ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 1, с. 3–5

УДК 531

ПЛОСКАЯ ДИНАМИКА ОДНОРОДНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА С СУХИМ ТРЕНИЕМ

© 2021 г. В. Ф. Журавлёв

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

e-mail: zhurav@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 11.03.2020 г.
После доработки 15.03.2020 г.
Принята к публикации 19.03.2020 г.

Рассмотрена задача о динамике твердого тела в форме параллелепипеда на плоскости при наличии двумерного сухого трения (обобщенная модель сухого трения Кулона–Контенсу [1]). Поскольку в этой модели трения нет разрывов первого рода по скорости, то в математическом плане задача проще, чем задачи с одномерным (по Кулону) сухим трением. В этом примере увеличение размерности приводит к регуляризации задачи.

Ключевые слова: динамика, сухое трение, параллелепипед, плоскость

DOI: 10.31857/S0572329921010141

Уравнения динамики прямоугольного однородного параллелепипеда, движущегося по горизонтальной плоскости с сухим трением (рис. 1) имеют вид [2]:

$$\begin{aligned} J\dot{u} &= -fl^2\sigma\iint\limits_D \frac{(r^2u + x\nu_y - y\nu_x)dxdy}{\sqrt{r^2u^2 + \nu^2 + 2u(x\nu_y - y\nu_x)}} \\ m\dot{\nu}_x &= -fl^2\sigma\iint\limits_D \frac{(\nu_x - uy)dxdy}{\sqrt{r^2u^2 + \nu^2 + 2u(x\nu_y - y\nu_x)}} + P \\ m\dot{\nu}_y &= -fl^2\sigma\iint\limits_D \frac{(\nu_y + ux)dxdy}{\sqrt{r^2u^2 + \nu^2 + 2u(x\nu_y - y\nu_x)}} + Q \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь обозначено: J – момент инерции тела вокруг оси z, m – масса тела, $u = \omega l$, где ω – угловая скорость параллелепипеда вокруг оси z, а l – его длина, h – ширина, (ν_x, ν_y) – скорость центра масс, f – коэффициент сухого трения по Кулону, σ – равномерное распределение давления тела на плоскость, $r^2 = x^2 + y^2$, (P, Q) – приложенная к телу горизонтальная сила.

Стационарное решение

$$u \equiv 0, \quad \nu_x \equiv p, \quad \nu_y \equiv q \tag{2}$$

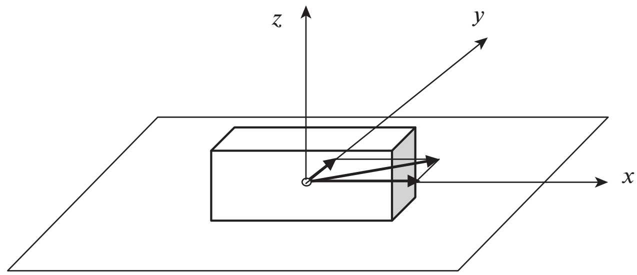

Рис. 1

Удовлетворяет уравнениям стационарного движения

$$\begin{gathered}
\iint\limits_D \frac{(xq - yp)dxdy}{\sqrt{p^2 + q^2}} \equiv 0 \\
-F\iint\limits_D \frac{pdxdy}{\sqrt{p^2 + q^2}} + P \equiv -\frac{Fphl}{\sqrt{p^2 + q^2}} + P \equiv 0 \\
-F\iint\limits_D \frac{qdxdy}{\sqrt{p^2 + q^2}} + Q \equiv -\frac{Fqhl}{\sqrt{p^2 + q^2}} + Q \equiv 0
\end{gathered} \tag{3}$$

где $F = fl^2\sigma$.

Откуда следует:

$$\frac{p}{P} = \frac{q}{Q}$$

т.е. любое стационарное движение происходит в направлении приложенной силы. Соотношения (3) позволяют выразить компоненты установившейся скорости (p, q) через компоненты приложенной силы (P, Q).

Для исследования устойчивости стационарного решения (2) проварьируем его

$$u = \delta u, \quad \nu_x = p + \delta\nu_x, \quad \nu_y = q + \delta v_y$$

и запишем уравнения в вариациях

$$\begin{aligned}
J\delta\dot{u} &= -\frac{fl^2N(p^2l^2 + q^2h^2)}{12\sqrt{(p^2 + q^2)^3}}\delta u \\
m\delta\dot{\nu}_x &= -\frac{fl^2qN(q\delta v_x - p\delta v_y)}{\sqrt{(p^2 + q^2)^3}} \\
m\delta\dot{\nu}_y &= \frac{fl^2pN(q\delta v_x - p\delta v_y)}{\sqrt{(p^2 + q^2)^3}}
\end{aligned} \tag{4}$$

где $N = \sigma lh$ – величина силы, прижимающей трущиеся тела друг к другу (вес параллелепипеда).

Уравнения в вариациях (4) распались. Уравнение по угловой скорости δu отделилось от уравнений по линейной скорости. Стационарное решение $\delta u = 0$ в первом уравнении является, с очевидностью, асимптотически устойчивым.

Устойчивость тривиального решения $(\delta\nu_x, \delta\nu_y) = 0$ может быть изучена анализом двух последних уравнений системы (4):

$$\begin{aligned} \delta\dot{\nu}_x &= -a(q\delta\nu_x - p\delta\nu_y) \\ \delta\dot{\nu}_y &= b(q\delta\nu_x - p\delta\nu_y) \end{aligned} \tag{5}$$

где $a = fl^2 qN/mr^3$, $b = fl^2 pN/mr^3$.

Устойчивость определяется корнями характеристического уравнения:

$$\|A - \lambda E\| = 0, \tag{6}$$

в котором

$$A = \begin{Vmatrix} -aq & ap \\ bp & -bq \end{Vmatrix}$$

Характеристическое уравнение (6), следовательно, имеет вид:

$$\lambda^2 + (bp - aq)\lambda = 0$$

Его корни таковы

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -(bp + aq) = -\frac{h(p^2 + q^2)}{fl\sigma m}$$

Нулевой корень объясняется наличием у системы (5) стационарного интегрального многообразия $q\delta\nu_x - p\delta\nu_y \equiv 0$.

Второй корень λ_2 на этом многообразии является строго отрицательным и, следовательно, система (5) является асимптотически устойчивой.

В монографии [2] уравнения (1) рассматривались приближенно посредством замены двукратных интегралов в их правых частях аппроксимациями Паде в первом приближении. Анализ этой задачи в настоящей работе показывает полное качественное соответствие выполненного ранее приближенного исследования тому, что выполнено выше.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № АААА-А20-120011).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Журавлёв В.Ф.* О модели сухого трения в задачах динамики твердых тел // Успехи механики. 2005. № 3. С. 58–76.
2. *Андронов В.В., Журавлёв В.Ф.* Сухое трение в задачах механики. М.–Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”. Институт компьютерных исследований, 2010. 184 с.