ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 1, с. 69–82

УДК 539.21

КЛАССИЧЕСКИЕ И МНОГОУРОВНЕВЫЕ КОНСТИТУТИВНЫЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ПОВЕДЕНИЯ МЕТАЛЛОВ И СПЛАВОВ: ПРОБЛЕМЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ (*в порядке обсуждения*)

П. В. Трусов

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

e-mail: tpv@matmod.pstu.ac.ru

Поступила в редакцию 18.09.2019 г.
После доработки 23.09.2019 г.
Принята к публикации 04.10.2019 г.

Потребности совершенствования существующих и разработки новых эффективных технологий обработки металлических материалов давлением (в том числе – при интенсивных пластических деформациях, позволяющих получать изделия с ультрамелкозернистой структурой), постоянно возрастающие требования к точности прочностных расчетов, появляющиеся новые материалы со сложными свойствами (включая градиентные материалы), необходимость проектирования и создания функциональных материалов требуют от механиков и физиков-материаловедов постоянной работы над конститутивными моделями (определяющими соотношениями) для описания поведения различных материалов. При этом наибольший интерес привлекают модели, применяемые для описания процессов термомеханической обработки, поскольку именно в последних формируются основные рабочие характеристики готовых изделий. Физико-механические (в т.ч. – прочностные) характеристики материалов изделий определяются главным образом микроструктурой, образующейся в результате обработки. В связи с этим наиболее востребованными становятся модели, позволяющие в явном виде описывать эволюционирующую микроструктуру различных структурных и масштабных уровней. Тем не менее, в настоящее время наиболее распространенными в среде специалистов в области механики деформируемого твердого тела, технологов, конструкторов являются макрофеноменологические определяющие соотношения, основанные на обработке результатов макроэкспериментов и не использующие явного описания структуры материалов.

Наряду с конститутивными соотношениями указанного класса в последние 15–20 лет все более широкое признание для анализа поведения материалов при термомеханических (и более сложных, например, радиационных) воздействиях приобретают многоуровневые модели, основанные на введении внутренних переменных и физических теориях упругопластичности (упруговязкопластичности).

В предлагаемой работе делается попытка сопоставления преимуществ и недостатков моделей указанных классов, оценки областей их применимости, а также формулировки некоторых проблемных вопросов, ответов на которые автор не нашел в существующей литературе по механике деформируемого твердого тела и материаловедению.

Ключевые слова: конститутивные соотношения, феноменологические и многоуровневые модели, внутренние переменные, физические теории упруговязкопластичности

DOI: 10.31857/S0572329921010128

Введение. Центральным элементом постановок различных краевых задач, возникающих в механике деформируемого твердого тела (МДТТ), являются конститутивные модели (определяющие соотношения (ОС)) [1–3]. Наибольшей популярностью в среде механиков, конструкторов, "прочнистов", технологов в настоящее время пользуются феноменологические определяющие соотношения, заложенные в большинстве пакетов прикладных программ, реализующих метод конечных элементов (МКЭ), таких как ANSYS, DYNA, QFORM, КОМПАС и др. Заметим, что в настоящей работе речь пойдет в основном о металлах и сплавах, хотя часть рассматриваемых вопросов относятся и к другим материалам, в том числе – к композиционным.

Основой для построения ОС указанного класса являются результаты экспериментальных исследований поведения макроскопических образцов из исследуемых материалов, подвергаемых различным термомеханическим и иным (например, радиационным, химическим и т.д.) воздействиям; в связи с вышесказанным ОС данного класса правильнее называть макрофеноменологическими. В большинстве случаев эти испытания осуществляются на одноосное нагружение (деформирование), например, на растяжение–сжатие или простой сдвиг сплошных образцов. Важнейшим условием для дальнейшей интерпретации измеренных силовых и геометрических характеристик в терминах континуальной механики (напряжений, деформаций и т.д.) является однородность образцов (в макроскопическом смысле). Полученные в результате обработки экспериментальных данных "одноосные" ОС в дальнейшем обобщаются на трехмерный случай с использованием некоторых гипотез, не всегда основанных на должном физическом обосновании. Для проверки справедливости принимаемых гипотез требуются, вообще говоря, испытания на сложное нагружение, реализуемые, например, на трубчатых образцах [4–7]. Однако деформируемые твердые тела обладают свойством памяти [2, 4], причем для неупруго деформируемых тел – ко всей истории воздействий, в связи с чем для проверки гипотез и возможной переформулировки ОС на основе результатов экспериментов на сложное нагружение требуется огромное (теоретически – мощности континуум) количество экспериментов.

Поскольку построение феноменологических ОС базируется на экспериментах, данный подход не может быть использован для проектирования новых, еще не существующих, ориентированных на повышение рабочих характеристик конкретных деталей и конструкций, функциональных материалов [8, 9]. При этом в силу невозможности проведения экспериментальных измерений физико-механических характеристик во всем объеме готовых изделий, применение феноменологических ОС даже для прочностных расчетов, требующих решения краевых задач теории упругости, может приводить к значительным погрешностям. Действительно, данные ОС не позволяют описать изменение симметрии физико-механических свойств материала (например, в силу формирующейся текстуры), возникновение остаточных напряжений различного рода [10–12], локальных отклонений упругих модулей (вследствие неоднородности структуры материалов на мезо- и микроуровнях).

Из свойства "исторической памяти" вытекает необходимость формулировки ОС в виде операторов над историей воздействий, чаще всего – функционалов. Идентификация подобных конститутивных соотношений сопряжена со значительными трудностями, требует огромных материальных и временных затрат. Кроме того, функциональный вид ОС существенно усложняет систему уравнений краевых задач, в постановку которых они входят, и алгоритмы решения этих задач.

Для "ухода" от указанных сложностей при построении конститутивных моделей материалов в последние десятилетия широко используется введение так называемых внутренних переменных (ВП) [13–15], являющихся "носителями памяти". В большинстве работ, однако, отсутствует четкое определение ВП и объяснение их физического смысла. При использовании термодинамического подхода для формулировки ОС внутренние переменные часто появляются в качестве энергетически сопряженных обобщенных термодинамических сил или потоков при переменных с известным термомеханическим смыслом. В последние годы внутренним переменным в ряде работ придается ясный физический смысл: они служат для описания эволюционирующей микроструктуры материала и определяют количественные меры различных носителей физических механизмов, обусловливающих эти изменения структуры (например, тензоры ориентации решеток кристаллитов, параметры, характеризующие форму и размеры зерен, плотности дислокаций разных знаков на системах скольжения и т.д.); именно в таком смысле ВП трактуются и в настоящей работе. С возможным вариантом общей структуры конститутивных моделей, основанных на введении внутренних переменных, можно ознакомиться в работах [16–18].

В структуру конститутивных моделей с внутренними переменными хорошо "вписываются" весьма активно развиваемые и приобретающие все большее признание в последние 15–20 лет (к сожалению – в основном в работах зарубежных исследователей) многоуровневые модели [19–24], основанные на физических теориях упругопластичности (упруговязкопластичности) [25–27]. Модели данного класса лишены многих из отмеченных выше недостатков и ограничений феноменологических теорий. Основным преимуществом многоуровневых моделей является явное описание физических механизмов и носителей этих механизмов процессов, происходящих в материалах при термомеханических воздействиях, на нескольких структурных и/или масштабных уровнях. Краткое изложение структуры многоуровневых моделей и основные уравнения приведены ниже в разделе 3[1].

1. Основные понятия и определения. Для замкнутости статьи в данном разделе приведены некоторые основные понятия и определения, необходимые для дальнейшего изложения. Одним из основных в МДТТ является понятие представительного объема (ПО), под которым понимается минимальный объем материала, в котором содержится достаточное для статистического описания состояния тела число "носителей" рассматриваемых механизмов процесса. Добавление к этому объему других частей данного материала с аналогичной (в статистическом смысле) конфигурацией "носителей" анализируемых механизмов не должно приводить к изменению эволюционных уравнений для полевых величин, описывающих изменение конфигурации "носителей". В классической механике сплошных сред (МСС) предполагается, что размеры представительного объема таковы, что градиентами этих полевых величин и других параметров состояния в пределах представительного объема можно пренебречь, что позволяет считать указанные поля однородными (в статистическом смысле) в масштабах представительного объема.

При этом все параметры определяются осреднением по скользящему представительному объему со стенками, абсолютно "прозрачными" для материи, с "приписыванием" в дальнейшем определенного осреднением значения параметра выбранной точке ПО (например, геометрическому центру ПО). И только в этом смысле следует понимать определение любой механической величины в (математической) точке.

В настоящей работе рассматриваются только простые материалы [2], т.е. такие, деформированное состояние ПО которых описывается первым градиентом места (или градиентом перемещений), который полностью определяет отклик (изменение напряженного состояния) на изменение конфигурации ПО. При этом в нелинейной МДТТ используется весьма широкий спектр мер и тензоров деформации, построенных на градиенте места [28–30]; произвольный тензор деформации в дальнейшем будет обозначаться как **M**. Значительным разнообразием отличается также множество мер напряженного состояния [30–33]. Наиболее часто в МДТТ используется тензор

[1] С более подробным изложением многоуровневых моделей интересующийся читатель может ознакомиться по монографии: П.В. Трусов, А.И. Швейкин. Многоуровневые модели моно- и поликристаллических материалов: теория, алгоритмы, примеры применения. Новосибирск: Изд-во СО РАН. 605 стр. DOI: 10.15372/MULTILEVEL2019TPV

напряжений Коши, который будет обозначаться как $\mathbf{\Sigma}$ на макроуровне и $\boldsymbol{\sigma}$ – на мезоуровне; для произвольного тензора напряжений принимается обозначение $\mathbf{P}$ ($\mathbf{p}$). При формулировке ОС, особенно – с использованием термодинамического подхода, часто к мерам напряжений и деформаций предъявляется требование энергетической сопряженности. Тензоры напряжений $\mathbf{P}$ и деформаций $\mathbf{M}$ называются энергетически сопряженными, если для любого момента процесса деформирования выполняется равенство: $\mathbf{P} : \mathbf{M}^{\mathrm{o}} = \chi\mathbf{\Sigma} : \mathbf{D}$, где $\mathbf{M}^{\mathrm{o}}$ – независящая от выбора системы отсчета производная (чаще всего – коротационная), $\mathbf{D}$ – тензор деформации скорости (симметризованный градиент скорости перемещений), $\chi = \overset{\mathrm{o}}{\rho}/\hat{\rho}$ – если $\mathbf{P}$ и $\mathbf{M}$ определены в отсчетной конфигурации ($\overset{\mathrm{o}}{\rho}$, $\hat{\rho}$ – плотность в отсчетной и актуальной конфигурациях) и $\chi = 1$– если в актуальной.

Известно, что поведение материалов при неупругом деформировании (включая процессы накопления поврежденности, см., например, [34]) существенно зависит от сложности нагружения [4]. Степень сложности процесса нагружения устанавливается по виду траектории деформации в соответствующем пространстве деформаций (или девиаторных составляющих тензора деформации); строго говоря, любое нагружение по траектории деформации, отличной от лучевой, следует относить к сложному. Для описания процессов неупругого деформирования часто используется представление деформаций и напряжений в совмещенном векторном пространстве, изоморфном исходному пространству двухвалентных тензоров над трехмерным евклидовым пространством [4]. При этом полная информация о рассматриваемом деформировании ПО дает образ процесса нагружения: совокупность траектории деформации и определенных в каждой ее точке векторов напряжений, температур и т.д.

Формулируемые конститутивные модели должны удовлетворять ряду аксиом общей теории определяющих соотношений (принципу детерминизма, термодинамическим ограничениям и т.д.) [2]. Одной из важнейших (особенно – при рассмотрении геометрически нелинейных проблем) является аксиома независимости определяющих соотношений от выбора системы отсчета, называемая также принципом материальной индифферентности. С необходимостью выполнения данной аксиомы тесно связана задача разложения движения деформируемого твердого тела на квазитвердое и деформационное. Для описания первой составляющей вводится подвижная жесткая система координат (ПСК), которая должна быть связана с материалом и в случае жесткого движения тела должна полностью повторять это движение. Часть движения “за вычетом” движения ПСК тогда может трактоваться как деформационное. Поскольку в произвольно деформируемом континууме не существует тройки материальных волокон, не изменяющих углов между собой, решение данной задачи для произвольного континуума представляет неразрешенную на сегодняшний день проблему, которая, возможно, вообще не имеет однозначного решения в рамках континуальной механики. Тем не менее, ниже будет показано, что данная проблема может быть решена при использовании многоуровневых моделей.

К сожалению, в подавляющем большинстве работ по нелинейной МДТТ вопрос о разложении движения на квазитвердое и деформационное подменяется вопросом о корректном выборе независимой от выбора системы отсчета производной, необходимой при построении ОС упруго(вязко)пластичности. Конечно, замена материальных производных на независящие от выбора системы отсчета конвективные или коротационные производные [30, 31] позволяет удовлетворить принципу материальной индифферентности, однако она не имеет под собой должного физического обоснования. Чаще всего при формулировке геометрически нелинейных ОС скоростного типа используются коротационные Зарембы – Яуманна [35, 36] и Грина – Нагхди [37] производные. В последние 10–15 лет все большей популярностью пользуется так называемая логарифмическая коротационная производная [38–40]. При ее введении авторы апеллировали к необходимости выполнения двух дополнительных требований к геометрически нелинейным ОС: 1) в замкнутом цикле по упругим деформациям замкнутой должна быть и траектория напряжений, 2) в указанном упругом цикле совершенная работа должна быть нулевой; в дальнейшем для краткости эти условия будут называться требованиями консервативности ОС. Авторами доказано удовлетворение требованию консервативности гипоупругими ОС, использующими коротационную логарифмическую производную тензора напряжений Кирхгоффа, однако — только для изотропного материала. В случае анизотропного упругого материала доказательство проведено только для случая сохранения симметрийных свойств в отсчетной (или разгруженной) конфигурации. Следует отметить, что логарифмическая производная определяется исключительно кинематикой движения и никак не связана с материалом, в силу чего не имеет ясного физического смысла.

В настоящей работе рассматриваются ОС, ориентированные на описание поведения моно- и поликристаллических металлов и сплавов. Искажения решеток полагаются упругими и малыми; неупругое деформирование принимается осуществляемым за счет движения краевых дислокаций по кристаллографическим системам скольжения, положение которых по отношению к решеткам известно для каждого типа кристаллита. В отсчетной конфигурации для материала на всех масштабных уровнях принимается гипотеза о естественном (ненапряженном) состоянии.

2. Некоторые проблемные вопросы формулировки и использования феноменологических моделей. Остановимся на некоторых аспектах разработки и использования конститутивных моделей, основанных на обработке макроэкспериментов с однородно деформируемыми образцами. Напомним, что подавляющее большинство макроэкспериментов, применяемых для построения упруго(вязко)пластических ОС, проводится на одноосное нагружение с использованием сплошных цилиндрических образцов (круглого или прямоугольного поперечного сечения). Но даже на таких образцах однородность напряженно-деформированного состояния (НДС) сохраняется только до умеренно больших неупругих деформаций (порядка нескольких десятков процентов относительного изменения длины). В реальных процессах обработки металлов давлением, для анализа которых главным образом и востребованы теории пластичности, деформации достигают огромных значений (например, при прокатке лент и листов — до десятков и сотен тысяч процентов). Однако на сегодняшний день отсутствуют однозначные и физически обоснованные подходы к обобщению геометрически линейных теорий на случай больших градиентов перемещений; результаты решения даже тестовых задач (например, простого сдвига) при использовании различным образом обобщенных ОС могут отличаться качественно. Следует отметить также, что стандартные одноосные испытания не позволяют определять модули упругости в случае анизотропии упругих свойств.

Понятие однородности НДС, вообще говоря, не является однозначным и физически прозрачным. Известно (см., например, [41] и приведенный в статье обширный перечень источников), что в пластически деформируемых образцах практически сразу при превышении предела текучести возникают полосы сдвига, движущиеся вдоль образцов. Значительную роль в инициации пластических сдвигов играют границы образца, ориентация кристаллитов границы по отношению к характерным осям нагружения [42–44]. Иначе говоря, даже при анализе этих, казалось бы — простейших, — натурных испытаний возникают различные вопросы. Прежде всего: поведение чего именно исследуется в этих опытах — материала или образца (конструкции)? Каковы должны быть характерные размеры представительного объема (ПО), для которого можно принять истинными полученные в данных опытах характеристики материала? Описывается ли поведение материала в объеме исследуемого изделия и вблизи его границы одними и теми же ОС и/или параметрами ОС? Приведенные вопросы представляются особенно важными при необходимости исследовать поведение малоразмерных (миниатюрных) изделий, при анализе процессов разрушения (в частности – усталостного).

Вызывает вопросы и обобщение получаемых в указанных опытах одноосных ОС на 3-мерное НДС. Как правило, для этого принимается гипотеза о несжимаемости неупругих деформаций, а одноосные напряжения и деформации (скорости деформации) заменяются девиаторами мер напряжений и деформаций (скоростей деформации). Для проверки приемлемости данных гипотез требуется проведение опытов на сложное нагружение. Однако в настоящее время размерность пространств напряжений – деформаций для таких испытаний ограничена – она не превышает 3 (на тонкостенных трубчатых образцах, подвергаемых растяжению–сжатию, кручению и внутреннему давлению). Кроме того, эксперименты на произвольное сложное нагружение еще более ограничены по величине деформации; сдвиговые деформации (при кручении трубок), как правило, не превышают 5–7%. Иначе говоря, построить геометрически нелинейные упруго(вязко)пластические ОС непосредственно обработкой экспериментальных данных даже для одной предписанной программы нагружения не представляется возможным. Следует отметить дополнительно возникающие сложности построения образа процесса нагружения в случае больших градиентов перемещений [45]. В геометрически линейном варианте образ процесса нагружения строится по компонентам тензоров напряжений и деформаций, определенным в базисе условно неподвижной лабораторной системы координат; в цитируемой выше работе показано, что построенный таким образом образ процесса не удовлетворяет принципу независимости от выбора системы отсчета.

При формулировке классических теорий пластичности (например, различных вариантов теории пластического течения [46, 47]) используется гипотеза единой кривой, согласно которой считается, что кривая одноосного нагружения может быть использована для многоосного нагружения при замене одноосных мер на интенсивности напряжений и деформаций (или интенсивности накопленных полных или пластических деформаций, определяемых интегрированием интенсивности скорости деформации по времени). Однако должного физического обоснования данная гипотеза не имеет; едва ли достаточным основанием может служить равенство интенсивностей соответствующим мерам при одноосном нагружении (интенсивность напряжений равна одноосному напряжению при растяжении и сжатии (по модулю) и напряжению сдвига – при чистом сдвиге, интенсивность деформаций равна одноосной деформации при растяжении и сжатии (по модулю) и величине сдвиговой деформации при простом сдвиге). Даже простые эксперименты не подтверждают справедливость данной гипотезы; например, приведенные в [48] результаты экспериментов на сжатие и простой сдвиг образцов из поликристаллической меди, пересчитанные в интенсивности, показывают различие, превышающее 20%.

Понятно, что для сопоставления результатов испытаний образцов из материалов по различным программам нагружения, уменьшения количества потребных экспериментов весьма желательно наличие скалярных инвариантов, интегрально отражающих эволюцию НДС. При этом сами меры НДС и их скалярные аналоги должны иметь ясный физический смысл с точки зрения основных механизмов и их носителей на соответствующих структурных и масштабных уровнях. Не ясно, возможно ли решение этих задач в рамках континуальных теорий для описания необратимого деформирования, с использованием известных симметризованных мер, например, тензоров деформации из класса Хилла – Сетха [49–51]. Для введенной в [52] в рамках двухуровневой упруговязкопластической модели неголономной несимметричной меры деформации на макроуровне удалось показать ее физический смысл в терминах сдвигов по системам скольжения.

Следует коснуться еще одного вопроса, возникающего в практике решения конкретных задач (как аналитическими, так и численными методами) – о различии понятия "точка" в математическом и механическом смыслах. Конечно, специалисты в области построения конститутивных моделей материалов всегда помнят о представительном объеме (ПО) ("толстой точке"), о необходимости использования получаемых ОС на масштабах, равных или превышающих характерные размеры ПО. Однако исследователи, применяющие сформулированные осредненные по представительным объемам ОС для решения задач МДТТ, часто даже не упоминают о ПО. Наиболее показательным в этом плане является широкий круг задач по исследованию сингулярных точек, при приближении к которым резко (в некоторых случаях – с бесконечными производными по направлению) возрастают градиенты перемещений, компоненты тензоров деформаций и напряжений. При этом часто используются изотропные ОС первого порядка, что совершенно неприемлемо: для материалов первого порядка градиенты материальных функций (перемещений, напряжений, деформаций) не должны существенно меняться на характерных размерах ПО; при уменьшении масштабов исследуемых объемов большинство материалов обнаруживают анизотропию свойств. В связи с этим стоит отметить также иллюзию повышения точности численных расчетов при устремлении размеров сеток к нулю. Конечно, такие численные эксперименты позволяют оценить свойства вычислительных схем (аппроксимации, сходимости), но декларируемая на основе таких расчетов "точность" в десятые и сотые доли процентов не имеет никакого практического значения. При этом необходимо исследовать теоретически возможную точность расчетов, обусловленную существующим в любых изделиях разбросе физико-механических характеристик.

Кратко остановимся на описании многоуровневых моделей, основанных на физических теориях упруго(вязко)пластичности, позволяющих избежать, по крайней мере, части из отмеченных сложностей.

3. Многоуровневые модели: структура, возможности, сложности. При использовании многоуровневого подхода каждой материальной точке (представительному объему) на некотором масштабном уровне ставится в соответствие неоднородная область на нижележащем масштабном уровне. Число используемых в модели уровней устанавливается исследователем в зависимости от поставленных задач, важности тех или иных физических механизмов разных структурных уровней для анализируемого процесса. В настоящее время принята следующая иерархическая совокупность структурных (и/или масштабных) уровней: макроуровень (уровень представительного макрообъема) – мезоуровень (уровень кристаллитов) – микроуровень (дислокационных субструктур) – атомарный уровень (с характерным размером в несколько десятков межатомных расстояний). Основным классификационным признаком моделей является способ связи "родственных" переменных соседних уровней, по которому различают статистические, самосогласованные и прямые модели [23, 24]. Наибольшее распространение получили двухуровневые (макро- и мезоуровень) статистические модели, структура и формулировка соотношений которых рассматривается ниже. В статистических двухуровневых моделях [19, 48, 53] представительный объем верхнего уровня рассматривается как выборка элементов нижнего уровня (совокупности или отдельных зерен, субзерен) относительно независимых друг от друга; объединение элементов мезоуровня в элемент макроуровня (представительный макрообъем) осуществляется статистическим осреднением. При назначении с верхнего уровня параметров нагружения для модели нижнего уровня преимущественно используется или обобщенная гипотеза Фойгта (для каждого элемента нижнего уровня градиент скорости перемещений равен градиенту скорости перемещений верхнего уровня), или гипотеза Рейсса (для каждого элемента нижнего уровня напряжения совпадают с напряжениями вышележащего уровня). В таких моделях неупругая составляющая меры (скорости) деформации и эффективные анизотропные упругие свойства на верхнем уровне определяются тем или иным осреднением характеристик мезоуровня (неявных внутренних переменных макроуровня) в каждый момент процесса деформирования [16, 17].

В рассматриваемых конститутивных моделях параметрами процессов на каждом из масштабных (или структурных) уровней являются: меры напряженного состояния (и их объективные скорости изменения), меры скорости деформирования, температура, внутренние (явные и неявные) переменные, определяющие состояние зеренной и дефектной структуры. При этом важным отличием модели от традиционных статистических моделей, основанных на физических теориях пластичности (ФТП), является учет в рассматриваемой модели взаиморасположения кристаллитов и границ между ними. Это позволяет принять во внимание несовместность движения дислокаций в соседних кристаллитах, накопление дислокаций ориентационного несоответствия в границе, что приводит к зернограничному упрочнению и дополнительным поворотам решетки. На мезоуровне описываются механизм внутризеренного дислокационного скольжения (ВДС), ротации решеток кристаллитов, изменение формы и размеров кристаллитов. Используется ранее разработанный подход к формулировке геометрически нелинейных кинематических и определяющих соотношений, основанный на рассмотрении в рамках многоуровневого подхода разложения движения на мезоуровне с учетом симметрии материала [54]. Для этого в каждом кристаллите вводится жесткая подвижная декартова ортогональная система координат (ПСК), движение которой считается квазитвердым и которая привязывается к симметрийным элементам кристаллита — кристаллографическому направлению и плоскости, содержащей это направление. Следует заметить, что предлагаемые соотношения мезоуровня без изменений могут применяться в рамках прямых моделей. В приведенных далее соотношениях “родственные” параметры макро- и мезоуровня обозначаются одинаковыми буквами, величины макроуровня — заглавными буквами, мезоуровня — строчными.

Рассмотрим общую структуру статистической модели. Система уравнений модели на макроуровне в общем виде содержит следующие соотношения:

$$
\begin{gathered}
\mathbf{K}^{\mathrm{cor}} \equiv \dot{\mathbf{K}} - \mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{K} + \mathbf{K}\cdot\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Pi} : (\mathbf{L} - \mathbf{\Omega} - \mathbf{Z}^{\mathrm{in}} - \mathbf{Z}^{\mathrm{th}}) \\
\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}(\boldsymbol{\pi}_{(i)}, \boldsymbol{\omega}_{(i)}, \mathbf{z}^{\mathrm{in}}_{(i)}, \mathbf{z}^{\mathrm{th}}_{(i)}, \theta_{(i)}), \qquad i = 1,\dots,N \\
\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}(\boldsymbol{\pi}_{(i)}, \boldsymbol{\omega}_{(i)}, \mathbf{z}^{\mathrm{in}}_{(i)}, \mathbf{z}^{\mathrm{th}}_{(i)}, \theta_{(i)}), \qquad i = 1,\dots,N \\
\mathbf{Z}^{\mathrm{in}} = \mathbf{Z}^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{\pi}_{(i)}, \boldsymbol{\omega}_{(i)}, \mathbf{z}^{\mathrm{in}}_{(i)}, \mathbf{z}^{\mathrm{th}}_{(i)}, \theta_{(i)}), \qquad i = 1,\dots,N \\
\mathbf{Z}^{\mathrm{th}} = \mathbf{Z}^{\mathrm{th}}(\boldsymbol{\pi}_{(i)}, \boldsymbol{\omega}_{(i)}, \mathbf{z}^{\mathrm{in}}_{(i)}, \mathbf{z}^{\mathrm{th}}_{(i)}, \theta_{(i)}), \qquad i = 1,\dots,N \\
\mathrm{Q} = \mathrm{Q}(\mathrm{q}_{(i)}), \qquad i = 1,\dots,N \\
\mathbf{K}\big|_{t=0} = \mathbf{K}_0
\end{gathered}
\tag{3.1}
$$

где $\mathbf{K}$ — взвешенный тензор напряжений Кирхгоффа макроуровня, $\mathbf{K} = \langle\overset{\mathrm{o}}{\rho}/\hat{\rho}\rangle\mathbf{\Sigma}$, $\mathbf{\Sigma}$ — тензор напряжений Коши макроуровня, $\langle\overset{\mathrm{o}}{\rho}/\hat{\rho}\rangle$ — среднее отношение плотности в отсчетной и текущей конфигурации для кристаллитов, составляющих представительный объем макроуровня; $\mathbf{\Omega}$ — спин подвижной системы координат макроуровня; $\mathbf{Z} = (\mathbf{L} - \mathbf{\Omega})$ — мера скорости деформации (градиент относительной скорости перемещений), $\mathbf{L}$ — градиент (абсолютной) скорости перемещений; $\mathbf{K}^{\mathrm{cor}} \equiv \dot{\mathbf{K}} - \mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{K} + \mathbf{K}\cdot\mathbf{\Omega}$ — не зависящая от выбора системы отсчета скорость изменения (коротационная производная) тензора напряжений Кирхгоффа; $\mathbf{K}_0$ — начальное значение тензора макронапряжений, для естественной конфигурации $\mathbf{K}_0 = \mathbf{0}$. Тензор эффективных упругих свойств $\mathbf{\Pi}$ макроуровня, тензор спина $\mathbf{\Omega}$, неупругая составляющая тензора скорости деформации $\mathbf{Z}^{\text{in}}$, термическая составляющая скорости деформации $\mathbf{Z}^{\text{th}}$ и мощность источника Q (который необходимо использовать в уравнении теплопроводности краевой термомеханической задачи на уровне конструкции) являются явными внутренними переменными макроуровня, которые зависят от структуры на низших масштабных уровнях (а через нее – от истории нагружения) и определяются по характеристикам мезоуровня (неявным переменным макроуровня). Следует заметить, что запись зависимостей макропараметров от полного набора переменных мезоуровня (3.1) следует воспринимать символически: по части переменных – как функции, по другим – как функционалы над историей изменения параметров мезоуровня. С использованием указанных явных внутренних переменных макроуровня записывается связь отклика $\mathbf{K}$ и воздействий – кинематического $\mathbf{L} = \hat{\nabla}\mathbf{V}^{\text{T}}(\text{t})$ (градиента скорости перемещений) и термического $\Theta(\text{t})$ (температура). Отметим, что при использовании многоуровневых моделей, как и любых других моделей материалов, для исследования напряженно-деформированного состояния реальных конструкций необходимы постановка и решение соответствующей краевой задачи, в результате которого (при совместном рассмотрении определяющих и балансовых уравнений) определяются поля воздействий и отклик. Переменные $\mathbf{п}_{(i)}, \boldsymbol{\omega}_{(i)}, \mathbf{z}_{(i)}^{\text{in}}, \mathbf{z}_{(i)}^{\text{th}}$ – тензор упругих свойств, спин ПСК, неупругая и термическая составляющая тензора скорости деформации мезоуровня вводятся для каждого кристаллита, N – число элементов мезоуровня, необходимых для статистического описания представительного объема макроуровня; эти переменные в соответствие со структурой конститутивных моделей, основанных на введении внутренних переменных, относятся к неявным внутренним переменным макроуровня, в то же время (как следует из нижеизложенного) – к явным внутренним переменным мезоуровня.

В качестве эволюционных уравнений макроуровня выступают соотношения модели мезоуровня, которые в общем виде могут быть представлены следующей системой (применяются для каждого элемента мезоуровня, все величины принимаются однородными в пределах каждого элемента, индекс элемента для простоты записи опускается):

$$
\begin{gathered}
\mathbf{k}^{\text{cor}} \equiv \dot{\mathbf{k}} + \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{п} : (\mathbf{l} - \boldsymbol{\omega} - \mathbf{z}^{\text{in}} - \mathbf{z}^{\text{th}}) \\
\mathbf{l} = \hat{\nabla}\mathbf{v}^{\text{T}} = \hat{\nabla}\mathbf{V}^{\text{T}} = \mathbf{L}, \quad \theta = \Theta, \quad \dot{\theta} = \dot{\Theta} \\
\mathbf{z}^{\text{in}} = \sum_{k=1}^{K} \dot{\gamma}^{(k)}\mathbf{b}^{(k)}\mathbf{n}^{(k)} \\
\dot{\gamma}^{(k)} = [\text{соотношения для } \dot{\gamma}^{(k)}(\tau^{(k)}, \tau_{\text{c}}^{(k)}, \mathbf{o}, \theta, \boldsymbol{\beta}_i)], \quad k = 1,\dots,K \\
\tau^{(k)} = \mathbf{k} : \mathbf{b}^{(k)}\mathbf{n}^{(k)}, \quad k = 1,\dots,K \\
\dot{\tau}_{\text{c}}^{(k)} = [\text{соотношения для } \dot{\tau}_{\text{c}}^{(k)}(\gamma^{(k)}, \dot{\gamma}^{(k)}, \mathbf{o}, \theta, \boldsymbol{\beta}_i)], \quad k = 1,\dots,K, \quad i = 1,\dots,I \qquad (3.2) \\
\boldsymbol{\omega} = [\text{соотношения для } \boldsymbol{\omega}(\mathbf{l}, \mathbf{z}^{\text{in}}, \mathbf{z}^{\text{th}}, \gamma^{(k)}, \dot{\gamma}^{(k)}, \mathbf{o}, \theta, \boldsymbol{\beta}_i)], \quad \dot{\mathbf{o}}\cdot\mathbf{o}^{\text{T}} = \boldsymbol{\omega}, \quad i = 1,\dots,I, \\
\mathbf{z}^{\text{th}} = \boldsymbol{\alpha}\,\dot{\theta}, \\
\text{q} = \alpha\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{z}^{in}/\hat{\rho}, \\
\dot{\boldsymbol{\beta}}_i = [\text{соотношения для } \dot{\boldsymbol{\beta}}_i(\mathbf{l}, \mathbf{z}^{\text{in}}, \mathbf{z}^{\text{th}}, \gamma^{(k)}, \dot{\gamma}^{(k)}, \mathbf{o}, \theta, \boldsymbol{\beta}_i)], \quad i = 1,\dots,I \\
\mathbf{k}\big|_{t=0} = \mathbf{k}_0, \quad \tau_{\text{c}}^{(k)}\Big|_{t=0} = \tau_{\text{c}0}^{(k)}, \ \gamma^{(k)}\Big|_{t=0} = \gamma_0^{(k)}, \quad k = 1,\dots,K, \quad \mathbf{o}\big|_{t=0} = \mathbf{o}_0
\end{gathered}
$$

Здесь: $\mathbf{k} = (\overset{\circ}{\rho}/\hat{\rho})\boldsymbol{\sigma}$ — взвешенный тензор напряжений Кирхгоффа мезоуровня, $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений Коши мезоуровня; $\mathbf{k}^{\mathrm{cor}} \equiv \dot{\mathbf{k}} + \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{k}$ — не зависящая от выбора системы отсчета скорость изменения (коротационная производная) тензора напряжений Кирхгоффа; $\boldsymbol{\omega}$ — тензор спина ПСК кристаллита, определяющий скорость ее поворота; $\mathbf{п}$ — тензор упругих свойств кристаллита (его компоненты постоянны в базисе ПСК кристаллита); $I = \hat{\nabla}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}$ — транспонированный градиент скорости перемещений, $\hat{\nabla}$ — оператор Гамильтона в текущей лагранжевой системе координат; $\mathbf{z}^{\mathrm{in}}$ и $\mathbf{z}^{\mathrm{th}}$ — неупругая и термическая составляющие транспонированного градиента относительной скорости перемещений; $\dot{\gamma}^{(k)}, \tau^{(k)}, \tau_{\mathrm{c}}^{(k)}$ — скорость сдвига, действующее касательное и критическое касательной напряжение k-й системы скольжения; $\mathbf{b}^{(k)}, \mathbf{n}^{(k)}$ — вектор направления скольжения и нормали к плоскости k-й системы скольжения; $\boldsymbol{\alpha}$ — тензор термического расширения (компоненты постоянны в базисе ПСК кристаллита); q, α — мощность теплового источника и коэффициент выхода тепла; $\boldsymbol{\beta}_i$ — дополнительные тензорные (произвольного ранга) внутренние переменные, вводимые при необходимости описания отличных от скольжения краевых дислокаций физических механизмов деформирования и изменения микроструктуры; $\mathbf{o}$ — тензор ориентации ПСК.

Различные модификации рассмотренной двухуровневой модели были ранее применены для решения задач исследования отклика разных материалов при широком классе воздействий. В статье [55], например, приведены результаты исследования поведения представительного объема (образца) полукристаллического полимера, подвергаемого простейшему одноосному (на макроуровне) нагружению в изотермических условиях. Следует отметить, что при использовании многоуровневых моделей одноосное деформирование на макроуровне приводит к произвольному пространственному нагружению уже на мезоуровне. Возможности применения двухуровневой модели для анализа сложного нагружения представительных объемов поликристаллических металлов продемонстрированы в работах [45, 56, 57]. Показано, что для качественного исследования деформирования материалов при сложном нагружении и больших градиентах перемещений предлагаемые модели могут служить в качестве аналогов машин сложного нагружения. Модификация многоуровневой модели, описанной выше, была разработана и применена к анализу диффузионных и бездиффузионных (мартенситных) твердотельных фазовых превращений [58—60].

Как отмечено выше, система соотношений мезоуровня (3.2) может непосредственно использоваться в качестве конститутивной модель материала в рамках так называемых прямых моделей [24]. С помощью прямых моделей можно детально исследовать поведение приграничных областей материала, анализировать НДС в окрестностях концентраторов напряжений. Пример применения прямой модели для исследования процесса осадки монокристаллического образца представлен в [44]. Было показано, что исходный однородный объем монокристалла в процессе деформирования разделяется на 7 фрагментов, в которых интенсивность сдвиговой деформации отличается на несколько порядков. Вследствие неоднородности пластических сдвигов возникает разориентация выделившихся фрагментов; максимальное значение разориентации соседних фрагментов достигает 8°, поворот кристаллической решетки в них относительно недеформированного состояния достигает 4° при относительной осадке всего на 6%. В результате неоднородного вращения кристаллической решетки в объеме образца (между фрагментами) могут возникать области с искривленной решеткой. В численных экспериментах показано, что в ходе осадки в ряде областей происходит существенное искривление кристаллической решетки монокристалла, что согласуется с результатами натурного эксперимента, в котором показано, что на поверхности также наблюдаются искривленные линии скольжения краевых дислокаций. Данный пример свидетельствует о возможностях применения рассматриваемых моделей для анализа весьма “тонких” эффектов, к которым относятся искривления кристаллической решетки.

На основе более чем десятилетнего опыта разработки и эксплуатации различных вариантов многоуровневых моделей, основанных на введении внутренних переменных и физических теорий упругопластичности (упруговязкопластичности) можно утверждать, что они обладают значительной универсальностью в силу идентичности физических механизмов деформирования на мезо- и микроуровнях для широких классов материалов; указанное свойство позволяет использовать многоуровневые модели для проектирования функциональных материалов и разработки технологий их изготовления. При необходимости они допускают неограниченное расширение включением новых механизмов деформирования и упрочнения (двойникование, зернограничное скольжение, образование барьеров дислокационной природы, взаимодействие дислокаций с точечными дефектами, твердотельные фазовые переходы и т.д.), наращиванием числа структурных и масштабных уровней. Многоуровневые модели могут быть использованы в качестве машины сложного нагружения без ограничений на размерность пространств напряжений и деформаций, что позволит формулировать упрощенные феноменологические модели.

Несмотря на то, что многоуровневые модели свободны от многих недостатков и ограничений феноменологических конститутивных моделей, они не лишены некоторых сложностей при их построении и применении. Прежде всего, физические теории значительно сложнее формулировать: требуется тщательное изучение широкого спектра физических механизмов и их носителей, ответственных за поведение материалов при рассматриваемых термомеханических воздействиях, выделение из них наиболее важных, создание способов описания эволюции носителей, установление связей “родственных” переменных различных уровней и т.д. Многообразие механизмов приводит к необходимости формулировки большого числа уравнений и входящих в них параметров, подлежащих идентификации (при невозможности прямого измерения по части параметров). Как правило, сформулированные уравнения являются существенно нелинейными, что ведет к невозможности аналитических решений и требует применения численных методов, отсюда – потребность в огромных вычислительных ресурсах. Следует отметить также отсутствие апробированной методологии применения многоуровневых моделей для создания функциональных материалов. Однако указанные трудности не представляются принципиально непреодолимыми, в частности, вследствие чрезвычайно высоких темпов развития вычислительной техники.

Заключение. В предлагаемой статье сделана попытка формулировки некоторых вопросов, относящихся к построению и использованию различных классов конститутивных моделей, и представляющих, по мнению автора, определенный интерес. Из сопоставления сложностей и возможностей феноменологических и многоуровневых моделей можно сделать вывод о значительных преимуществах вторых. В то же время многоуровневые модели нуждаются в дальнейшем углублении и совершенствовании, что требует привлечения к их созданию более широкого круга специалистов в области нелинейной механики и физики деформируемого твердого тела. Привлечение внимания к данной области исследований, чрезвычайно глубокой и широкой, и к обозначенным нерешенным вопросам и составляло основную задачу предлагаемой работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (базовая часть государственного задания ПНИПУ, проект № FSNM – 2020-0027) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 17-01-00379-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жилин П.А.* Рациональная механика сплошных сред. Учебн. пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. 584 с.
2. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
3. *Трусов П.В., Келлер И.Э.* Теория определяющих соотношений. Ч. 1. Общая теория. Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-т, 2006. 173 с.
4. *Ильюшин А.А.* Пластичность. Основы общей математической теории. М.: АН СССР, 1963. 272 с.
5. *Васин Р.А.* Некоторые вопросы связи напряжений и деформаций при сложном нагружении // Упругость и неупругость. Вып.1. М.: МГУ, 1971. С. 59–126.
6. *Аннин Б.Д., Жигалкин В.М.* Поведение материалов в условиях сложного нагружения. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. 342 с.
7. *Зубчанинов В.Г.* Механика сплошных деформируемых сред. Тверь: Изд-во ТГТУ, ЧуДо, 2000. 703 с.
8. *Панин В.Е., Егорушкин В.Е., Макаров П.В. и др.* Физическая мезомеханика и компьютерное конструирование материалов. В 2-х т. Т. 1. Новосибирск: Наука. Сибирская издат. фирма РАН, 1995. 298 с.
9. *Панин В.Е., Макаров П.В., Псахье С.Г. и др.* Физическая мезомеханика и компьютерное конструирование материалов: В 2-х т. Т. 2. В. Новосибирск: Наука. Сибирская издат. фирма РАН, 1995. 320 с.
10. *Биргер И.А.* Остаточные напряжения. М.: Машгиз, 1963. 232 с.
11. *Фридман Я.Б.* Механические свойства металлов. Ч. 1. М.: Машиностроение, 1974. 472 с.
12. *Поздеев А.А., Няшин Ю.И., Трусов П.В.* Остаточные напряжения: теория и приложения. М.: Наука, 1982. 112 с.
13. *Жермен П.* Курс механики сплошных сред. Общая теория. М.: Высшая школа, 1983. 399 с.
14. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука. 1988. 712 с.
15. *McDowell D.L.* Internal state variable theory // Handbook of Materials Modeling, S. Yip (ed.). Springer, 2005. P. 1151–1169.
https://doi.org/10.1007/978-1-4020-3286-8_58
16. *Трусов П.В., Ашихмин В.Н., Швейкин А.И.* Двухуровневая модель упругопластического деформирования поликристаллических материалов // Механика композиционных материалов и конструкций. 2009. Т. 15. № 3. С. 327–344.
17. *Трусов П.В., Ашихмин В.Н., Волегов П.С., Швейкин А.И.* Моделирование эволюции структуры поликристаллических материалов при упругопластическом деформировании // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. 2010. Т. 152. Кн. 4. С. 225–237.
18. *Трусов П.В., Швейкин А.И.* Теория пластичности. Пермь: Изд-во Перм. национ. исслед. политехн. ун-та, 2011. 419 с.
19. *Asaro R.J., Needleman A.* Texture development and strain hardening in rate dependent polycrystals // Acta Metall. 1985. V. 33. № 6. P. 923–953.
20. *Anand L.* Single—crystal elasto—viscoplasticity: application to texture evolution in polycrystalline metals at large strains // Computer methods in applied mechanics and engineering. 2004. V. 193. P. 5359–5383.
21. *McDowell D.L.* A perspective on trends in multiscale plasticity // Int. J. Plasticity. 2010. V. 26. P. 1280–1309.
22. *Roters F., Eisenlohr P., Bieler T.R., Raabe D.* Crystal Plasticity Finite Element Methods in Materials Science and Engineering. WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2010. 209 p.
23. *Трусов П.В., Швейкин А.И.* Многоуровневые физические модели моно- и поликристаллов. Статистические модели // Физическая мезомеханика. 2011. Т. 14. № 4. С. 17–28.
24. *Трусов П.В., Швейкин А.И.* Многоуровневые физические модели моно- и поликристаллов. Прямые модели // Физическая мезомеханика. 2011. Т. 14. № 5. С. 5–30.
25. *Taylor G.I.* Plastic strain in metals // J. Inst. Metals. 1938. V. 62. P. 307–324.
26. *Линь Т.Г.* Физическая теория пластичности // Проблемы теории пластичности. Сер. Новое в зарубежной механике. Вып. 7. М.: Мир, 1976. С. 7–68.

27. *Лихачев В.А., Малинин В.Г.* Структурно-аналитическая теория прочности. СПб.: Наука, 1993. 471 с.
28. *Седов Л.И.* Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 284 с.
29. *Грин А., Адкинс Дж.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1965. 456 с.
30. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
31. *Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И.* Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. М.: Наука, 1986. 232 с.
32. *Левитас В.И.* Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев: Наук. думка, 1987. 232 с.
33. *Коробейников С.Н.* Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. 262 стр.
34. *Fincato R., Tsutsumi S.* Numerical modeling of the evolution of ductile damage under proportional and non-proportional loading // Int. J. Solids and Structures. 2019. V. 160. P. 247–264.
35. *Zaremba S.* Sur une forme perfectionnée de la théorie de la relaxation // Bull. Int. Acad. Sci. Cracovie. 1903. P. 595–614.
36. *Jaumann G.* Geschlossenes System physikalischer und chemischer Differential-gesetze // Sitzber. Akad. Wiss. Wien, Abt. IIa. 1911. B. 120. S. 385–530.
37. *Green A.E., Naghdi P.M.* A general theory of an elastic-plastic continuum // Arch. Rational Mech. Anal. 1965. V. 18. P. 251–281.
38. *Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A.* Hypo-elasticity model based upon the logarithmic stress rate // J. Elasticity. 1997. V. 47. P. 51–68.
39. *Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A.* Logarithmic strain, logarithmic spin and logarithmic rate // Acta Mechanica. 1997. V. 124. P. 89–105.
40. *Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A.* Consistent finite elastoplasticity theory combining additive and multiplicative decomposition of the stretching and the deformation gradient // Int. J. Plasticity. 2000. V. 16. P. 143–177.
41. *Зуев Л.Б., Данилов В.И.* Медленные автоволновые процессы при деформации твердых тел // Физическая мезомеханика. 2003. Т. 6. № 1. С. 75–94.
42. *Теплякова Л.А., Лычагин Д.В., Козлов Э.В.* Локализация сдвига при деформации монокристаллов алюминия с ориентацией оси сжатия [001] // Физическая мезомеханика. 2002. Т. 5. № 6. С. 49–55.
43. *Теплякова Л.А., Лычагин Д.В., Беспалова И.В.* Закономерности макролокализации деформации в монокристаллах алюминия с ориентацией оси сжатия [110] // Физическая мезомеханика. 2004. Т. 7. № 6. С. 63–78.
44. *Трусов П.В., Янц А.Ю., Теплякова Л.А.* Прямая физическая упруговязкопластическая модель: приложение к исследованию деформирования монокристаллов // Физическая мезомеханика. 2018. Т. 21. № 2. С. 33–44.
45. *Трусов П.В., Волегов П.С., Янц А.Ю.* Двухуровневые модели поликристаллов: приложение к оценке справедливости постулата изотропии Ильюшина в случае больших градиентов перемещений // Физическая мезомеханика. 2015. Т. 18. № 1. С. 23–37.
46. *Новожилов В.В., Кадашевич Ю.И.* Микронапряжения в конструкционных материалах. Л.: Машиностроение, 1990. 223 с.
47. *Бондарь В.С.* Неупругость. Варианты теории. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 144 с.
48. *Bronkhorst C.A., Kalidindi S.R., Anand L.* Polycrystalline plasticity and the evolution of crystallographic texture in FCC metals // Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. 1992. V. 341. P. 443–477.
49. *Hill R., Rice J.R.* Constitutive analysis of elastic-plastic crystals at arbitrary strain // J. Mech. Phys. Solids. 1972. V. 20. P. 401–413.
50. *Seth B.R.* Generalized strain measure with applications to physical problems / Second Order Effects in Elasticity, Plasticity, and Fluid Dynamics. Eds. M. Reiner, D. Abir. Oxford: Pergamon Press, 1964. V. 2. P. 162–172.
51. *Seth B.R.* Generalized strain and transition concepts for elasticplastic deformation – creep and relaxation / Applied Mechanics: Proc. 11th Int. Congr. Appl. Mech. (Munich 1964), eds. H. Görtler and P. Sorger. Springer-Verlag: Berlin, 1966. P. 383–389.

52. *Трусов П.В., Янц А.Ю.* О физическом смысле неголономной меры деформации // Физическая мезомеханика. 2015. Т. 18. № 2. С. 13–21.
53. *Dancette S., Delannay L., Jodlowski T., Giovanola J.* Multisite model prediction of texture induced anisotropy in brass // Int. J. Mater. Form. 2010 V. 3. Suppl. 1. P. 251–254.
54. *Трусов П.В., Швейкин А.И., Янц А.Ю.* О разложении движения, независимых от выбора системы отсчета производных и определяющих соотношениях при больших градиентах перемещений: взгляд с позиций многоуровневого моделирования // Физическая мезомеханика. 2016. Т. 19. № 2. С. 47–65.
55. *Нечаева Е.С., Трусов П.В.* Конститутивная модель частично кристаллического полимерного материала. Алгоритм реализации для представительного объема макроуровня // Вычислительная механика сплошных сред. 2011. Т. 4. № 2. С. 82–95.
56. *Трусов П.В., Волегов П.С., Янц А.Ю.* Двухуровневые модели поликристаллов: о независимости образа нагружения представительного макрообъема // Физическая мезомеханика. 2013. Т. 16. № 6. С. 33–41.
57. *Трусов П.В., Волегов П.С., Янц А.Ю.* Двухуровневые модели поликристаллов: приложение к анализу сложного нагружения // Физическая мезомеханика. 2013. Т. 16. № 6. С. 43–50.
58. *Исупова И.Л., Трусов П.В.* Математическое моделирование фазовых превращений в сталях при термомеханической нагрузке // Вестник ПНИПУ. Механика. 2013. № 3. С. 127–156.
59. *Исупова И.Л., Трусов П.В.* Моделирование поведения сталей с учетом диффузионных фазовых превращений // Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2014. № 1 (190). С. 191–197.
60. *Трусов П.В., Исупова И.Л.* Построение двухуровневой модели для описания поведения сталей при термомеханическом нагружении в интервале мартенситных превращений // Физическая мезомеханика. 2014. Т. 17. № 2. С. 5–17.