начиная от исходного недеформированного состояния материалов, области упругого, линейно вязкоупругого и нелинейно вязкоупругого поведения. Наиболее адекватное описание процессов деформирования таких материалов, по мнению многих исследователей, изучавших эту проблему, возможно лишь при использовании определяющих соотношений связи между напряжениями и деформациями наследственного типа [1–6].

Определяющие соотношения наследственного типа, допускающие разделение процессов деформирования на указанные выше области и позволяющие корректно применять соответствующие им формы соотношений, предложены, в частности, в работе [7]. Основное достоинство такого подхода состоит не только в применении наследственных форм соотношений, представляющих собой альтернативу использованию дифференциальных форм определяющих соотношений при исследовании процессов

высокотемпературной ползучести металлов, но и в возможности ограничиться, при необходимости, определяющими соотношениями теории упругости, постепенно добавляя к ним, при увеличении деформирующих тело нагрузок и продолжительности их действия, соотношения линейной и нелинейной теории вязкоупругости и, наконец, теории вязкопластичности. Такой образ действий представляется оправданным, поскольку многие агрегаты и элементы конструкций функционируют при достаточно низких уровнях нагрузок, да и к тому же, не во всех конструкциях (например, в двигателях, турбинах и др.) допускаются необратимые пластические деформации.

Поскольку срок службы такого рода агрегатов и конструкций, как правило, достаточно высок, а их функционирование зачастую сопровождается вибрацией или какого-либо иного рода колебаниями, возникает необходимость их учета, наряду с действием других постоянных или изменяющихся во времени нагрузок. В связи с этим возникают два вида проблем; первая из них связана с разработкой способов описания процессов циклического деформирования металлов при высоких температурах, вторая – с разработкой методов и способов описания процессов сложного нагружения при совместном действии не связанных между собой нагрузок, в том числе, и различной природы.

Заметим также, что циклическое деформирование металлов, тем более при высоких температурах, зачастую происходит при относительно низких уровнях напряжений, в силу чего изучение и разработку методик описания процессов циклического деформирования в подобных ситуациях следует начинать, по нашему мнению, с применения наследственных форм определяющих соотношений линейной, а затем и нелинейной вязкоупругости. Полезность такого подхода, с методической точки зрения, очевидна, как и то, что эта проблема, наряду с перечисленными здесь другими проблемами, актуальна, и именно она будет предметом дальнейшего изложения.

**2. Изучение процессов деформирования сплава ХН55МВЦ при температуре 900°С.** Коррозионностойкий, жаростойкий и жаропрочный сплав ХН55МВЦ (другие его обозначения – ХН55МВЦ-ВИ, ЧС57, ЧС57У-ВИ, ЧС57-ВИ) имеет широкое применение, поскольку может быть использован в нагруженном состоянии, и при высоких температурах, и в химически активных средах. Эксплуатационные свойства сплава ХН55МВЦ: диапазон температур – до 1100°С; модуль упругости 120000–210000 МПа; предел прочности – 230–485 МПа; предел текучести – 127–170 МПа; относительное удлинение – 42–58%; относительное сужение – 53–82%.

На рис. 1, на котором по оси абсцисс отложено время  $t$  (здесь и далее, на всех рисунках, – в часах), а по оси ординат – деформация  $\epsilon$ , результаты экспериментального исследования процесса ползучести сплава ХН55МВЦ при температуре 900°С, полученные в работе [8] при ступенчатом нагружении стержней для уровня напряжения 20 МПа, отмечены крестиками.

Предел текучести сплава ХН55МВЦ при температуре 900°С равен 163 МПа, что существенно выше действующего напряжения (20 МПа), а мгновенная деформация ограничена значением 0.0001–0.00015. По этой причине и в силу низкого уровня нагрузки заключаем, что деформирование производится в линейной области. При этом определяющее соотношение связи между напряжением  $\sigma$  и деформацией  $\epsilon$  запишем в виде

$$\epsilon(t) = \int_0^t \Pi(t - \tau) d\sigma(\tau) \quad (2.1)$$

где  $t$  – время,  $\Pi(t)$  – функция ползучести. Заметим, что стандартная процедура определения линейной области поведения вязкоупругого материала предусматривает проведение серии экспериментов при различных уровнях нагрузки в окрестности нуля и установления на этой основе границ области, при переходе которой происходит нарушение условий однородности и аддитивности поведения материала. Такая граница

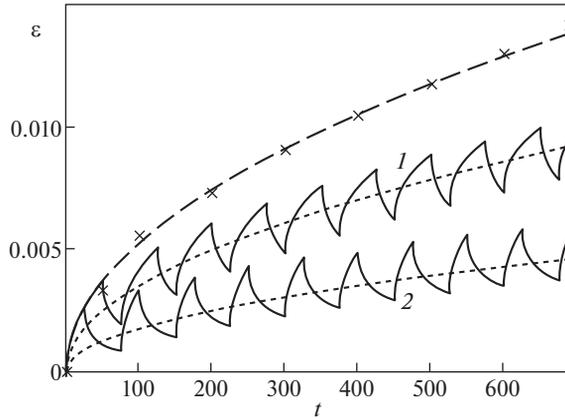


Рис. 1

как раз и позволяет выделить область линейного поведения материала, в которой справедливо применение соотношения (2.1). Именно отсутствие результатов достаточно подробных экспериментальных исследований такого рода вынуждают искать альтернативные пути, в силу чего в данном случае линейная функция ползучести была определена по единственной диаграмме ползучести, полученной при низком, относительно значения предела текучести, действующем напряжении.

Поскольку тарировочные эксперименты в работе [8] производились при ступенчатом приложении напряжения, т.е. при

$$\sigma(t) = \sigma_0 h(t) \tag{2.2}$$

где  $h(t)$  – функция Хевисайда, то из приведенных в этой работе экспериментальных данных при помощи соотношения (2.1) легко находим линейную функцию ползучести:

$$\Pi(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0}$$

Ее график – на рис. 2. Из приведенных выше данных можно заключить, что  $\Pi(0) < 10^{-5}$ , в силу чего при практическом использовании функции ползучести будем считать, что  $\Pi(0) = 0$ ; при этом аппроксимируем ее выражением

$$\Pi(t) = 2.63 \times 10^{-5} \sqrt{t} \tag{2.3}$$

Диаграмма ползучести, рассчитанная с использованием выражения (2.3), при нагружении по закону (2.2) при значении  $\sigma_0 = 20$  МПа, представлена штриховой линией на рис. 1.

На рис. 1 приведены также диаграммы ползучести материала для двух случаев циклического нагружения. Они были получены при помощи соотношения (2.1), в котором закон изменения напряжения принимался в виде

$$\sigma(t) = \sigma_0 \sum_{k=0}^n [h(t - t_{2k}) - h(t - t_{2k+1})]$$

$$t_{2k} = 0 + 75k; \quad t_{2k+1} = 50 + 75k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \text{ в первом случае и} \tag{2.4}$$

$$t_{2k} = 0 + 75k; \quad t_{2k+1} = 25 + 75k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \text{ – во втором.}$$

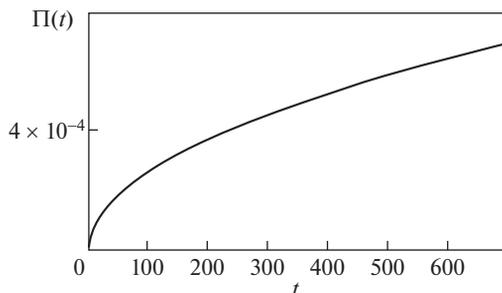


Рис. 2

На начальном этапе нагружения, при  $t \leq 25$  ч, в обоих случаях деформации определяются одним и тем же значением  $\sigma_0$ , но далее различаются длительностями пауз нагрузки и разгрузки: в первом случае они равны 50 ч и 25 ч, во втором – 25 ч и 50 ч соответственно. Используя понятие “эффективное напряжение” из электротехники применительно к механике деформируемого тела, эффективное (механическое) напряжение определим соотношением

$$\sigma_{ef}^{(1)} = 2\sigma_0/3 \quad (2.5)$$

в первом случае и соотношением

$$\sigma_{ef}^{(2)} = \sigma_0/3 \quad (2.6)$$

– во втором. Диаграммы циклического деформирования для первого и второго случаев, при законе нагружения (2.4) для случая  $\sigma_0 = 20$  МПа, на рис. 1 отмечены цифрами 1 и 2 соответственно. Следует отметить, что полученные здесь расчетные диаграммы циклического деформирования отражают основные особенности экспериментальной диаграммы циклического деформирования, полученной в [8] при реализации закона нагружения (2.4). Обозначенные выше как эффективные, диаграммы ползучести, полученные при помощи соотношения (2.1), в случае реализации законов нагружения (2.5) и (2.6) при  $\sigma_0 = 20$  МПа, представлены пунктирными линиями, наложенными на соответствующие диаграммы циклического деформирования.

Из приводимых на рис. 1 данных видно, что эффективные диаграммы ползучести ни в чем не противоречат линейному закону деформирования, выражаемому соотношением (2.1), полностью удовлетворяя условиям однородности и аддитивности – свойствам, присущим линейным операторам. По нашему мнению, эффективные диаграммы ползучести в некоторых случаях, путем проверки выполнения условий однородности и/или аддитивности, могут быть полезными для контроля результатов исследований.

Рассчитаем теперь диаграммы циклического деформирования исследуемого сплава при перемене знака прикладываемого напряжения. Рассмотрим сначала ступенчатое изменение прикладываемой нагрузки. Будем считать, что закон изменения напряжения, обеспечивающего одноосное растяжение-сжатие стержня, задается соотношением

$$\sigma(t) = \sigma_0[h(t - t_0) - 2h(t - t_1) + 2h(t - t_2) - 2h(t - t_3) + \dots] \quad (2.7)$$

где  $t_k = 0 + 50k$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots$  Подставляя (2.7) при заданном значении  $\sigma_0 = 20$  МПа в определяющее соотношение (2.1), получим кривую деформирования, представленную сплошной линией на рис. 3.

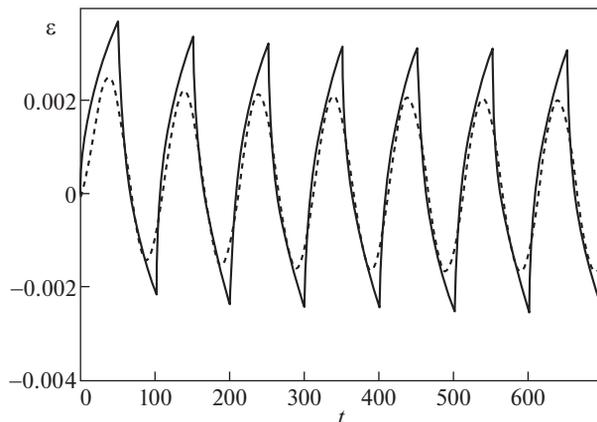


Рис. 3

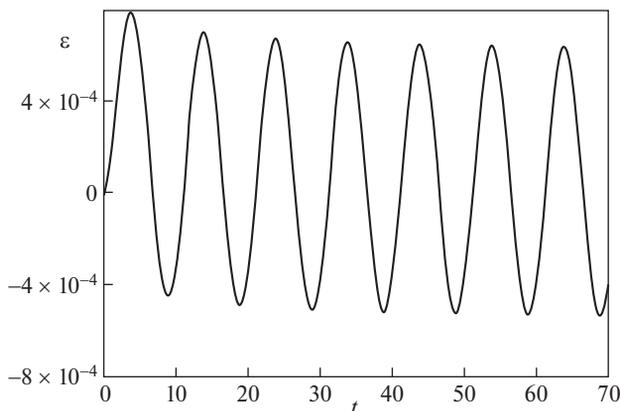


Рис. 4

На этом же рисунке пунктирной линией представлена диаграмма деформирования, полученная путем интегрирования соотношения (2.1) после подстановки в него синусоидально изменяющейся нагрузки

$$\sigma(t) = 20 \sin \alpha t$$

где  $\alpha = 2\pi/100$ . Применение этого же закона нагружения для случая  $\alpha = 2\pi/10$  приводит к кривой деформирования на рис. 4. Следует обратить внимание на существенное различие амплитуд, полученных при одном и том же значении действующего напряжения, кривых деформирования, представленных на рис. 3 и 4. Нетрудно понять, что причина этого состоит в изменении длительности периода колебаний напряжения и, по нашему мнению, объясняется свойством наследственности используемой формы определяющего соотношения, но не эффектами упрочнения или разупрочнения материала, тем более, деформируемого в линейной области его поведения.

**3. Изучение процессов ползучести при циклическом кручении тонкостенных трубчатых образцов.** Для изучения процессов деформирования в более сложном случае – при

прямом и обратном кручении тонкостенных трубчатых образцов в области линейного и нелинейного вязкоупругого поведения обратимся к результатам экспериментальных исследований по кручению тонкостенных трубок, выполненных из алюминиевого сплава Д16Т, при температуре 150°C [9].

Использованный в работе [9] материал был взят в состоянии поставки – в закаленном и естественно состаренном состоянии. При этом, исходя из широко представленных в сети справочных и рекламных материалов, примем следующие упругие характеристики сплава Д16Т для температуры 150°C: модуль упругости  $E = 68200$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0.33$ . Нетрудно определить модуль сдвига  $G = 25600$  МПа. Типичные предельные характеристики сплава Д16Т: предел прочности при растяжении  $\sigma_B = 410\text{--}440$  МПа, предел текучести  $\sigma_{0.2} = 280\text{--}300$  МПа.

Эксперименты в работе [9] проводились на трубчатых образцах с внешним диаметром 15.5 мм, внутренним – 14 мм и рабочей частью длиной 100 мм. Эксперименты выполнялись по следующей программе. К образцу прикладывался крутящий момент, создающий напряжение  $\sigma = \text{const}$ , где  $\sigma$  представляет собой касательное напряжение  $\sigma_{\theta z}$  (в цилиндрической системе координат  $r\theta z$ ), удерживаемое на постоянном уровне в течение 50 ч. Затем образец разгружался, после чего нагружался таким же по величине, но обратным по направлению крутящим моментом, создающим в образце напряжение  $-\sigma = \text{const}$ , и испытывался еще 50 ч.

Для анализа вязкоупругих характеристик деформируемого материала в настоящей работе были использованы результаты экспериментов [9], полученных при деформировании образцов с номерами 19, 7, 10, 4 и 16, при значениях напряжения  $\sigma$ , равных 101.1; 115.6; 130; 140 и 147.4 МПа соответственно. Припишем этим экспериментам последовательные номера от 1 до 5 и будем нумеровать ими, при необходимости, величины и графические данные, относящиеся к каждому из этих экспериментов.

Исходная экспериментальная информация – диаграммы ползучести во временном промежутке от 0 до 50 ч, приведены в работе [9] без учета мгновенной упругой деформации. Ее величина определяется путем деления действующего напряжения на  $2G$ :  $\varepsilon_k(0) = \sigma_k/2G$ ,  $k = 1, 2, \dots, 5$ . Эти величины, в сумме с конкретными значениями экспериментально полученных диаграмм ползучести для моментов времени  $t = 0; 2; 6; 10; 14; 20; 30; 40$  и 50 ч приведены на рис. 5. Здесь они обозначены крестиками, расположенными около сплошных кривых диаграмм ползучести, которые в представленном виде были получены далее расчетным путем; кривые и крестики обозначены номерами 1–5 в соответствии с принятым выше соглашением. Таким образом, будем исходить из того, что имеются наборы (крестики) дискретных значений экспериментально полученной деформации для пяти разных уровней напряжений, обозначенных соответствующими номерами.

Основная задача, возникающая в подобных случаях при использовании определяющих соотношений наследственного типа, состоит в определении необходимых функций ползучести и предельных параметров [7]. В первую очередь необходимо определить линейную функцию ползучести. Наиболее просто это можно сделать, ориентируясь на выполнение условий однородности и аддитивности. В частности, много полезной информации, на наш взгляд, можно получить из анализа отношений деформаций  $\varepsilon$ , полученных в экспериментах на ползучесть к ступенчато задаваемому напряжению  $\sigma$ :  $p = \varepsilon/\sigma$ . Эти величины для пяти указанных значений напряжений приведены на рис. 6, на котором экспериментальные данные, относящиеся к эксперименту № 1 обозначены крестиками, № 2 – знаками плюс, № 3 – квадратиками, № 4 – ромбиками и № 5 – кружками. Непосредственно из этого рисунка можно заключить следующее: в первую очередь, необходимо было бы провести дополнительные исследования, может быть, несколько экспериментов при значении напряжения  $\sigma < \sigma_1$ , результаты которых позволили бы установить область, в которой выполняются условия

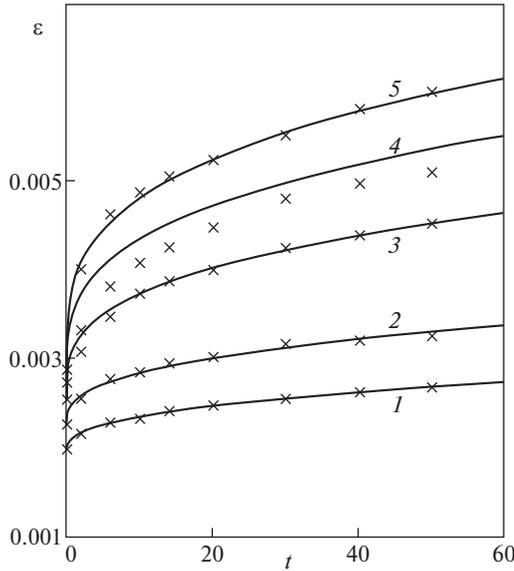


Рис. 5

однородности и аддитивности и, используя эту информацию, найти линейную функцию ползучести.

Другой важный момент связан с выбором используемых форм определяющих соотношений. Действительно, из рис. 5 легко устанавливается необходимость применения нелинейных форм соотношений. Вместе с тем, легко устанавливается также и ограничение: поскольку предел текучести сплава Д16Т при указанной температуре равен, по крайней мере, 280 МПа, а максимальное значение используемого в экспериментальных исследованиях напряжения  $\sigma_5 = 147.4$  МПа, можно заключить, что в данном случае достаточно ограничиться соотношениями нелинейной теории вязкоупругости.

В работе [7] предложены практически равноценные между собой компактная и кусочно-линейная форма определяющих соотношений нелинейной теории вязкоупругости. Там же подробно рассматривается процедура их применения; по этой причине на этих вопросах здесь останавливаться не будем. Для определенности выберем соотношения кусочно-линейной теории вязкоупругости. Применительно к нашему случаю такое соотношение примет вид:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t - \tau) d\sigma(\tau) + \int_0^t \Pi_1(t - \tau) d[\sigma(\tau) - \sigma^{(1)}] \quad (3.1)$$

где под  $\varepsilon$  в данном случае будем понимать компоненту тензора (девиатора) деформации  $\varepsilon_{\vartheta z}$  ( $e_{\vartheta z}$ ), а под  $\sigma$  – компоненту девиатора напряжений  $s_{\vartheta z}(\tau)$ ,  $\sigma^{(1)}$  – предел линейности,  $\Pi(t)$  – линейная функция ползучести,  $\Pi_1(t)$  – нелинейная функция ползучести.

Линейная функция ползучести определяется в линейной области поведения деформируемого материала, устанавливаемой по выполнению условий однородности и аддитивности, при помощи первого слагаемого в правой части соотношения (3.1) при задании действующего постоянного напряжения с помощью функции Хевисайда  $h(t)$ :  $\sigma(t) = \sigma_0 h(t)$ . Как правило, при достаточно широком наборе экспериментальных данных при наиболее низких значениях напряжения  $\sigma_0$  несколько диаграмм ползучести,

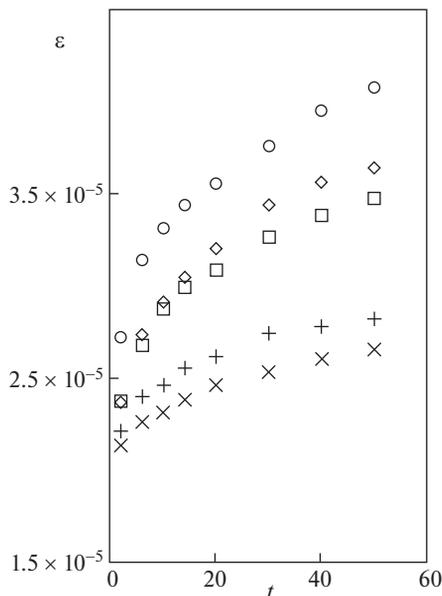


Рис. 6

будучи поделенными, как это следует из соотношения (2.1), на  $\sigma_0$ , совпадут, что сразу же и определяет линейную функцию ползучести:

$$\Pi(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} \quad (3.2)$$

В нашем случае, как это следует из рис. 6, такого не происходит, и поэтому следовало бы провести несколько экспериментов при значениях  $\sigma_0 < 101.1$  МПа. Поскольку это невозможно, предложим несколько иной путь. В силу незначительного отклонения диаграммы 2 от диаграммы 1 на рис. 5 можно предположить, что диаграмма 1 позволяет установить линейную функцию ползучести, что мы и проверим, приняв это предположение. С этой целью, используя диаграмму 1, при помощи соотношения (3.2) определим линейную функцию ползучести; она представлена на рис. 7. Здесь кривая, построенная по экспериментальным данным, отмечена крестиками, сплошная линия иллюстрирует ее аналитическую аппроксимацию

$$\Pi(t) = 1.95 \times 10^{-5} + 1.48 \times 10^{-6} t^{0.4} \quad (3.3)$$

Определим теперь нелинейную функцию ползучести  $\Pi_1(t)$  [7]. Для этого возьмем экспериментальные данные – значения диаграмм ползучести 3 и 5, представленные на рис. 5 крестиками с соответствующими номерами. Из соотношения (3.1) имеем

$$\Pi_1(t)[\sigma_0 - \sigma^{(1)}] = \varepsilon(t) - \Pi(t)\sigma_0$$

Тогда при помощи выбранных диаграмм ползучести получим систему уравнений:

$$\Pi_1(t)[\sigma_3 - \sigma^{(1)}] = \varepsilon_3(t) - \Pi(t)\sigma_3 \quad (3.4)$$

$$\Pi_1(t)[\sigma_5 - \sigma^{(1)}] = \varepsilon_5(t) - \Pi(t)\sigma_5 \quad (3.5)$$

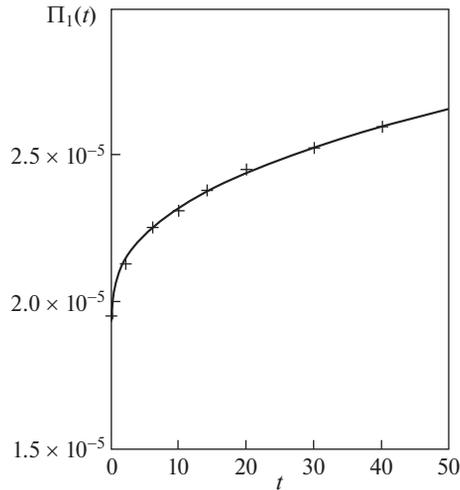


Рис. 7

Разделив первое из этих уравнений на второе, получим уравнение

$$\frac{\sigma_3 - \sigma^{(1)}}{\sigma_5 - \sigma^{(1)}} = \frac{\varepsilon_3(t) - \Pi(t)\sigma_3}{\varepsilon_5(t) - \Pi(t)\sigma_5}$$

Из него находим выражение для предела линейности  $\sigma^{(1)}$ :

$$\sigma^{(1)} = \frac{\sigma_3 - A\sigma_5}{1 - A}, \quad A = \frac{\varepsilon_3(t) - \Pi(t)\sigma_3}{\varepsilon_5(t) - \Pi(t)\sigma_5}$$

Его значения для фиксированных моментов времени в промежутке от 10 до 50 ч изменяются в пределах от 110.3 до 112.7 МПа, в силу чего принимаем  $\sigma^{(1)} = 111.5$  МПа. Нелинейная функция ползучести  $\Pi_1(t)$  может быть получена, как при помощи уравнения (3.4), так и при помощи уравнения (3.5). Расчетные, определенные по результатам экспериментов, значения нелинейной функции ползучести  $\Pi_1(t)$  в фиксированные моменты времени отмечены крестиками на рис. 8. Сплошной линией здесь представлен график ее аналитической аппроксимации:

$$\Pi_1(t) = 2.17 \times 10^{-5} \sqrt[5]{t} \tag{3.6}$$

Таким образом, нами получены функции линейной и нелинейной ползучести  $\Pi(t)$ ,  $\Pi_1(t)$  соответственно и предел линейности  $\sigma^{(1)} = 111.5$  МПа, что позволяет, используя соотношение (3.1), построить и сравнить расчетные и экспериментальные диаграммы ползучести для значений напряжения  $\sigma$ , равных 101.1; 115.6; 130; 140 и 147.4 МПа. Дискретные значения экспериментальных диаграмм отмечены крестиками на рис. 5, расчетные – приведены в виде сплошных линий. Отметим хорошее совпадение экспериментальных и расчетных данных всех диаграмм, за исключением диаграммы 4. Следует отметить, однако, что, судя по данным, представленным на рис. 6, этот эксперимент нельзя признать удачным. Таким образом, предположение о возможности использования диаграммы ползучести  $I$  для определения линейной функции ползучести справедливо.

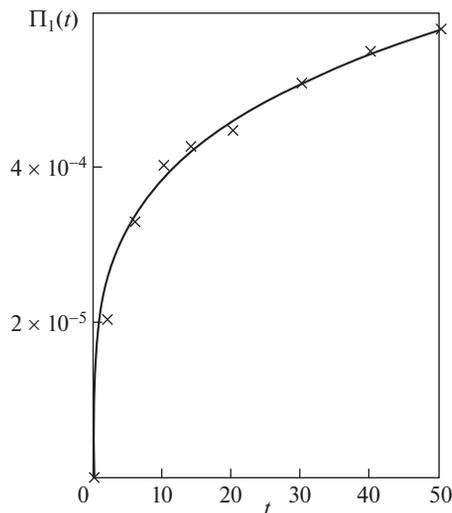


Рис. 8

Обратимся теперь ко второй части эксперимента, в ходе которой нагруженный трубчатый образец разгрузался, а затем нагружался в промежутке времени от 50 до 100 ч таким же по величине, но обратным по направлению постоянным крутящим моментом. При этом, для обратного кручения время отсчитывается от момента, когда напряжение меняет знак [9]. В этой работе приведены диаграммы ползучести при обратном кручении для экспериментов, обозначенных нами номерами 2–5. Диаграмма ползучести при обратном кручении под номером 1 на этой стадии эксперимента представлена только небольшим начальным участком, в силу чего она была исключена из рассмотрения и на рис. 9 представлены только экспериментальные значения деформаций, полученные во втором, третьем, четвертом и пятом экспериментах; они отмечены соответственно кружочками, крестиками, квадратиками и плюсиками.

Для получения расчетных диаграмм ползучести при обратном кручении обратимся к определяющему соотношению (3.1). Из структуры этого соотношения видно, что функции ползучести и предел линейности должны быть непосредственно определены в ходе прямых экспериментов в промежутке времени от 0 до 100 ч. Поскольку скоро этого в экспериментах в [9] сделано не было, предположим, что полученные аппроксимации функций ползучести достоверны во всем указанном промежутке времени. Кроме того, обратим внимание на то, что состояние нагрузки при обратном кручении в данном случае достигается заданием постоянного напряжения  $-2\sigma_0$  при  $t \geq 50$  ч. Тогда, в соответствии со сделанным предположением, при продолжении нагружения при  $t > 50$  ч в данном случае имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = & \int_0^t \Pi(t - \tau) d\sigma(\tau) + \int_0^t \Pi_1(t - \tau) d[\sigma(\tau) - \sigma^{(1)}] - \\ & - 2 \int_{50}^t \Pi(t - \tau) d\sigma(\tau) - 2 \int_{50}^t \Pi_1(t - \tau) d[\sigma(\tau) - \sigma^{(1)}] \end{aligned}$$

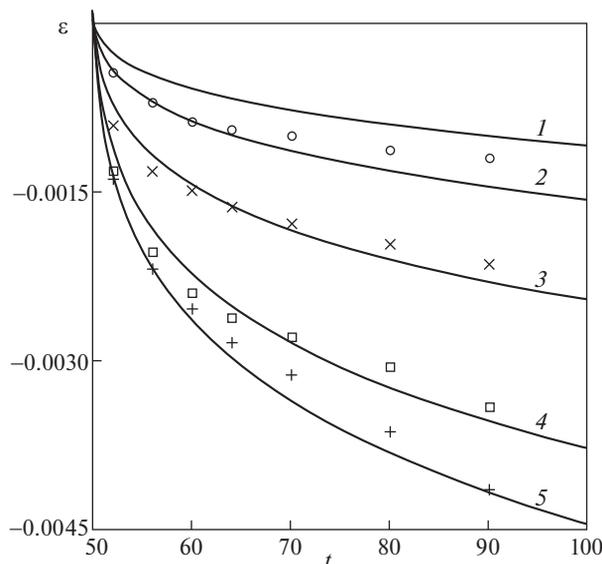


Рис. 9

Расчетное соотношение, в котором используются выражения (3.3) и (3.6), при учете задания напряжений при помощи функции Хевисайда, примет вид

$$\varepsilon(t) = \Pi(t)\sigma_0 + \Pi_1(t)[\sigma_0 - \sigma^{(1)}] - 2\{\Pi(t - 50)\sigma_0 + \Pi_1(t - 50)[\sigma_0 - \sigma^{(1)}]\} h(t - 50) \quad (3.7)$$

Следует отметить, нами были учтены замечания автора работы [9] о том, что обратное кручение в третьем эксперименте производилось при напряжении  $|\sigma| = 122.2$  МПа вместо положенных 130 МПа и отсчет времени при обратном кручении начинался с того момента, когда напряжение меняет знак.

Полученные при обратном кручении экспериментальные данные также очень полезны для анализа применения различных форм определяющих соотношений при высокотемпературном деформировании металлов. Здесь они характеризуют только деформации ползучести, развивающиеся в трубчатом образце после перемены знака, без учета мгновенной упругой деформации. Это следует из того, что представленные в работе [9] диаграммы ползучести при обратном кручении начинаются с нуля, что и указывает на отсутствие мгновенных деформаций.

Соотношение (3.7) предполагает начало отсчета обратного кручения строго при  $t = 50$  ч. Однако в реальном эксперименте реверс займет некоторое время; для определенности примем эту величину равной 5–6 мин. Таким образом, при расчете деформаций ползучести при обратном кручении начало отсчета времени примем равным 50.1 ч.

Как уже указывалось выше, использованные нами эксперименты, обозначенные номерами 1–5 соответственно, производились при значениях напряжения  $\sigma$ , равных 101.1; 115.6; 130; 140 и 147.4 МПа. При этом в первом эксперименте деформации ползучести при обратном кручении не определялись и сравнение экспериментальных и расчетных величин в этом случае не производилось. На рис. 9 сплошными кривыми под номерами 1–5 обозначены расчетные диаграммы ползучести для всех указанных случаев нагружения, однако экспериментальные данные приведены только для второго и последующих экспериментов.

Одним из важных приложений применения интегральных форм определяющих соотношений наследственного типа, несомненно, следует признать возможность их использования при описании процессов циклического деформирования, не связывая форму определяющих соотношений с видом используемого при их получении и в тарировочных испытаниях закона нагружения. Такие процессы характерны, по нашему мнению, для длительно работающих элементов конструкций. При этом наибольший интерес представляет область линейного вязкоупругого деформирования. Заметим, что нельзя исключать возможность их работы и в области нелинейного вязкоупругого деформирования, особенно в тех случаях, когда это связано с повышением эффективности работы различного рода двигателей, турбин и т.п. Наиболее важно — не допускать появления необратимых вязкопластических деформаций, не исчезающих после снятия нагрузок.

Продемонстрируем процедуру применения соотношений указанного типа, основываясь на определенных выше механических характеристиках алюминиевого сплава Д16Т при температуре 150°C. В качестве примеров рассмотрим два вида нагрузок: напряжения изменяются циклически, ступенчато и по синусоидальному закону с амплитудой 100 МПа в линейном случае и 200 МПа — в нелинейном, с периодом 10 ч. Исходя из этого, временной интервал исследования ограничим 15 ч.

Ступенчатая нагрузка задается так: при  $t = 0^+$  она выводится на уровень 100 (200) МПа и удерживается на нем в течение 5 ч. Затем задается удвоенное отрицательное напряжение, в результате чего действующее напряжение становится равным  $-100$  ( $-200$ ) МПа и на таком уровне оно удерживается в промежутке от 5 до 10 ч. Далее, в промежутке от 10 до 15 ч напряжение выводится и удерживается на уровне 100 (200) МПа и т.д. Синусоидальная нагрузка задается законом

$$\sigma(t) = \sigma_0 \sin(\alpha t) \quad (3.8)$$

где величина  $\sigma_0$  равна 100 МПа в первом случае или 200 МПа — во втором, а  $\alpha = 2\pi/10$ .

Исходя из условий приложения нагрузки, при ступенчатом нагружении в линейном случае ( $\sigma_0 = 100$  МПа) имеем

$$\varepsilon(t) = \sigma_0[\Pi(t) - 2\Pi(t - 5) + 2\Pi(t - 10)] \quad (3.9)$$

в нелинейном же задаем  $\sigma_0 = 200$  МПа, и тогда

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = & \sigma_0[\Pi(t) - 2\Pi(t - 5) + 2\Pi(t - 10)] + \\ & + (\sigma_0 - \sigma^{(1)})[\Pi_1(t) - 2\Pi_1(t - 5) + 2\Pi_1(t - 10)] \end{aligned} \quad (3.10)$$

Графики зависимостей (3.9) и (3.10) представлены на рис. 10 пунктирной и штрих-пунктирной кривыми соответственно.

Расчетная зависимость деформаций от напряжений при нагружении по закону (3.8) в линейном случае примет вид:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \int_0^t \Pi(t - \tau) d[\sin(\alpha\tau)]$$

Ее график представлен штриховой линией на рис. 10. Существенно более сложный вид имеет зависимость деформации от напряжения при использовании соотношения (3.8) в нелинейном случае, которую, при учете принятых предположений, представим в виде:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \int_0^t \Pi(t - \tau) d[\sin(\alpha\tau)] + F_1(t) + F_2(t) + F_3(t)$$

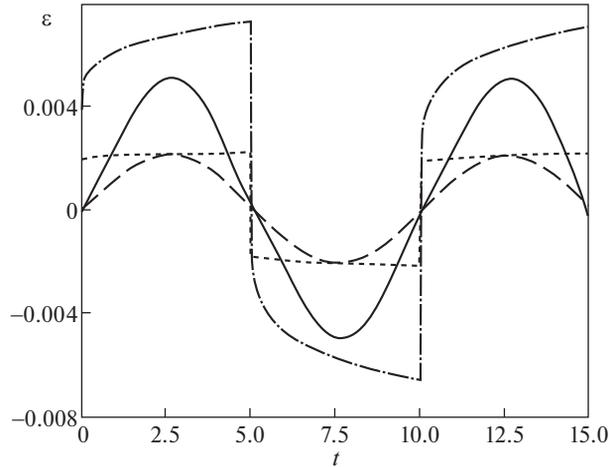


Рис. 10

В этом соотношении напряжению  $\sigma_0$  в рассматриваемом случае придается значение 200 МПа, и

$$F_i(t) = \int_{t_i}^{T_i} \Pi_1(t - \tau) d[\sigma_0 \sin(\alpha\tau) - \sigma^{(1)}], \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.11)$$

Значение времени  $t_i$  определяет нижний предел соответствующего интеграла в (3.11), а  $T_i$  – его верхний предел. Значение  $t_i$  представляет собой момент, при котором текущее напряжение совпадает с пределом линейности. Эта величина определяется из уравнения  $\sin \alpha t = \sigma^{(1)}/\sigma_0$ . При учете значений  $\sigma^{(1)} = 111.5$  МПа,  $\sigma_0 = 200$  МПа и  $\alpha = 2\pi/10$ , находим  $t_1 = 0.941$  ч. Нетрудно видеть, что  $t_2 = (5 + t_1)$  ч и  $t_3 = (10 + t_1)$  ч. Верхние пределы интегралов в соотношении (3.11), в силу симметрии кривой изменения напряжения, следовало бы определить значениями  $T_1 = (5 - t_1)$  ч,  $T_2 = (10 - t_1)$  ч и  $T_3 = (15 - t_1)$  ч. Однако в этом случае общая диаграмма ползучести, представленная сплошной линией на рис. 10, имеет разрывы по деформациям. Установлено, что разрывы по деформациям устраняются, если верхние пределы интегрирования принять равными:  $T_1 = (5 - t_1/2)$  ч,  $T_2 = (10 - t_1/2)$  ч и  $T_3 = (15 - t_1/2)$  ч, что и было сделано при расчетах. Заметим, что в этом также проявляются эффекты наследственности используемой формы определяющих соотношений.

**4. Заключение.** Исходя из вышеизложенного, можно сделать следующие выводы:

1. При использовании наследственной формы определяющих соотношений желательно проведение экспериментальных исследований, пусть даже в незначительном объеме, во всех областях поведения деформируемого материала.

2. Наследственные формы определяющих соотношений вязкоупругости, как и аналогичные формы определяющих соотношений вязкопластичности, будучи определенными с использованием задаваемой при помощи функции Хевисайда ступенчатой функции, могут быть использованы для описания процессов деформирования, происходящих при любом законе нагружения.

3. Существенную зависимость амплитуды деформаций линейного вязкоупругого материала в процессах циклического нагружения, при значительно меньшей предела текучести величине действующего напряжения, от длительности цикла, следует отне-

сти к проявлению наследственного эффекта определяющих соотношений Вольтерра, не имеющего, по нашему мнению, никакого отношения к упрочнению или разупрочнению деформируемого материала.

Работа выполнена при частичном финансировании проекта РФФИ № 17-08-00210.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Качанов Л.М. Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960. 456 с.
2. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
3. Ржаницин А.Р. Теория ползучести. М.: Стройиздат. 1968. 416 с.
4. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязко-упругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
5. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.
6. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.
7. Шарафутдинов Г.З. Применение кусочно-аналитической и кусочно-линейной форм определяющих соотношений наследственного типа при исследовании ползучести металлов // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 4. С. 27–38.
8. Dushin A., Gribov N.N., Ignatov V.A., Medvedev N.A. Structure-stable alloy for structural components of the high-temperature gas-cooled reactor with temperature at 900°C // Energy. 1991. V. 16. № 1/2. P. 317–326.
9. Наместников В.С. Прямое и обратное кручение в условиях ползучести // ПМТФ. 1960. № 1. С. 121–122.