ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 1, с. 17–43

УДК 521.1

УПРАВЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ДВИЖЕНИЕМ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БИКВАТЕРНИОНОВ И ДУАЛЬНЫХ МАТРИЦ

© 2021 г.

Ю.Н. Челноков

Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов, Россия

e-mail: ChelnokovYuN@gmail.com

Поступила в редакцию 20.01.2019 г.
После доработки 17.02.2019 г.
Принята к публикации 28.02.2019 г.

Разрабатывается в нелинейной динамической постановке с использованием бикватернионов Клиффорда и дуальных матриц метод аналитического построения управления пространственным движением твердого тела (управления винтовым движением, эквивалентным композиции углового (вращательного) и поступательного движений). Управления обеспечивают асимптотическую устойчивость в большом любого выбранного программного пространственного движения в инерциальной системе координат и желаемую динамику управляемого пространственного движения твердого тела. Для построения законов управления используются бикватернионные и дуальные матричные модели пространственного движения твердого тела, концепция решения обратных задач динамики, принцип управления с обратной связью и приведение построенных нелинейных дифференциальных уравнений возмущенного пространственного движения твердого тела к эталонным линейным стационарным дифференциальным формам выбранной структуры за счет использования предлагаемых нелинейных обратных связей в законах управления.

Рассматриваются бикватернионные модели пространственного движения твердого тела, дается постановка задачи управления движением твердого тела, приводятся различные формы нелинейных дифференциальных уравнений возмущенного пространственного движения твердого тела в бикватернионных и винтовых переменных, удобные для построения законов управления. Предлагаются различные дуальные матричные (винтовые) законы управления пространственным движением твердого тела, для которых нелинейные нестационарные дифференциальные уравнения возмущенного пространственного движения твердого тела принимают вид линейных стационарных дуальных матричных дифференциальных уравнений второго порядка (относительно винтовой части бикватерниона ошибки положения твердого тела), инвариантных относительно любого выбранного программного пространственного движения твердого тела. Постоянные коэффициенты (скалярные дуальные или матричные дуальные) этих уравнений являются коффициентами усиления нелинейных обратных связей в предлагаемых дуальных законах управления, обеспечивающих нужное качество переходных процессов управления. Обсуждается определение коэффициентов усиления нелинейных обратных связей, свойства управляемого движения твердого тела.

Ключевые слова: твердое тело, пространственное движение, программное и стабилизирующее управления, винтовые законы управления, бикватернион

DOI: 10.31857/S0572329921010049

Введение. *Применение кватернионов Гамильтона в задачах управления вращательным движением твердого тела.* Построение управления движением твердого тела в традиционной постановке включает задачу построения программного движения, программного управления и задачу построения управления, стабилизирующего программное движение в малом. Задача управления угловым движением твердого тела в настоящее время, как правило, решается с использованием кватернионов поворота Гамильтона, являющихся наиболее удобным средством описания углового (вращательного) движения твердого тела, и с использованием кватернионных кинематических уравнений вращательного движения твердого тела в параметрах Эйлера (Родрига—Гамильтона), имеющих известные качественные преимущества перед уравнениями в угловых переменных (в углах Эйлера—Крылова).

Задача построения программного углового движения и программного управления с использованием кватернионов во многих случаях решается с помощью методов теории оптимального управления (наиболее часто с использованием принципа максимума Понтрягина) [1—10]. Аналитическое решение этой задачи для наиболее часто используемых функционалов оптимизации при произвольно заданных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости твердого тела не найдено. Поэтому в общем случае приходится рассчитывать лишь на приближенное аналитическое или численное решение задачи. Построение стабилизирующего управления осуществляется на основе линеаризованных дифференциальных уравнений возмущенного углового движения твердого тела и также встречает серьезные трудности в случаях, когда эти уравнения нестационарны.

Большое количество работ посвящено другому подходу к построению управления угловым движением твердого тела с использованием кватернионов [11—17]. Этот подход использует принцип обратной связи для формирования законов управления и метод Ляпунова для анализа устойчивости управляемого углового движения твердого тела. Во многих работах этот подход используется для построения управления большими пространственными поворотами космического аппарата, рассматриваемого как твердое тело. В большинстве из этих работ изучается задача переориентации твердого тела: задача перевода твердого тела из одного фиксированного углового положения в другое (при нулевых угловых скоростях твердого тела в начальном и конечном положениях). Законы управления строятся в виде линейных или нелинейных функций компонент кватерниона ошибки ориентации и вектора угловой скорости твердого тела так, чтобы процесс переориентации был асимптотически устойчивым в большом или в целом. Уравнения движения твердого тела, замкнутые такими законами управления, получаются нелинейными, что затрудняет изучение динамики управляемого углового движения твердого тела и определение коэффициентов усиления обратных связей, гарантирующих желаемые качественные и количественные характеристики переходных процессов.

В работах автора статьи [18—25] разработаны в нелинейной постановке с использованием кватернионов теория и методы аналитического построения управлений угловым движением твердого тела, обеспечивающих асимптотическую устойчивость в большом или в целом любого выбранного программного углового движения и желаемую динамику управляемого углового движения твердого тела. Для построения законов управления использованы кватернионные модели вращательного движения твердого тела, концепция решения обратных задач динамики, принцип управления с обратной связью и приведение дифференциальных уравнений возмущенного углового движения твердого тела к эталонным стационарным дифференциальным формам выбранной структуры (за счет определенного формирования нелинейных обратных связей в законах управления).

В этих работах предложены кватернионные динамические модели вращательного движения твердого тела в нормированных и ненормированных кватернионах поворотов, дана постановка задач управления ориентацией твердого тела, получены различные формы дифференциальных уравнений возмущенного углового движения твердого тела в кватернионных и векторных переменных, удобные для построения законов управления. Рассмотрены эталонные дифференциальные уравнения, описывающие желаемую динамику управляемого углового движения твердого тела, синтезированы три группы законов управления, использующих кватернионные (нормированные и ненормированные) и векторные кинематические параметры вращательного движения твердого тела: 1) векторные части нормированных кватернионов ориентации, 2) векторы конечных поворотов, 3) ненормированные кватернионы поворотов. Рассмотрено определение коэффициентов (скалярных, матричных, кватернионных) усиления нелинейных обратных связей, обеспечивающих желаемые качественные и количественные характеристики переходных процессов, предложены алгоритмы управления, реализующие предложенные законы управления.

Отметим, что использование нормированных кватернионов поворотов в теории и практике управления вращательным движением твердого тела стало общепринятым, поскольку они являются наиболее простым и удобным средством математического описания вращательного движения твердого тела. Использование нами (при синтезе третьей группы законов управления) ненормированных кватернионов поворотов приводит к необходимости введения расширенного (восьмимерного) вектора состояния твердого тела и расширенного (четырехмерного) вектора управления вместо обычно используемых семимерного вектора состояния и трехмерного вектора управления. Роль переменных состояния твердого тела играют в этом случае ненормированный кватернион ориентации твердого тела и кватернион угловой скорости с ненулевой скалярной частью, а роль управления – кватернион углового ускорения (или кватернион управляющего момента) с ненулевой скалярной частью. Такое расширение вектора состояния и вектора управления позволяет провести синтез четырехмерного стабилизирующего управления в кватернионном виде без разделения кватернионных уравнений движения на скалярную и векторную части. Выделение скалярной и векторной частей, необходимое для построения вектора углового ускорения твердого тела и вектора управляющего момента, проводится на конечной стадии (в конечных соотношениях).

Отметим также, что решение задачи синтеза стабилизирующего управления на основе кватернионных моделей возмущенного углового движения твердого тела, использующих нормированные кватернионы поворотов, кватернионы угловой скорости и углового ускорения с нулевыми скалярными частями, в рамках предложенного в этих работах метода синтеза требует разделения уравнений возмущенного движения на скалярную и векторную части в рамках самой процедуры синтеза, что приводит к более сложному решению задачи синтеза. Кроме этого, законы управления, построенные на основе этих моделей, а также на основе векторных моделей, вырождаются при определенном угловом положении твердого тела в пространстве (при равенстве 180 градусам эйлерова угла поворота твердого тела в его возмущенном движении), в то время как использование при синтезе "четырехмерных" угловых скоростей и ускорений позволяет построить невырождающиеся законы управления.

Применение бикватернионов Клиффорда в задачах управления пространственным движением твердого тела. Применение бикватернионов Клиффорда [26–30] в задачах управления пространственным движением твердого тела было начато в кинематических задачах управления движением твердого тела. До этого [29–38] в кинематических задачах управления вращательным движением твердого тела широко использовались кватернионы Гамильтона. В этих задачах управления в качестве математических моделей движения тела рассматриваются кинематические уравнения вращательного (углового) и (или) поступательного (траекторного) движения тела, в которых в качестве фазовой переменной выступает кватернион поворота Гамильтона или бикватернион конечного перемещения Клиффорда, а в качестве управлений – векторы угловой и (или) поступательной скоростей тела или кинематические винты. Цель кинематического управления – перевод твердого тела из его заданного начального положения (углового положения в случае рассмотрения углового (вращательного) перемещения или углового и линейного положения в случае рассмотрения общего пространственного перемещения) в требуемое конечное положение за счет сообщения телу требуемой угловой скорости или требуемых угловой и линейной скоростей. Такая задача решается в классе задач построения программных (в частности, оптимальных) траекторий движения и программных управлений движением твердого тела. Также целью кинематического управления может быть перевод твердого тела из его заданного начального положения на любую выбранную программную траекторию углового (вращательного) или общего программного пространственного движения и дальнейшее асимптотически устойчивое движение по программной траектории с требуемой программной угловой скоростью в случае рассмотрения углового движения или с требуемыми программными угловой и линейной скоростями в случае рассмотрения общего пространственного движения за счет сообщения телу требуемой стабилизирующей угловой скорости или требуемых стабилизирующих угловой и линейной скоростей. Такая задача решается в классе задач построения стабилизирующих (в частности, оптимальных стабилизирующих) траекторий движения и управлений движением твердого тела.

Кинематические задачи управления играют важную роль в теории управления движением твердого тела в силу следующих причин. Во-первых, они, в отличие от динамических задач управления, во многих случаях имеют аналитические решения, которые часто используются при построении программных траекторий и управлений движением твердого тела. Во-вторых, использование аналитических решений кинематических задач управления в сочетании с методом решения обратных задач динамики позволяет в ряде случаев построить эффективные законы управления движением твердого тела, учитывающие его динамику. В последнее время решения кинематических задач управления стали использоваться при синтезе управлений движением твердого тела в динамической постановке с использованием метода "бэкстеппинг".

Кинематические задачи управления имеют ряд важных приложений, в частности, в задачах управления движением космических аппаратов, инерциальной навигации и в задачах управления движением роботов-манипуляторов.

Как известно, произвольное пространственное перемещение свободного твердого тела эквивалентно винтовому перемещению (теорема Шаля). Поэтому мгновенное пространственное движение свободного твердого тела представляет собой мгновенное винтовое движение. Кинематическая задача построения оптимального в смысле быстродействия винтового перемещения свободного твердого тела из заданного начального положения в требуемое конечное в бикватернионной постановке изучалась в работах [38, 39]. Для получения аналитического решения задачи было использовано бикватернионное кинематическое уравнение винтового движения свободного твердого тела, предложенное автором настоящей статьи в работах [40, 41] (см. также [29]).

Использование бикватернионного кинематического уравнения в теории кинематического управления движением свободного твердого тела позволяет применить мощный принцип перенесения Котельникова–Штуди [26–30], в соответствии с которым все результаты, полученные в задачах кинематического управления вращательным движением твердого тела с использованием кватернионного кинематического уравнения, могут быть формально перенесены на более общие задачи кинематического управления движением свободного твердого тела с использованием бикватернионного кинематического уравнения, если в кватернионных уравнениях и соотношениях, полученных при решении задач управления вращательным движением, кватернионные величины заменить на соответствующие бикватернионные величины, используемые в задачах кинематического управления движением свободного твердого тела.

Кинематическое управление движением свободного твердого тела рассматривалось с использованием дуальных кватернионов (параболических бикватернионов) в [42]. В этой работе используется понятие логарифма кватерниона, введенное M.J. Kim, M.S. Kim и S.Y. Shin [43]: это – трехмерный вектор, равный половинному эйлерову углу поворота, умноженному на единичный вектор эйлеровой оси конечного поворота твердого тела (т.е. это – половинный классический эйлеров вектор конечного поворота твердого тела). Отметим, что такое логарифмическое представление кватерниона поворота известно в отечественной литературе, так в книге [29] автора статьи показывается, что четырехмерная ортогональная кватернионная матрица поворота равна матричной экспоненте от трехмерной кососимметрической матрицы, элементы которой – проекции половинного эйлерова вектора конечного поворота, а классический кватернион поворота Гамильтона равен кватернионной экспоненте от половинного эйлерова вектора конечного поворота. Отсюда непосредственно следует, что логарифм кватерниона равен половинному эйлерову вектору конечного поворота. В статье [42] приводится также логарифмическое представление дуального кватерниона (параболического бикватерниона) перемещения твердого тела в виде половинного винта конечного перемещения, соответствующего описанию Шаля винтового конечного перемещения свободного твердого тела. Введенное логарифмическое представление дуального кватерниона используется для построения кинематического логарифмического закона управления движением свободного твердого тела по принципу обратной связи.

В статье [42] вводится как известное (без приведения ссылок или вывода) дуальное (бикватернионное) кинематическое уравнение движения свободного твердого тела в форме, использующей (в наших терминах) отображение кинематического винта твердого тела на “неподвижный” (опорный) базис. Отметим, что это уравнение было получено ранее [41] автором настоящей статьи (см. также бикватернионные кинематические уравнения (6.29), (6.15) книги [29] автора статьи и уравнение (3.64) книги [30]). В работе [41] автора статьи и в его книге [29] отмечается, что дуальные ортогональные проекции кинематического винта твердого тела на оси “неподвижной” (опорной) системы координат, входящие в обсуждаемое бикватернионное кинематическое уравнение, содержат не только проекции векторов угловой и линейной скорости тела (точнее, линейной скорости точки тела, выбранной в качестве полюса) на оси опорной системы координат, но и проекции радиус-вектора выбранного полюса тела на опорные координатные оси. Это затрудняет использование такой бикватернионной формы кинематических уравнений движения свободного твердого тела (в силу их сложности). Указанного недостатка не имеет другая форма бикватернионного кинематического уравнения движения свободного твердого тела, также предложенная в [40, 41] автором статьи. В этой форме в качестве коэффициентов бикватернионного уравнения выступают только дуальные ортогональные проекции кинематического винта твердого тела на оси системы координат, связанной с телом, представляющие собой комплексные (в смысле Клиффорда) композиции проекций векторов угловой и линейной скорости тела на связанные с ним координатные оси. Именно такое бикватернионное кинематическое уравнение движения свободного твердого тела было использовано в [38, 39] при решении кинематической задачи оптимального в смысле быстродействия винтового перемещения свободного твердого тела из заданного начального положения в требуемое конечное положение. В случае, когда необходимо знание проекций найденного оптимального винта скоростей твердого тела не на связанные с телом координатные оси, а на оси “неподвижной” (опорной) системы координат (как например, в задачах робототехники), необходимо воспользоваться операцией перепроектирования дуальных ортогональных проекций кинематического винта из связанной системы координат в опорную.

В статье [42] предложен кинематический бикватернионный стабилизирующий закон управления движением свободного твердого тела, имеющий вид логарифмической обратной связи. Кинематический винт свободного твердого тела, определенный своими дуальными ортогональными проекциями в “неподвижной” (основной) системе координат, предлагается формировать по принципу отрицательной обратной связи в виде логарифма дуального кватерниона, характеризующего положение тела в пространстве, умноженного на отрицательный коэффициент пропорциональности (коэффициент усиления обратной связи). С помощью функций Ляпунова доказывается, что такое управление гарантирует стабилизацию (асимптотическую устойчивость) любого первоначального положения твердого тела. В статье также приводится бикватернионное логарифмическое стабилизирующее управление программным (рекомендованным) движением при наличии программного и стабилизирующего управлений, предназначенное для вывода тела на рекомендованную траекторию из произвольного начального положения и отслеживания рекомендованной траектории движения тела, а также приводятся примеры управления плоским движением твердого тела (омниробота). Отметим, однако, что в статье нет строгой постановки задач кинематического управления движением твердого тела и нет рекомендаций по выбору коэффициентов усиления предлагаемых логарифмических отрицательных обратных связей, обоснованный выбор которых осложняется нелинейностью дифференциальных уравнений движения свободного твердого тела, замкнутых законами управления, построенными в виде логарифмической обратной связи.

Работы [44, 45] также посвящены решению кинематических задач управления движением механических систем и свободного твердого тела с использованием дуальных кватернионов и законов управления, построенных с использованием отрицательной бикватернионной логарифмической обратной связи. В недавней работе [46] рассмотрено управление движением руки робота с использованием дуальных кватернионов и кинематического бикватернионного стабилизирующего закона управления, предложенного в [42] и имеющего вид отрицательной бикватернионной логарифмической обратной связи.

В работе автора статьи [47] рассмотрена кинематическая задача построения с использованием принципа обратной связи кинематического винта скоростей, сообщение которого свободному твердому телу обеспечивает его асимптотически устойчивый перевод из произвольного начального положения на любую выбранную программную траекторию винтового движения и дальнейшее асимптотически устойчивое движение по этой траектории с заданным (программным) кинематическим винтом скоростей. Роль управления играет кинематический винт твердого тела, фазовой переменной является нормированный или ненормированный бикватернион конечного перемещения твердого тела, исходная математическая модель движения имеет вид бикватернионного кинематического уравнения движения свободного твердого тела, предложенная в работах автора статьи [40, 41].

В статье [47] приводится решение задачи в двух постановках: с использованием бикватернионных кинематических уравнений движения в нормированных и ненормированных бикватернионных переменных. При этом в первом случае в качестве управления выступает трехмерный винт управления (точнее, бикватернион кинематического винта с нулевой скалярной частью), а во-втором – четырехмерный бикватернион управления с ненулевой дуальной скалярной частью, которая отвечает за изменение нормы бикватерниона конечного перемещения твердого тела (точнее, отвечает за управление нормой этого бикватерниона). Показывается, что использование ненормированных бикватернионных переменных позволяет построить регулярные в целом законы управления, не содержащие особых точек, в то время как использование нормированных бикватернионных переменных приводит (в рамках использованной процедуры синтеза управлений) к законам управления, содержащим особую точку, в которой эйлеров угол поворота тела равен 180 градусам.

Основное внимание в работе [47] уделяется задаче построения стабилизирующего управления, которое формируется по принципу обратной связи в виде нелинейной бикватернионной функции компонент бикватерниона ошибки по местоположению твердого тела (угловому и линейному) так, чтобы нелинейные нестационарные дифференциальные уравнения возмущенного движения свободного твердого тела, замкнутые построенными законами управления, принимали эталонный вид, инвариантный относительно любого выбранного программного движения: вид дуальных линейных стационарных дифференциальных уравнений первого или второго порядка относительно бикватернионной переменной, характеризующей конечную ошибку по местоположению твердого тела. Постоянные коэффициенты (скалярные, матричные, бикватернионные) этих (эталонных) уравнений имеют смысл коэффициентов усиления нелинейных обратных связей по местоположению тела, реализуемых системой управления движением твердого тела, а сами уравнения описывают эталонную динамику переходных процессов. Это позволяет аналитически точно определять коэффициенты усиления нелинейных обратных связей исходя из желаемых качественных и количественных характеристик переходного процесса.

В работе автора статьи и Е.И. Нелаевой [48] получено аналитическое решение в кинематической бикватернионной постановке задачи оптимальной нелинейной стабилизации произвольного программного движения свободного твердого тела. В качестве математических моделей движения используются бикватернионные кинематические уравнения возмущенного движения свободного твердого тела в нормированных бикватернионах конечных перемещений, а в качестве управлений – дуальные ортогональные проекции мгновенного винта скоростей движения тела на связанные с ним координатные оси или на оси инерциальной системы координат. Каждый из двух минимизируемых функционалов характеризует собой интегральную величину затрат на управление и квадратичных отклонений параметров движения свободного твердого тела от их программных значений, взятых в определенной пропорции, определяемой величинами весовых коэффициентов (т.е. минимизируется интеграл от взвешенной суммы квадратов компонент кинематического винта (управления) и суммы квадратичных отклонений параметров движения свободного твердого тела от их программных значений). С помощью принципа максимума Понтрягина построены законы оптимального управления и дифференциальные уравнения задачи оптимизации. Найдено аналитическое решение этой задачи в бикватернионной и кватернионной формах. Оптимальное движение свободного твердого тела в текущий момент времени представляет собой асимптотически устойчивое мгновенное винтовое движение вдоль оси, имеющей в инерциальной (опорной) системе координат направление, противоположное направлению мгновенного винта ошибки ориентации и местоположения твердого тела в этой системе координат. В законы оптимального управления входят в явном виде коэффициенты функционала минимизации, управление может быть реализовано по принципу обратной связи.

Отметим, что в работе автора статьи [49] дан обзор работ по теории кинематического управления вращательным движением твердого тела и пространственным движением свободного твердого тела с использованием кватернионных и бикватернионных кинематических моделей движения твердого тела. В его работе [50] дан обзор работ, посвященных следующим приложениям кватернионной и бикватернионной теории кинематического управления движением твердого тела: двухконтурное управление вращательным движением космического аппарата с использованием бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС); бесплатформенные корректируемые системы ориентации и навигации движущихся объектов; управление движением платформенного комплекса “ТСП-Аргус” космического проекта “Марс-94”, состоящего из манипулятора и трехосной стабилизированной платформы, расположенной на выходном звене манипулятора в обращенном торсионном кардановом подвесе; оптимальная переориентация орбиты, плоскости оскулирующей орбиты и коррекция угловых элементов орбиты космического аппарата посредством реактивного ускорения, ортогонального плоскости орбиты аппарата; решение обратных задач кинематики роботов-манипуляторов с использованием бикватернионной теории кинематического управления; кинематическое управление в механике роботов-манипуляторов (независимое программное управление движением по скорости).

Отметим также, что в работах автора статьи [41, 25, 51] и в книге [30] бикватернионы были использованы для получения новых бикватернионных уравнений и алгоритмов инерциальной навигации, предназначенных для нахождения параметров ориентации, координат местоположения и проекций вектора скорости движущегося объекта по измеренным в связанной с объектом системе координат проекциям вектора абсолютной угловой скорости объекта и проекциям вектора его кажущегося ускорения (или измеренным приращениям интегралов от проекций этих векторов) и информации о гравитационном поле Земли, в котором движется объект.

В последнее время бикватернионы стали широко использоваться для решения задач управления пространственным движением твердого тела, в частности, космического аппарата, рассматриваемого как твердое тело, в динамической постановке [52–74]. Уравнения динамики твердого тела записываются в бикватернионной форме, объединяющей динамические уравнения вращательного и поступательного движений твердого тела, и дополняются бикватернионным кинематическим уравнением. Для построения законов управления по принципу обратной связи часто используется один из современных методов теории управления – управление с прогнозирующей моделью (Model Predictive Control или MPC) [75]. MPC позволяет получить квазиоптимальное решение для нелинейных объектов при наличии ограничений на управление и фазовых ограничений, но имеет и ряд недостатков, среди которых – неаналитичность, достаточно высокое потребление вычислительных ресурсов, поскольку этот метод требует численного интегрирования дифференциальных уравнений движения.

Для синтеза законов управления по принципу обратной связи также используется метод “бэкстеппинг” (“backstepping”). Это – рекурсивная процедура, в которой совмещены задачи нахождения функции Ляпунова и соответствующего ей закона управления. Метод был предложен П. Кокотовичем в 1990 году. В соответствии с этим методом задача построения закона управления для всей системы разбивается на последовательность соответствующих подзадач для систем меньшего порядка. Алгоритм бэкстеппинга заключается в том, чтобы сделать каждый интегратор объекта устойчивым путем добавления обратной связи, вычисленной по этому алгоритму, и представляет собой набор действий, выполняемых для каждого дифференциального уравнения математической модели объекта. Для задачи управления пространственным движением твердого тела на первом этапе рассматривается кинематическая задача управления движением тела, описываемая бикватернионным кинематическим уравнением. На этом этапе кинематический бикватернионный стабилизирующий закон управления часто берется в виде логарифмической обратной связи, т.е. в виде, использующем логарифмическое представление дуального кватерниона (бикватерниона) пространственного перемещения тела (об этом законе говорилось выше).

В настоящей статье в нелинейной динамической постановке с использованием параболических бикватернионов Клиффорда и дуальных матриц изучается задача построения управления пространственным движением твердого тела (винтовым движением, эквивалентным композиции углового (вращательного) и поступательного движений). Предлагается аналитический метод построения законов управления пространственным движением твердого тела и законы управления, обеспечивающие асимптотически устойчивый в большом перевод твердого тела, имеющего произвольные начальные угловую и линейную скорости, из его произвольного заранее незаданного начального углового и линейного положений на любую выбранную программную траекторию пространственного (углового и линейного) движения и дальнейшее асимптотически устойчивое движение твердого тела по этой траектории с необходимыми (программными) угловыми и линейными скоростями и ускорениями. Переходный процесс управления при этом имеет желаемые качественные и количественные характеристики.

1. Уравнения движения. Рассмотрим свободное твердое тело или несвободное твердое тело, способное совершать относительно основной системы координат мгновенное винтовое движение, эквивалентное композиции поступательного движения тела вместе с произвольно выбранной точкой тела и вращения тела вокруг этой точки. Тело находится под действием произвольного главного вектора и главного момента внешних сил, включающих в себя вектор управляющей силы и вектор управляющего момента. Управляемое пространственное движение тела будем рассматривать относительно инерциальной системы координат $O_1\xi_1\xi_2\xi_3$ (ξ) (ее начало O_1 находится в центре масс Земли, ось $O_1\xi_3$ направлена по оси вращения Земли, а оси $O_1\xi_1$ и $O_1\xi_2$ лежат в плоскости экватора и не участвуют в суточном вращении Земли), а также относительно опорной (программной) системы координат $O_2Z_1Z_2Z_3(Z)$, задающей в инерциальном пространстве программное пространственное движение твердого тела. С твердым телом жестко свяжем систему координат $CX_1X_2X_3(X)$ с началом в центре масс тела C.

Введем обозначения: $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ — радиус-вектор и вектор скорости центра масс твердого тела в инерциальной системе координат, $\boldsymbol{\lambda}$ — кватернион ориентации тела в этой системе координат, компонентами которого являются параметры Родрига—Гамильтона (Эйлера) $\lambda_j (j = \overline{0,3})$, одинаковые в базисах ξ и X (эти параметры могут быть выражены через углы Эйлера—Крылова), $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ — векторы абсолютной угловой скорости и абсолютного углового ускорения тела, $\mathbf{F}_c$ и $\mathbf{M}_c$ — векторы управляющей силы и управляющего момента, приложенных к телу, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ и $\mathbf{M} = \mathbf{M}(t, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega})$ — главный вектор других внешних сил, действующих на твердое тело, (сил гравитации, сопротивления движению и других сил взаимодействия тела с внешней средой) и главный момент этих сил, вычисленный относительно центра масс тела, полагаемые известными функциями времени t и переменных $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ и $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\omega}$.

Исходные дифференциальные уравнения движения твердого тела, записанные в связанной с твердым телом системе координат X, имеют вид

$$m[\dot{\mathbf{v}}_x + \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_x)\mathbf{v}_x] = \mathbf{F}_x(t, \mathbf{r}_x, \mathbf{v}_x) + \mathbf{F}_{cx}, \quad \dot{\mathbf{r}}_x + \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_x)\mathbf{r}_x = \mathbf{v}_x \tag{1.1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_x = \boldsymbol{\varepsilon}_x = \mathbf{J}^{-1}[\mathbf{M}_x(t, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega}_x) - \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_x)\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_x + \mathbf{M}_{cx}] \tag{1.2}$$

$$2\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}_x \tag{1.3}$$

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_v = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{3} \lambda_k \mathbf{i}_k, \quad \dot{\lambda} = \dot{\lambda}_0 + \dot{\lambda}_v = \dot{\lambda}_0 + \sum_{k=1}^{3} \dot{\lambda}_k \mathbf{i}_k$$

$$\boldsymbol{\omega}_x = \boldsymbol{\omega}_1 \mathbf{i}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \mathbf{i}_2 + \boldsymbol{\omega}_3 \mathbf{i}_3$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_{11} & -J_{12} & -J_{13} \\ -J_{21} & J_{22} & -J_{23} \\ -J_{31} & -J_{32} & J_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_x) = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\omega}_3 & \boldsymbol{\omega}_2 \\ \boldsymbol{\omega}_3 & 0 & -\boldsymbol{\omega}_1 \\ -\boldsymbol{\omega}_2 & \boldsymbol{\omega}_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь в уравнениях (1.1) и (1.2) $\mathbf{r}_x$, $\mathbf{v}_x$, $\boldsymbol{\omega}_x$, ε_x, $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{F}_{cx}$, $\mathbf{M}_{cx}$ — векторы-столбцы размерами 3×1 или, далее, кватернионы с нулевыми скалярными частями, составленные из проекций $x_k, v_k, \omega_k, \varepsilon_k, F_k, M_k, F_{ck}, M_{ck}$ $(k = 1,2,3)$ векторов $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{F_c}$, $\mathbf{M_c}$ на оси связанной системы координат X; m – масса тела, J – постоянная матрица инерции твердого тела; $K(\omega_x)$ – кососимметрическая матрица угловых скоростей тела, сопоставляемая вектору $\boldsymbol{\omega}$; $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ – орты гиперкомплексного пространства (векторные мнимые единицы Гамильтона); $\mathbf{a}_y$ – отображение вектора $\mathbf{a}$ на базис $Y(Y = \xi, X, Z)$, определяемое как кватернион $\mathbf{a}_y = a_1\mathbf{i}_1 + a_2\mathbf{i}_2 + a_3\mathbf{i}_3$, компоненты которого – проекции a_k вектора $\mathbf{a}$ на базис Y; верхняя точка означает производную по времени t (при вычислении производной от кватерниона орты $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ полагаются неизменными), знак $\circ$ означает кватернионное умножение.

Первое матричное уравнение (1.1) и матричное уравнение (1.2) являются динамическими, а второе матричное уравнение (1.1) и кватернионное уравнение (1.3) – кинематическими уравнениями пространственного движения твердого тела, представляющего собой композицию поступательного (траекторного) и углового (вращательного) движений. Они образуют систему нелинейных, нестационарных дифференциальных уравнений тринадцатого порядка относительно переменных x_k, v_k и λ_j, ω_k. В случае, когда с твердым телом жестко связывается система координат $OX_1X_2X_3(X)$ с началом в другой произвольно выбранной точке O тела, в состав главного вектора $\mathbf{F}$ и главного момента $\mathbf{M}$ внешних сил включаются переносная сила инерции и ее момент относительно точки O твердого тела.

2. Задачи управления. Поставим следующую задачу: построить допустимые управления

$$\mathbf{F}_{cx} = \mathbf{F}_{cx}(\mathbf{r}_z^*(t), \mathbf{v}_z^*(t), \dot{\mathbf{v}}_z^*, \boldsymbol{\omega}_z^*(t), \mathbf{r}_x, \mathbf{v}_x, \boldsymbol{\omega}_x), \qquad \mathbf{M}_{cx} = \mathbf{M}_{cx}(\boldsymbol{\lambda}^*(t), \boldsymbol{\omega}_z^*(t), \varepsilon_z^*(t), \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega}_x)$$

обеспечивающие асимптотически устойчивый в большом перевод твердого тела из произвольного, заранее незаданного начального состояния $\mathbf{r}_x(t_0)$, $\mathbf{v}_x(t_0)$, $\boldsymbol{\lambda}(t_0)$, $\boldsymbol{\omega}_x(t_0)$ на любую выбранную программную траекторию

$$\mathbf{r}_z^* = \mathbf{r}_z^*(t), \qquad \mathbf{v}_z^* = \mathbf{v}_z^*(t), \qquad \boldsymbol{\lambda}^* = \boldsymbol{\lambda}^*(t), \qquad \boldsymbol{\omega}_z^* = \boldsymbol{\omega}_z^*(t)$$

и дальнейшее асимптотически устойчивое движение твердого тела по этой траектории. При этом переходный процесс (возмущенное движение тела) должен иметь желаемые качественные и количественные характеристики.

Здесь $\mathbf{r}_z^*$ и $\mathbf{v}_z^*$ – отображения программных радиус-вектора $\mathbf{r}^*$ и вектора $\mathbf{v}^*$ скорости центра масс твердого тела в инерциальной системе координат на оси программной системы координат Z, $\boldsymbol{\lambda}^*$ – кватернион программной ориентации тела в инерциальной системе координат, компонентами которого являются параметры Родрига–Гамильтона (Эйлера) λ_j^* $(j = \overline{0,3})$, одинаковые в базисах ξ и Z, $\boldsymbol{\omega}_z^*$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_z^*$ – отображения векторов программных абсолютной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}^*$ и абсолютного углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ тела на оси программной системы координат Z.

Поставленную задачу будем решать, используя концепцию решения обратных задач динамики и принцип управления с обратной связью. Законы формирования управляющей силы и управляющего момента в соответствии с концепцией решения обратных задач динамики получаются на основе уравнений (1.1), (1.2) и имеют вид

$$\mathbf{F}_{cx} = m[\dot{\mathbf{v}}_x + \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_x)\mathbf{v}_x] - \mathbf{F}_x(t, \mathbf{r}_x, \mathbf{v}_x) \tag{2.1}$$

$$\mathbf{M}_{cx} = \mathbf{J}\boldsymbol{\varepsilon}_x + \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_x)\mathbf{J}\omega_x - \mathbf{M}_x(t, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega}_x) \tag{2.2}$$

Вторые и третьи слагаемые в этих законах управления носят компенсационный характер и обеспечивают, в том числе, компенсацию действующих внешних сил неуправляющего характера и их моментов. Они могут быть сформированы по известному вектору ($\mathbf{r}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega}$) текущего состояния твердого тела, вырабатываемому, например, бесплатформенной инерциальной навигационной системой. Входящие в первые слагаемые законов управления (2.1) и (2.2) требуемая составляющая $\dot{\mathbf{v}}_x = \mathbf{w}_x$ абсолютного линейного ускорения и требуемое абсолютное угловое ускорение $\boldsymbol{\varepsilon}_x$ могут быть построены на основе матричных (2.3) и кватернионных (2.4) уравнений:

$$\dot{\mathbf{v}}_x = \mathbf{w}_x, \quad \dot{\mathbf{r}}_x + \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_x)\mathbf{r}_x = \mathbf{v}_x \tag{2.3}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_x = \boldsymbol{\varepsilon}_x, \quad 2\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}_x, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_x = \varepsilon_1 \mathbf{i}_1 + \varepsilon_2 \mathbf{i}_2 + \varepsilon_3 \mathbf{i}_3 \tag{2.4}$$

получающихся из уравнений (1.1)—(1.3).

Фигурирующие в этих уравнениях величины $\mathbf{w}_x$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_x$ рассматриваются нами в дальнейшем как новые управления.

Таким образом, задача построения управляющей силы $\mathbf{F}_{cx}$ и управляющего момента $\mathbf{M}_{cx}$ в рассматриваемой постановке сводится к синтезу требуемой составляющей $\mathbf{w}_x$ абсолютного линейного ускорения и требуемого абсолютного углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}_x$, входящих в качестве управлений в уравнения (2.3) и (2.4). Задача синтеза управлений $\mathbf{w}_x$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_x$ носит общий характер для всех движущихся объектов, рассматриваемых как твердое тело, так как уравнения (2.3) и (2.4) справедливы для любого такого движущегося объекта. Специфика объекта (его массово-инерционные и другие характеристики, действующие внешние возмущающие силы и их моменты) учитываются при построении управляющей силы $\mathbf{F}_{cx}$ и управляющего момента $\mathbf{M}_{cx}$ на основе конечных соотношений (2.1) и (2.2).

Введем в рассмотрение кинематический винт $\mathbf{U}$ твердого тела, отображение которого $\mathbf{U}_x$ на связанный с телом базис X определяется бикватернионом

$$\mathbf{U}_x = U_1 \mathbf{i}_1 + U_2 \mathbf{i}_2 + U_3 \mathbf{i}_3 = \boldsymbol{\omega}_x + s\mathbf{v}_x$$

$$\boldsymbol{\omega}_x = \boldsymbol{\omega}_1 \mathbf{i}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \mathbf{i}_2 + \boldsymbol{\omega}_3 \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{v}_x = v_1 \mathbf{i}_1 + v_2 \mathbf{i}_2 + v_3 \mathbf{i}_3$$

s — символ (комплексность) Клиффорда, обладающий свойством $s^2 = 0$, $U_k = \omega_k + sv_k$ ($k = 1, 2, 3$) — дуальные ортогональные проекции кинематического винта $\mathbf{U}$ на базис X.

Тогда векторные (2.3) и кватернионные (2.4) дифференциальные уравнения можно заменить двумя следующими бикватернионными дифференциальными уравнениями:

$$\dot{\mathbf{U}}_x = \boldsymbol{\varepsilon}_x + s\mathbf{w}_x = \mathbf{H}_x, \quad 2\dot{\boldsymbol{\Lambda}} = \boldsymbol{\Lambda} \circ \mathbf{U}_x$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_x = \varepsilon_1 \mathbf{i}_1 + \varepsilon_2 \mathbf{i}_2 + \varepsilon_3 \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{w}_x = w_1 \mathbf{i}_1 + w_2 \mathbf{i}_2 + w_3 \mathbf{i}_3 \tag{2.5}$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \Lambda_0 + \Lambda_1 \mathbf{i}_1 + \Lambda_2 \mathbf{i}_2 + \Lambda_3 \mathbf{i}_3 = \boldsymbol{\lambda} + s\boldsymbol{\lambda}^0, \quad \Lambda_j = \lambda_j + s\lambda_j^0, \quad j = 0, 1, 2, 3$$

в которых фазовыми переменными являются бикватернион $\mathbf{U}_x$ (отображение кинематического винта $\mathbf{U}$ твердого тела на связанный базис X) и бикватернион $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\lambda} + s\boldsymbol{\lambda}^0$ конечного перемещения тела в инерциальном пространстве, главная часть которого (кватернион $\boldsymbol{\lambda}$) характеризует ориентацию твердого тела в инерциальной системе координат, а моментная (кватернион $\boldsymbol{\lambda}^0$) — местоположение тела в этой системе координат (декартовые координаты ξ_k ($k = 1, 2, 3$) центра масс тела в этой системе координат), а дуальным управлением — бикватернион $\mathbf{H}_x = \boldsymbol{\varepsilon}_x + s\mathbf{w}_x$, являющийся дуальной композицией требуемого абсолютного углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}_x$ и требуемой составляющей $\mathbf{w}_x = \mathbf{v}_x$ абсолютного линейного ускорения тела.

Декартовые координаты ξ_k центра масс тела (т.е. проекции радиус-вектора $\mathbf{r}$ центра масс твердого тела на оси инерциальной системы координат ξ) и проекции x_k этого вектора на оси связанной с твердым телом системы координат X находятся через компоненты кватернионов $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\lambda}^0$ по формулам [29, 40, 41]

$$\mathbf{r}_\xi = \xi_1\mathbf{i}_1 + \xi_2\mathbf{i}_2 + \xi_3\mathbf{i}_3 = 2\boldsymbol{\lambda}^0 \circ \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \mathbf{r}_x = x_1\mathbf{i}_1 + x_2\mathbf{i}_2 + x_3\mathbf{i}_3 = 2\bar{\boldsymbol{\lambda}} \circ \boldsymbol{\lambda}^0$$

Здесь и далее верхняя черта – символ кватернионного сопряжения.

Управления $\mathbf{w}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ складывается из программного и стабилизирующего управлений. В соответствии с этим эти управления будем формировать в связанной системе координат X по формулам

$$\mathbf{w}_x = \mathbf{w}_z^*(t) + \delta\mathbf{w}_x = \sum_{k=1}^{3} (w_k^*(t) + \delta w_k)\mathbf{i}_k \tag{2.6}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_x = \boldsymbol{\varepsilon}_z^*(t) + \delta\boldsymbol{\varepsilon}_x = \sum_{k=1}^{3} (\varepsilon_k^*(t) + \delta\varepsilon_k)\mathbf{i}_k \tag{2.7}$$

или по формулам

$$\mathbf{w}_x = \mathbf{w}_x^*(t, \mathbf{v}_x) + \Delta\mathbf{w}_x = \bar{\mathbf{v}}_x \circ \mathbf{w}_z^*(t) \circ \mathbf{v}_x + \sum_{k=1}^{3} \Delta w_k \mathbf{i}_k \tag{2.8}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_x = \boldsymbol{\varepsilon}_x^*(t, \mathbf{v}_x) + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_x = \bar{\mathbf{v}}_x \circ \varepsilon_z^*(t) \circ \mathbf{v}_x + \sum_{k=1}^{3} \Delta\varepsilon_k \mathbf{i}_k \tag{2.9}$$

Здесь w_k^* и ε_k^* – проекции составляющей $\mathbf{w}^*$ абсолютного программного линейного ускорения и абсолютного программного углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ тела на оси программной системы координат Z, δw_k и $\delta\varepsilon_k$ (или Δw_k и $\Delta\varepsilon_k$) – проекции составляющей $\delta\mathbf{w}$ (или $\Delta\mathbf{w}$) абсолютного стабилизирующего линейного ускорения и абсолютного стабилизирующего углового ускорения $\delta\varepsilon$ (или $\Delta\varepsilon$) тела на оси связанной системы координат X; $\mathbf{v}_x$ – собственный кватернион ошибки ориентации твердого тела (определенный своими компонентами в связанном базисе X), характеризующий отклонение действительной ориентации тела от его программной ориентации и определяемый формулой

$$\mathbf{v}_x = \bar{\boldsymbol{\lambda}}^* (t) \circ \boldsymbol{\lambda}$$

в которой $\boldsymbol{\lambda}^*$ – кватернион программной ориентации тела в инерциальной системе координат.

Бикватернион $\boldsymbol{\Lambda}^*$ (его компоненты Λ_j^* одинаковы в базисах ξ и Z), характеризующий угловое и линейное программные движения тела в инерциальной системе координат, и бикватернионы $\mathbf{U}_z^*$ и $\mathbf{H}_z^*$ программных угловых и линейных скоростей тела и программных управлений его движением, определенные в программной системе координат Z, удовлетворяют бикватернионным уравнениям, аналогичным (2.5):

$$\dot{\mathbf{U}}_z^* = \boldsymbol{\varepsilon}_z^* + s\mathbf{w}_z^* = \mathbf{H}_z^*, \quad 2\dot{\boldsymbol{\Lambda}}^* = \boldsymbol{\Lambda}^* \circ \mathbf{U}_z^* \tag{2.10}$$

Величины $\boldsymbol{\Lambda}^*$, $\mathbf{U}_z^*$, $\mathbf{H}_z^*$ строятся на основе уравнений (2.10) в виде явных функций времени: $\boldsymbol{\Lambda}^* = \boldsymbol{\Lambda}^*(t)$, $\mathbf{U}_z^* = \mathbf{U}_z^*(t)$, $\mathbf{H}_z^* = \mathbf{H}_z^*(t)$. Их построение определяется конкретно решаемой задачей, выбранным оптимизируемым функционалом качества и может быть выполнено с помощью методов оптимального управления, например, с помощью принципа максимума Понтрягина.

Стабилизирующие управления $\boldsymbol{\delta}\mathbf{w}$ (или $\Delta\mathbf{w}$) и $\boldsymbol{\delta\varepsilon}$ (или $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$) строятся в виде некоторых функций ошибок по линейному и угловому положениям тела, а также ошибок по линейной и угловой скоростям твердого тела на основе принципа обратной связи. Одна из существующих здесь задач заключается в синтезе стабилизирующих управлений местоположением и ориентацией твердого тела, обеспечивающих асимптотическую устойчивость в большом или в целом произвольного программного пространственного движения тела и другие требуемые характеристики его управляемого движения.

Многие известные решения задачи управления угловым движением твердого тела ориентируются на реализацию конкретно выбранного программного углового движения твердого тела, например, на перевод твердого тела из некоторого начального углового положения в другое конечное положение при нулевых угловых скоростях тела в этих положениях, или на реализацию плоского эйлерова поворота твердого тела и других конкретных движений. Стабилизирующие управления угловым движением строятся в виде линейных или нелинейных функций компонент кватерниона ошибки по положению и проекций вектора ошибки по угловой скорости твердого тела исходя из соображений простоты, накопленного опыта, геометрических и других соображений. Уравнения возмущенного движения твердого тела, замкнутые такими управлениями, получаются нелинейными, а при ненулевых программных угловых скоростях и нестационарными. Устойчивость таких предлагаемых законов управления доказывается с помощью функций Ляпунова. Однако при этом остается открытой проблема обеспечения желаемых динамических характеристик управляемого углового движения твердого тела, поскольку точное нахождение необходимых коэффициентов усиления обратных связей, осуществляемое на основе уравнений возмущенного движения, невозможно в силу сложности этих уравнений. Аналогичные трудности существуют и при решении задачи управления линейным (поступательным) движением твердого тела и более общей задачи управления пространственным (угловым и линейным) движением твердого тела.

В работах [18–25] автора статьи рассмотрена задача аналитического построения (с использованием кватернионов) асимптотически устойчивых в большом или в целом стабилизирующих управлений угловым движением твердого тела для его любого выбранного программного углового движения. В основу решения задачи положен подход, использующий приведение нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений возмущенного углового движения твердого тела к эталонным линейным стационарным дифференциальным формам за счет использования соответствующих обратных связей в предложенных законах управления. Такой подход позволяет обойти вышеуказанные трудности аналитического синтеза стабилизирующих управлений угловым движением твердого тела, проводимого на основе нелинейных уравнений движения. В настоящей работе решается с использованием подходов, предложенных в работах [18–25] для синтеза стабилизирующих управлений угловым движением твердого тела, более общая задача синтеза стабилизирующих управлений пространственным движением твердого тела, обеспечивающих асимптотическую устойчивость в большом любого выбранного программного пространственного движения тела и желаемую динамику процесса управления. Отметим, что предлагаемые законы стабилизирующих управлений могут быть использованы для решения задачи перевода твердого тела из его произвольного пространственного начального состояния (по положению и скорости) в требуемое состояние без использования программных управлений и траекторий движения тела в силу обеспечения при использовании этих законов асимптотической устойчивости в большом любого пространственного состояния тела (частный случай этой задачи – перевод твердого тела из его произвольного пространственного начального положения покоя в требуемое положение покоя).

3. Дифференциальные бикватернионные и винтовые уравнения возмущенного пространственного движения твердого тела. Введем ошибки (отклонения) по положению и скорости твердого тела. В соответствии с бикватернионными формулами сложения конечных перемещений [29, 30] бикватернион ошибки положения $\mathbf{N}_{\xi}$, определенный своими компонентами $N_{\xi j}$ в инерциальной системе координат ξ, находится по формуле

$$\mathbf{N}_\xi = \mathbf{v}_\xi + s\mathbf{v}_\xi^0 = \Lambda \circ \overline{\mathbf{\Lambda}}^*(t) \tag{3.1}$$

а бикватернион ошибки положения $\mathbf{N}_x$, определенный своими компонентами N_{xj} в связанной системе координат X, – по формуле

$$\mathbf{N}_x = \mathbf{v}_x + s\mathbf{v}_x^0 = \overline{\mathbf{\Lambda}}^*(t) \circ \mathbf{\Lambda} \tag{3.2}$$

Отметим, что из соотношений (3.1) и (3.2) следует равенство скалярных частей бикватернионов $\mathbf{N}_\xi$ и $\mathbf{N}_x$: $N_{\xi 0} = N_{x0}$.

Бикватернион ошибки по скорости, определенный своими дуальными компонентами в связанном базисе X, может быть введен по одной из следующих формул:

$$\delta\mathbf{U}_x = \mathbf{U}_x - \mathbf{U}_z^*(t) = \sum_{k=1}^{3} (U_k - U_k^*(t))\mathbf{i}_k \tag{3.3}$$

$$\Delta\mathbf{U}_x = \mathbf{U}_x - \mathbf{U}_x^* = \mathbf{U}_x - \overline{\mathbf{N}}_x \circ \mathbf{U}_z^*(t) \circ \mathbf{N}_x \tag{3.4}$$

Компоненты бикватерниона ошибки по линейной и угловой скоростям $\Delta\mathbf{U}_x$, определяемого соотношением (3.4), равны дуальным ортогональным проекциям винтовой разности $\Delta\mathbf{U} = \mathbf{U} - \mathbf{U}^*$ на оси связанной системы координат X, в то время как компоненты бикватерниона ошибки по линейной и угловой скоростям $\boldsymbol{\delta}\mathbf{U}_x$, определяемого соотношением (3.3), не имеют смысла дуальных ортогональных проекций этой винтовой разности, а выражаются линейным образом через дуальные ортогональные проекции винтов $\mathbf{U}$ и $\mathbf{U}^*$ на оси разных систем координат (связанной X и программной Z).

В соответствии с соотношениями (2.6)–(2.9) дуальное управление $\mathbf{H}_x = \boldsymbol{\varepsilon}_x + s\mathbf{w}_x$, являющееся дуальной композицией требуемого абсолютного углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}_x$ и требуемой составляющей $\mathbf{w}_x = \mathbf{v}_x$ абсолютного линейного ускорения тела, формируется в связанной системе координат X либо по формуле

$$\mathbf{H}_x = \mathbf{H}_z^*(t) + \delta\mathbf{H}_x = \boldsymbol{\varepsilon}_z^*(t) + \delta\boldsymbol{\varepsilon}_x + s(\mathbf{w}_z^*(t) + \delta\mathbf{w}_x) \tag{3.5}$$

соответствующей выражению (3.3), либо по формуле

$$\mathbf{H}_x = \mathbf{H}_x^*(t, \mathbf{v}_x) + \Delta\mathbf{H}_x = \boldsymbol{\varepsilon}_x^*(t, \mathbf{v}_x) + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_x + s(\mathbf{w}_x^*(t, \mathbf{v}_x) + \Delta\mathbf{w}_x) \tag{3.6}$$

соответствующей выражению (3.4), в виде винтовой суммы программного $\mathbf{H}^*$ и стабилизирующего $\boldsymbol{\delta}\mathbf{H}$ (или $\Delta\mathbf{H}$) управлений. В (3.6) бикватернион $\Delta\mathbf{H}_x = \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_x + s(\Delta\mathbf{w}_x)$, как и бикватернион $\boldsymbol{\delta}\mathbf{H}_x = \boldsymbol{\delta\varepsilon}_x + s(\boldsymbol{\delta}\mathbf{w}_x)$, фигурирующий в (3.5), имеет смысл стабилизирующего управления. Стабилизирующее управление $\Delta\mathbf{H}_x = \mathbf{H}_x - \mathbf{H}_x^*(t, \mathbf{v}_x)$ отвечает винтовой разности $\Delta\mathbf{H} = \mathbf{H} - \mathbf{H}^*$ и закон его формирования будет отличаться от закона формирования стабилизирующего управления $\boldsymbol{\delta}\mathbf{H}_x = \mathbf{H}_x - \mathbf{H}_z^*(t)$, компоненты которого формируются в виде разности дуальных ортогональных проекций винтов $\mathbf{H}$ и $\mathbf{H}^*$ на оси разных систем координат (X и Z).

Запишем нормальные и осцилляторные формы дифференциальных уравнений возмущенного пространственного движения твердого тела, используя введенные переменные. Нормальные формы уравнений в бикватернионных переменных $\mathbf{N}_\xi$, $\boldsymbol{\delta}\mathbf{U}_x$ и $\mathbf{N}_x$, $\Delta\mathbf{U}_x$ имеют вид (3.7), (3.8) и (3.9), (3.10) соответственно:

$$2\dot{\mathbf{N}}_\xi = \boldsymbol{\delta}\mathbf{U}_\xi \circ \mathbf{N}_\xi, \quad \boldsymbol{\delta}\dot{\mathbf{U}}_x = \boldsymbol{\delta}\mathbf{H}_x \tag{3.7}$$

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{U}_\xi = \mathbf{\Lambda} \circ \boldsymbol{\delta}\mathbf{U}_x \circ \overline{\mathbf{\Lambda}}, \quad \mathbf{\Lambda} = \mathbf{N}_\xi \circ \mathbf{\Lambda}^*(t) \tag{3.8}$$

$$2\dot{\mathbf{N}}_x = \mathbf{N}_x \circ \Delta\mathbf{U}_x, \quad \Delta\dot{\mathbf{U}}_x = \Delta\mathbf{U}_x \times \mathbf{U}_x + \Delta\mathbf{H}_x \tag{3.9}$$

$$\mathbf{U}_x = \Delta\mathbf{U}_x + \overline{\mathbf{N}}_x \circ \mathbf{U}_z^*(t) \circ \mathbf{N}_x \tag{3.10}$$

где $\times$ – символ винтового произведения.

Отметим, что в уравнениях (3.7), (3.8) фигурирует бикватернион $\mathbf{\Lambda}^*(t)$ программного местоположения и программной ориентации твердого тела, в то время как в уравнениях (3.9), (3.10) – бикватернион программной линейной и угловой скоростей $\mathbf{U}_z^*(t)$.

Из (3.7), (3.8) и (3.9), (3.10) получаем осцилляторные формы уравнений возмущенного движения (3.11), (3.12) и (3.13), (3.14):

$$2\ddot{\mathbf{N}}_\xi = \boldsymbol{\delta}\mathbf{G}_\xi \circ \mathbf{N}_\xi - \frac{1}{2}\left|\boldsymbol{\delta}\mathbf{U}\right|^2 \mathbf{N}_\xi \tag{3.11}$$

где

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\delta}\mathbf{G}_\xi = \mathbf{\Lambda} \circ \boldsymbol{\delta}\mathbf{G}_x \circ \overline{\mathbf{\Lambda}}, \quad \boldsymbol{\delta}\mathbf{G}_x = \mathbf{U}_x \times \boldsymbol{\delta}\mathbf{U}_x + \boldsymbol{\delta}\mathbf{H}_x \\ \mathbf{U}_x = \boldsymbol{\delta}\mathbf{U}_x + \mathbf{U}_z^*(t), \quad \left|\boldsymbol{\delta}\mathbf{U}\right|^2 = \boldsymbol{\delta}\mathbf{U}_x \cdot \boldsymbol{\delta}\mathbf{U}_x, \quad \mathbf{\Lambda} = \mathbf{N}_\xi \circ \mathbf{\Lambda}^*(t) \end{gathered} \tag{3.12}$$

$$2\ddot{\mathbf{N}}_x = \mathbf{N}_x \circ \Delta\mathbf{G}_x - \frac{1}{2}\left|\Delta\mathbf{U}\right|^2 \mathbf{N}_x \tag{3.13}$$

где

$$\begin{gathered} \Delta\mathbf{G}_x = \Delta\mathbf{U}_x \times \mathbf{U}_x + \Delta\mathbf{H}_x, \quad \left|\Delta\mathbf{U}\right|^2 = \Delta\mathbf{U}_x \cdot \Delta\mathbf{U}_x \\ \mathbf{U}_x = \Delta\mathbf{U}_x + \overline{\mathbf{N}}_x \circ \mathbf{U}_z^*(t) \circ \mathbf{N}_x \end{gathered} \tag{3.14}$$

Здесь центральная точка – символ скалярного произведения.

Выделяя в первом уравнении (3.7) и в уравнении (3.11) скалярную и винтовую части, получим уравнения первого и второго порядков относительно скалярной $N_{\xi 0}$ и винтовой $\mathbf{N}_{\xi v}$ частей бикватерниона $\mathbf{N}_\xi$:

$$\begin{gathered} 2\dot{N}_{\xi 0} = -\mathbf{N}_{\xi v} \cdot \delta\mathbf{U}_\xi \\ 2\dot{\mathbf{N}}_{\xi v} = N_{\xi 0}\delta\mathbf{U}_\xi - \mathbf{N}_{\xi v} \times \delta\mathbf{U}_\xi \end{gathered} \tag{3.15}$$

$$\begin{gathered} 2\ddot{N}_{\xi 0} = -\frac{1}{2}\left|\boldsymbol{\delta}\mathbf{U}\right|^2 N_{\xi 0} - \mathbf{N}_{\xi v} \cdot \boldsymbol{\delta}\mathbf{G}_\xi \\ 2\ddot{\mathbf{N}}_{\xi v} = -\frac{1}{2}\left|\boldsymbol{\delta}\mathbf{U}\right|^2 \mathbf{N}_{\xi v} + N_{\xi 0}\boldsymbol{\delta}\mathbf{G}_\xi - \mathbf{N}_{\xi v} \times \boldsymbol{\delta}\mathbf{G}_\xi \end{gathered} \tag{3.16}$$

Фигурирующие здесь величины $\boldsymbol{\delta}\mathbf{U}_\xi$ и $\boldsymbol{\delta}\mathbf{G}_\xi$, $\left|\boldsymbol{\delta}\mathbf{U}\right|^2$ определяются соотношениями (3.8) и (3.12).

Выделяя в первом уравнении (3.9) и в уравнении (3.13) скалярную и винтовую части, получим уравнения первого и второго порядков относительно скалярной N_{x0} и винтовой $\mathbf{N}_{xv}$ частей бикватерниона $\mathbf{N}_x$:

$$\begin{gathered} 2\dot{N}_{x0} = -\mathbf{N}_{xv} \cdot \Delta\mathbf{U}_x \\ 2\dot{\mathbf{N}}_{xv} = N_{x0}\Delta\mathbf{U}_x + \mathbf{N}_{xv} \times \Delta\mathbf{U}_x \end{gathered} \tag{3.17}$$

$$\begin{gathered} 2\ddot{N}_{x0} = -\frac{1}{2}\left|\Delta\mathbf{U}\right|^2 N_{x0} - \mathbf{N}_{xv} \cdot \Delta\mathbf{G}_x \\ 2\ddot{\mathbf{N}}_{xv} = -\frac{1}{2}\left|\Delta\mathbf{U}\right|^2 \mathbf{N}_{xv} + N_{x0}\Delta\mathbf{G}_x + \mathbf{N}_{xv} \times \Delta\mathbf{G}_x \end{gathered} \tag{3.18}$$

Фигурирующие здесь величины $\Delta\mathbf{G}_x$, $|\Delta\mathbf{U}|^2$ определяются соотношениями (3.14).

4. Стабилизирующие управления. Выразим стабилизирующие управления из полученных уравнений возмущенного движения. Для этого введем кососимметрическую $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ и симметрическую $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ дуальные матрицы, сопоставляемые бивектору (винтовой части бикватерниона) $\mathbf{x}(\mathbf{x} = \mathbf{N}_{\xi v}, \mathbf{N}_{xv})$:

$$K(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 \\ x_1x_2 & x_2^2 & x_2x_3 \\ x_1x_3 & x_2x_3 & x_3^2 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

Запишем уравнения (3.15)–(3.18) в матричных формах, используя матрицы (4.1):

$$2\dot{\mathbf{N}}_{\xi v} = [N_{\xi 0}\mathbf{E} - \mathbf{K}(\mathbf{N}_{\xi v})]\boldsymbol{\delta}\mathbf{U}_\xi \tag{4.2}$$

$$[N_{\xi 0}\mathbf{E} - \mathbf{K}(\mathbf{N}_{\xi v})]\boldsymbol{\delta}\mathbf{G}_\xi = 2\ddot{\mathbf{N}}_{\xi v} + \frac{1}{2}|\delta\mathbf{U}|^2\,\mathbf{N}_{\xi v} \tag{4.3}$$

$$2\dot{\mathbf{N}}_{xv} = [N_{x0}\mathbf{E} + \mathbf{K}(\ddot{\mathbf{N}}_{xv})]\Delta\mathbf{U}_x \tag{4.4}$$

$$[N_{x0}\mathbf{E} + \mathbf{K}(\mathbf{N}_{xv})]\Delta\mathbf{G}_x = 2\mathbf{N}_{xv} + \frac{1}{2}|\Delta\mathbf{U}|^2\,\mathbf{N}_{xv} \tag{4.5}$$

Здесь $\mathbf{E}$ – единичная матрица размерами 3×3; $\mathbf{N}_{\xi v}$, $\mathbf{N}_{xv}$ (не стоящие в круглых скобках после $\mathbf{K}$) и $\boldsymbol{\delta}\mathbf{U}_\xi$, $\boldsymbol{\delta}\mathbf{G}_\xi$, $\Delta\mathbf{U}_x$, $\Delta\mathbf{G}_x$ – дуальные матрицы-столбцы размерами 3×1, элементами которых являются соответственно компоненты винтовых частей одноименных бикватернионов $\mathbf{N}_\xi$, $\mathbf{N}_x$ и бикватернионов $\boldsymbol{\delta}\mathbf{U}_\xi$, $\boldsymbol{\delta}\mathbf{G}_\xi$, $\Delta\mathbf{U}_x$, $\Delta\mathbf{G}_x$ с нулевыми скалярными частями.

Выразим трехмерные дуальные величины $\boldsymbol{\delta}\mathbf{G}_\xi$, $\Delta\mathbf{G}_x$, рассматриваемые как новые управления, из матричных уравнений (4.3), (4.5). При этом учтем соотношения

$$\begin{gathered}
[N_{\xi 0}\mathbf{E} - \mathbf{K}(\mathbf{N}_{\xi v})]^{-1} = (2N_{\xi 0})^{-1}[\mathbf{E} + (\mathbf{C}(\mathbf{N}_\xi))^T] \\
[N_{\xi 0}\mathbf{E} - \mathbf{K}(\mathbf{N}_{\xi v})]^{-1}\mathbf{N}_{\xi v} = \mathbf{N}_{\xi v}/N_{\xi 0} \\
[N_{x0}\mathbf{E} + \mathbf{K}(\mathbf{N}_{xv})]^{-1} = (2N_{x0})^{-1}[\mathbf{E} + \mathbf{C}(\mathbf{N}_x)] \\
[N_{x0}\mathbf{E} + \mathbf{K}(\mathbf{N}_{xv})]^{-1}\mathbf{N}_{xv} = \mathbf{N}_{xv}/N_{x0}
\end{gathered} \tag{4.6}$$

в которых верхний индекс T – символ транспонирования, а $\mathbf{C}(\mathbf{N}_x)$ – матрица дуальных направляющих косинусов углов между осями систем координат Z и X, имеющая известный вид [29, 30]:

$$\mathbf{C}(\mathbf{N}_x) = \begin{pmatrix} N_0^2 + N_1^2 - N_2^2 - N_3^2 & 2(N_1N_2 + N_0N_3) & 2(N_1N_3 - N_0N_2) \\ 2(N_1N_2 - N_0N_3) & N_0^2 - N_1^2 + N_2^2 - N_3^2 & 2(N_2N_3 + N_0N_1) \\ 2(N_1N_3 + N_0N_2) & 2(N_2N_3 - N_0N_1) & N_0^2 - N_1^2 - N_2^2 + N_3^2 \end{pmatrix}$$

В этой матрице $N_j = N_{xj}$ – дуальные параметры Родрига–Гамильтона (Эйлера), характеризующие ориентацию и местоположение твердого тела (системы координат X) в опорной (программной) системе координат Z. Эти параметры являются компонентами бикватерниона $\mathbf{N}_x$. Матрица $\mathbf{C}(\mathbf{N}_\xi)$ имеет такую же структуру, что и матрица $\mathbf{C}(\mathbf{N}_x)$, и построена из компонент $N_{\xi j}$ бикватерниона $\mathbf{N}_\xi$.

Отметим, что матрица $\mathbf{C}(\mathbf{N}_x)$ может быть представлена в виде

$$\mathbf{C}(\mathbf{N}_x) = 2[N_{x0}^2\mathbf{E} - N_{x0}\mathbf{K}(\mathbf{N}_{xv}) + \mathbf{S}(\mathbf{N}_{xv})] - \mathbf{E}$$

где кососимметричная $\mathbf{K}$ и симметричная $\mathbf{S}$ матрицы определяются соотношениями (4.1). Аналогичное представление имеет и матрица $\mathbf{C}(\mathbf{N}_\xi)$.

В результате преобразований получаем следующие матричные выражения для новых управлений $\boldsymbol{\delta}\mathbf{G}_\xi$, $\Delta\mathbf{G}_x$:

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{G}_\xi = N_{\xi 0}^{-1}[\mathbf{E} + (\mathbf{C}(\mathbf{N}_\xi))^T]\ddot{\mathbf{N}}_{\xi v} + (2N_{\xi 0})^{-1}|\boldsymbol{\delta}\mathbf{U}|^2\,\mathbf{N}_{\xi v} \tag{4.7}$$

$$\Delta\mathbf{G}_x = (N_{x0})^{-1}[\mathbf{E} + \mathbf{C}(\mathbf{N}_x)]\ddot{\mathbf{N}}_{xv} + (2N_{x0})^{-1}|\Delta\mathbf{U}|^2\,\mathbf{N}_{xv} \tag{4.8}$$

Трехмерные стабилизирующие управления $\boldsymbol{\delta}\mathbf{H}_x$ и $\Delta\mathbf{H}_x$ выражаются через величины $\boldsymbol{\delta}\mathbf{G}_\xi$ и $\Delta\mathbf{G}_x$ по формулам

$$\delta\mathbf{H}_x = \overline{\Lambda} \circ \delta\mathbf{G}_\xi \circ \Lambda - \mathbf{U}_x \times \boldsymbol{\delta}\mathbf{U}_x \tag{4.9}$$

$$\Delta\mathbf{H}_x = \Delta\mathbf{G}_x + \mathbf{U}_x \times \Delta\mathbf{U}_x \tag{4.10}$$

вытекающим из соотношений (3.12), (3.14).

Полученные выражения (4.7)–(4.10) определяют собой стабилизирующие управления $\delta\mathbf{H}_x$ и $\Delta\mathbf{H}_x$ в виде функций ошибок по положению и скорости твердого тела и вторых производных по времени от ошибок по положению. Подстановка в эти выражения таких законов изменения вторых производных по времени от ошибок по положению, которые отвечают желаемым динамическим характеристикам переходных процессов управления, позволяет получить нужные законы стабилизирующих управлений. В разделе 5 статьи рассматриваются два варианта задания вторых производных по времени от ошибок по положению твердого тела в виде линейных функций ошибок по положению твердого тела и их первых производных по времени. При таком их задании желаемая динамика управляемого движения твердого тела описывается линейными стационарными дифференциальными уравнениями второго порядка относительно ошибок по линейному и угловому положениям твердого тела (относительно одной из выбранных переменных $\mathbf{N}_\xi$ или $\mathbf{N}_x$). Соответствующий выбор постоянных дуальных коэффициентов этих уравнений, являющихся коэффициентами усиления нелинейных обратных связей, обеспечивает желаемые динамические характеристики управляемого пространственного движения твердого тела.

5. Эталонные дифференциальные уравнения переходных процессов. Стабилизирующие управления $\boldsymbol{\delta}\mathbf{H}_x$ и $\Delta\mathbf{H}_x$ будем формировать таким образом, чтобы уравнения возмущенного пространственного движения твердого тела, замкнутые этими законами управления, принимали эталонные дифференциальные формы. В качестве эталонных дифференциальных форм для уравнений возмущенного движения твердого тела в переменных $\mathbf{N}_\xi$ и $\mathbf{N}_x$ примем формы (5.1) и (5.2):

$$\ddot{\mathbf{N}}_{\xi v} + \mathbf{P}_0\dot{\mathbf{N}}_{\xi v} + \mathbf{K}(\mathbf{P}_v)\dot{\mathbf{N}}_{\xi v} + \mathbf{Q}_0\mathbf{N}_{\xi v} + \mathbf{K}(\mathbf{Q}_v)\mathbf{N}_{\xi v} = 0 \tag{5.1}$$

$$\ddot{\mathbf{N}}_{xv} + \mathbf{P}_0^*\mathbf{N}_{xv} - \mathbf{K}(\mathbf{P}_v^*)\dot{\mathbf{N}}_{xv} + \mathbf{Q}_0^*\mathbf{N}_{xv} - \mathbf{K}(\mathbf{Q}_v^*)\mathbf{N}_{xv} = 0 \tag{5.2}$$

Формы (5.1) и (5.2) – дуальные матричные линейные дифференциальные уравнения второго порядка относительно дуальных трехмерных переменных (матриц – столбцов) $\mathbf{N}_{\xi v}$ и $\mathbf{N}_{xv}$ с постоянными дуальными матричными коэффициентами. В них $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{Q}_0$ и $\mathbf{P}_0^*$, $\mathbf{Q}_0^*$ – диагональные матрицы с постоянными дуальными диагональными элементами $P_{0k} = p_{0k} + sp_{0k}^0$, $Q_{0k} = q_{0k} + sq_{0k}^0$ и $P_{0k}^* = p_{0k}^* + sp_{0k}^{0*}$, $Q_{0k}^* = q_{0k}^* + sq_{0k}^{0*}$ ($k = 1, 2, 3$) соответственно; $\mathbf{K}(\mathbf{P}_v)$, $\mathbf{K}(\mathbf{Q}_v)$ и $\mathbf{K}(\mathbf{P}_v^*)$, $\mathbf{K}(\mathbf{Q}_v^*)$ – постоянные дуальные кососимметрические матрицы вида (4.1), сопоставляемые винтам $\mathbf{P}_v$, $\mathbf{Q}_v$ и $\mathbf{P}_v^*$, $\mathbf{Q}_v^*$, имеющим дуальные компоненты $P_k = p_k + sp_k^0$, $Q_k = q_k + sq_k^0$ и $P_k^* = p_k^* + sp_k^{0*}$, $Q_k^* = q_k^* + sq_k^{0*}$ соответственно.

В случаях, когда $P_{0k} = P_0 = p_0 + sp_0^0$, $Q_{0k} = Q_0 = q_0 + sq_0^0$, $P_{0k}^* = P_0^* = p_0^* + sp_0^{0*}$, $Q_{0k}^* = Q_0^* = q_0^* + sq_0^{0*}$, матрицы

$$\mathbf{P}_0 = P_0\mathbf{E} = (p_0 + sp_0^0)\mathbf{E}, \quad \mathbf{Q}_0 = Q_0\mathbf{E} = (q_0 + sq_0^0)\mathbf{E}$$

$$\mathbf{P}_0^* = P_0^*\mathbf{E} = (p_0^* + sp_0^{0*})\mathbf{E}, \quad \mathbf{Q}_0^* Q_0^*\mathbf{E} = (q_0^* + sq_0^{0*})\mathbf{E}$$

где $\mathbf{E}$, по-прежнему, – трехмерная единичная матрица, и уравнения (5.1), (5.2) могут быть записаны в винтовом виде:

$$\ddot{\mathbf{N}}_{\xi v} + P_0\dot{\mathbf{N}}_{\xi v} + \mathbf{P}_v \times \dot{\mathbf{N}}_{\xi v} + Q_0\mathbf{N}_{\xi v} + \mathbf{Q}_v \times \mathbf{N}_{\xi v} = 0 \tag{5.3}$$

$$\ddot{\mathbf{N}}_{xv} + P_0^*\dot{\mathbf{N}}_{xv} + \dot{\mathbf{N}}_{xv} \times \mathbf{P}_v^* + Q_0^*\mathbf{N}_{xv} + \mathbf{N}_{xv} \times \mathbf{Q}_v^* = 0 \tag{5.4}$$

В этих уравнениях переменные $\mathbf{N}_{\xi v}$ и $\mathbf{N}_{xv}$ имеют смысл винтов, определенных своими дуальными ортогональными проекциями в системах координат ξ и X соответственно.

В соответствии с известной классификацией вторые слагаемые в уравнениях (5.1)–(5.4) определяют собой управляющие диссипативные силы, третьи слагаемые – гироскопические, четвертые – потенциальные (консервативные) силы, пятые – силы радиальной коррекции.

6. Законы стабилизирующих управлений. Построим законы стабилизирующих управлений, отвечающие эталонным дифференциальным формам (5.1), (5.2) уравнений возмущенного движения твердого тела с замкнутой системой управления движением. Выражая из уравнений (5.1), (5.2) вторые производные $\ddot{\mathbf{N}}_{\xi v}$, $\ddot{\mathbf{N}}_{xv}$ и подставляя их в матричные соотношения (4.7), (4.8), получаем, учитывая (4.2), (4.4), следующие дуальные матричные выражения для управлений $\boldsymbol{\delta}\mathbf{G}_\xi$ и $\Delta\mathbf{G}_x$:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\delta}\mathbf{G}_\xi = \frac{1}{N_{\xi 0}}[\mathbf{E} + (\mathbf{C}(\mathbf{N}_\xi))^T]\times \\ \times\left\{\frac{1}{2}[\mathbf{P}_0 + \mathbf{K}(\mathbf{P}_v)][N_{\xi 0}\mathbf{E} - \mathbf{K}(\mathbf{N}_{\xi v})]\boldsymbol{\delta}\mathbf{U}_\xi + [\mathbf{Q}_0 + \mathbf{K}(\mathbf{Q}_v)]\mathbf{N}_{\xi v}\right\} + \frac{1}{2N_{\xi 0}}|\boldsymbol{\delta}\mathbf{U}|^2\,\mathbf{N}_{\xi v}\end{gathered} \tag{6.1}$$

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\delta}\mathbf{G}_x = -\frac{1}{N_{x0}}[\mathbf{E} + \mathbf{C}(\mathbf{N}_x)]\times \\ \times\left\{\frac{1}{2}[\mathbf{P}_0^* - \mathbf{K}(\mathbf{P}_v^*)][N_{x0}\mathbf{E} + \mathbf{K}(\mathbf{N}_{xv})]\Delta\mathbf{U}_x + [\mathbf{Q}_0^* - \mathbf{K}(\mathbf{Q}_v^*)]\mathbf{N}_{xv}\right\} + \frac{1}{2N_{x0}}|\Delta\mathbf{U}|^2\,\mathbf{N}_{xv}\end{gathered} \tag{6.2}$$

Трехмерные дуальные стабилизирующие управления $\boldsymbol{\delta}\mathbf{H}_x$ и $\Delta\mathbf{H}_x$ (дуальные композиции линейного и углового ускорений) выражаются через величины $\boldsymbol{\delta}\mathbf{G}_\xi$ и $\Delta\mathbf{G}_x$ по формулам (4.9) и (4.10). Поэтому соотношения (4.9), (6.1) или (4.10), (6.2) образуют различные законы формирования дуального стабилизирующего управления (ускорения) $\boldsymbol{\delta}\mathbf{H}_x$ или $\Delta\mathbf{H}_x$ в виде нелинейных функций ошибок по положению и скорости твердого тела. При сообщении этого дуального стабилизирующего ускорения твердому телу вместе с дуальным программным ускорением $\mathbf{H}_z^*(t)$ или $\mathbf{H}_x^*(t, \mathbf{v}_x)$ в соответствии с формулами (3.5) или (3.6) дифференциальные нелинейные нестационарные уравнения возмущенного движения твердого тела принимают эталонную форму (5.1) или (5.2), инвариантную относительно любого выбранного программного пространственного движения. Сообщение требуемого абсолютного дуального ускорения

$\mathbf{H}_x = \boldsymbol{\varepsilon}_x + s\mathbf{w}_x$ твердому телу осуществляется за счет приложения к нему управляющей силы $\mathbf{F}_{cx}$ и управляющего момента $\mathbf{M}_{cx}$, формируемых в соответствии с формулами (2.1) и (2.2).

В частном случае дуальных скалярных коэффициентов усиления нелинейных обратных связей, когда $P_{0k} = P_0 = p_0 + sp_0^0$, $Q_{0k} = Q_0 = q_0 + sq_0^0$, $\mathbf{P}_v = 0$, $\mathbf{Q}_v = 0$; $P_{0k}^* = P_0^* = p_0^* + sp_0^{0*}$, $Q_{0k}^* = Q_0^* = q_0^* + sq_0^{0*}$, $\mathbf{P}_v^* = 0$, $\mathbf{Q}_v^* = 0$, законы формирования стабилизирующих ускорений с учетом соотношений (4.6) существенно упрощаются и принимают винтовой вид

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{H}_x = \frac{1}{N_{x0}}\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{\delta}\mathbf{U}|^2 - 2Q_0\right)\mathbf{N}_{xv} - P_0\boldsymbol{\delta}\mathbf{U}_x - \mathbf{U}_x \times \boldsymbol{\delta}\mathbf{U}_x \tag{6.3}$$

$$\Delta\mathbf{H}_x = \frac{1}{N_{x0}}\left(\frac{1}{2}|\Delta\mathbf{U}|^2 - 2Q_0^*\right)\mathbf{N}_{xv} - P_0^*\Delta\mathbf{U}_x + \mathbf{U}_x \times \Delta\mathbf{U}_x \tag{6.4}$$

Выделяя в соотношениях (6.3) и (6.4) главные и моментные части, получаем следующие векторные законы формирования стабилизирующих линейных и угловых ускорений:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}\mathbf{w}_x = {} & \frac{1}{\nu_{x0}}(\boldsymbol{\delta\omega}_x \cdot \boldsymbol{\delta}\mathbf{v}_x - 2q_0^0)\mathbf{v}_{xv}^0 - \frac{\nu_{x0}^0}{\nu_{x0}^2}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\delta\omega}_x \cdot \boldsymbol{\delta\omega}_x - 2q_0\right)\mathbf{v}_{xv} - \\ & - (p_0\boldsymbol{\delta}\mathbf{v}_x + p_0^0\boldsymbol{\delta\omega}_x) - (\boldsymbol{\omega}_x \times \boldsymbol{\delta}\mathbf{v}_x + \mathbf{v}_x \times \boldsymbol{\delta\omega}_x)\end{aligned} \tag{6.5}$$

$$\boldsymbol{\delta\varepsilon}_x = \frac{1}{\nu_{x0}}\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{\delta\omega}|^2 - 2q_0\right)\mathbf{v}_{xv} - p_0\boldsymbol{\delta\omega}_x - \boldsymbol{\omega}_x \times \boldsymbol{\delta\omega}_x \tag{6.6}$$

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{w}_x = {} & \frac{1}{\nu_{x0}}\left(\Delta\boldsymbol{\omega}_x \cdot \Delta\mathbf{v}_x - 2q_0^{0*}\right)\mathbf{v}_{xv}^0 - \frac{\nu_{x0}^0}{\nu_{x0}^2}\left(\frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{\omega}_x \cdot \Delta\boldsymbol{\omega}_x - 2q_0^*\right)\mathbf{v}_{xv} - \\ & - (p_0^*\Delta\mathbf{v}_x + p_0^{0*}\Delta\boldsymbol{\omega}_x) - (\boldsymbol{\omega}_x \times \Delta\mathbf{v}_x + \mathbf{v}_x \times \Delta\boldsymbol{\omega}_x)\end{aligned} \tag{6.7}$$

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_x = \frac{1}{\nu_{x0}}\left(\frac{1}{2}|\Delta\boldsymbol{\omega}|^2 - 2q_0^*\right)\mathbf{v}_{xv} - p_0^*\Delta\boldsymbol{\omega}_x + \boldsymbol{\omega}_x \times \Delta\boldsymbol{\omega}_x \tag{6.8}$$

Законы формирования угловых стабилизирующих управлений (6.6) и (6.8) совпадают с аналогичными законами, полученными в работах [23, 24] (соотношения (7.6.11) и (7.6.12) книги [25]).

Отметим, что полученные законы формирования стабилизирующих управлений (6.1)–(6.4) и (6.5)–(6.8) имеют особую точку, когда $\varphi = 180$ град., в которой они вырождаются (φ — эйлеров угол поворота твердого тела в возмущенном угловом движении). В этой точке величины $N_{\xi 0} = N_{x0}$ и ν_{x0}, фигурирующие в знаменателях законов управления, становятся равными нулю. Поэтому предлагаемые законы стабилизирующих управлений обеспечивают (при соответствующем выборе постоянных матричных $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{Q}_0$ и $\mathbf{P}_v$, $\mathbf{Q}_v$; $\mathbf{P}_0^*$, $\mathbf{Q}_0^*$ и $\mathbf{P}_v^*$, $\mathbf{Q}_v^*$ или скалярных $P_{0k} = P_0$, $Q_{0k} = Q_0$ ($\mathbf{P}_v = 0$, $\mathbf{Q}_v = 0$); $P_{0k}^* = P_0^*$, $Q_{0k}^* = Q_0^*$ ($\mathbf{P}_v^* = 0$, $\mathbf{Q}_v^* = 0$) коэффициентов усиления нелинейных обратных связей) асимптотическую устойчивость любого выбранного программного движения твердого тела в большом, но не в целом. Можно показать, что эта особая точка в законах управления может быть устранена, но для этого нужно использовать (в рамках предлагаемого подхода к синтезу стабилизирующих управлений) не трехмерные винты скоростей и ускорений пространственного движения твердого тела (бикватернионы скоростей и ускорений с нулевыми скалярными частями), а "четырехмерные" скорости и ускорения пространственного движения твердого тела (бикватернионы скоростей и ускорений с ненулевыми дуальными скалярными частями, используемыми в алгоритме формирования стабилизирующих управлений). В отношении синтеза законов стабилизирующего управления угловым движением твердого тела такой подход был предложен автором статьи в работах [23–25].

7. Динамика управляемого пространственного движения твердого тела. Выбор коэффициентов законов управления. Построенные в разделе 6 законы изменения стабилизирующих ускорений представляют собой нелинейные функции компонент бикватерниона ошибки по линейному и угловому положению и компонент винта ошибки по линейной и угловой скорости твердого тела. Эти законы, реализуемые в системах управления пространственным движением твердого тела, образуют нелинейные обратные связи по положению и скорости твердого тела с дуальными скалярными или матричными коэффициентами усиления.

Нелинейные нестационарные дифференциальные уравнения возмущенного пространственного движения твердого тела, замкнутые построенными законами управления, принимают вид дуальных матричных дифференциальных линейных уравнений второго порядка, инвариантных относительно любого выбранного программного движения твердого тела, имеющих постоянные дуальные скалярные или матричные коэффициенты. Эти коэффициенты уравнений являются коэффициентами усиления нелинейных обратных связей (коэффициентами построенных законов стабилизирующего управления). Поэтому динамика управляемого пространственного движения твердого тела для таких законов управления полностью описывается дуальными линейными стационарными дифференциальными уравнениями, приведенными в разделе 5, а задача нахождения необходимых значений коэффициентов усиления нелинейных обратных связей, обеспечивающих асимптотическую устойчивость и другие требуемые качественные и количественные характеристики управляемого движения твердого тела, сводится к задаче выбора коэффициентов этих уравнений. Эта задача имеет не единственное решение и может быть решена на основе анализа общих аналитических решений эталонных дифференциальных уравнений, исходя из требуемых качественных и количественных характеристик переходных процессов управления и исходя из имеющихся ограничений на максимально допустимые скорости и ускорения твердого тела. К качественным характеристикам относятся устойчивость (асимптотическая или неасимптотическая), вид процесса (колебательный, колебательный затухающий, апериодический), оптимальность в том или ином смысле. К количественным характеристикам относятся периоды и частоты колебаний, коэффициенты затухания, перерегулирование, запасы устойчивости, время переходного процесса и другие. С точки зрения теории управления задача выбора коэффициентов эталонных линейных стационарных дифференциальных форм может рассматриваться как задача параметрического синтеза, модального управления, а также может рассматриваться в других постановках.

Рассмотрим случай дуальных скалярных коэффициентов усиления обратных связей, когда $P_{0k} = P_0 = p_0 + sp_0^0$, $Q_{0k} = Q_0 = q_0 + sq_0^0$, $\mathbf{P}_v = 0$, $\mathbf{Q}_v = 0$; $P_{0k}^* = P_0^* = p_0^* + sp_0^{0*}$, $Q_{0k}^* = Q_0^* = q_0^* + sq_0^{0*}$, $\mathbf{P}_v^* = 0$, $\mathbf{Q}_v^* = 0$. В этом случае дуальные матричные эталонные дифференциальные уравнения (5.1) и (5.2) принимают одинаковый вид

$$\ddot{\mathbf{N}}_{\xi v} + P_0\dot{\mathbf{N}}_{\xi v} + Q_0\mathbf{N}_{\xi v} = 0 \qquad (7.1)$$

$$\ddot{\mathbf{N}}_{xv} + P_0^*\dot{\mathbf{N}}_{xv} + Q_0^*\mathbf{N}_{xv} = 0 \qquad (7.2)$$

Уравнения (7.1) и (7.2) распадаются на отдельные независимые дуальные скалярные дифференциальные уравнения второго порядка относительно дуальных переменных $N_{\xi j}$ и N_{xj} с постоянными дуальными коэффициентами $P_0 = p_0 + sp_0^0$, $Q_0 = q_0 + sq_0^0$ и $P_0^* = p_0^* + sp_0^{0*}$, $Q_0^* = q_0^* + sq_0^{0*}$.

Полагая $p_0 > 0, q_0 > 0$, запишем общее решение дуального дифференциального уравнения (7.1) (решение уравнения (7.2) совпадает по своей форме с решением уравнения (7.1)) для значений p_0 и q_0, удовлетворяющих условиям

$$p_0/2 < q_0^{1/2} \quad (p_0^2 < 4q_0) \tag{7.3}$$

Имеем

$$\mathbf{N}_{\xi v} = e^{-Kt}(\mathbf{C}_1\cos(Lt) + \mathbf{C}_2\sin(Lt)) \tag{7.4}$$

$$\dot{\mathbf{N}}_{\xi v} = -K\mathbf{N}_{\xi v} + Le^{-Kt}(\mathbf{C}_2\cos(Lt) - \mathbf{C}_1\sin(Lt)) \tag{7.5}$$

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{N}_{\xi v}(0), \quad \mathbf{C}_2 = L^{-1}(\dot{\mathbf{N}}_{\xi v}(0) + K\mathbf{N}_{\xi v}(0))$$

Здесь $K = P_0/2$, $L = (Q_0 - (P_0/2)^2)^{1/2}$; $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$ – произвольные винтовые постоянные интегрирования, определяемые начальными (для момента времени $t = t_o = 0$) значениями $\mathbf{N}_{\xi v}(0)$, $\dot{\mathbf{N}}_{\xi v}(0)$ винтов $\mathbf{N}_{\xi v}$ и $\dot{\mathbf{N}}_{\xi v}$, связанными с начальными значениями $\mathbf{\Lambda}(0)$, $\mathbf{U}_x(0)$ искомых переменных $\mathbf{\Lambda}$ и $\mathbf{U}_x$ соотношениями

$$\begin{gathered}\mathbf{N}_{\xi v}(0) = \mathrm{screv}(\mathbf{\Lambda}(0) \circ \bar{\mathbf{\Lambda}}^*(0)) \\ \dot{\mathbf{N}}_{\xi v}(0) = (1/2)\mathrm{screv}(\boldsymbol{\delta}\mathbf{U}_\xi(0) \circ \mathbf{N}_\xi(0)) = (1/2)\mathrm{screv}(\boldsymbol{\delta}\mathbf{U}_\xi(0) \circ \mathbf{\Lambda}(0) \circ \bar{\mathbf{\Lambda}}^*(0)) = \\ = (1/2)\mathrm{screv}(\mathbf{\Lambda}(0) \circ \boldsymbol{\delta}\mathbf{U}_x(0) \circ \bar{\mathbf{\Lambda}}^*(0)) \\ \boldsymbol{\delta}\mathbf{U}_x(0) = \mathbf{U}_x(0) - \mathbf{U}_z^*(0)\end{gathered} \tag{7.6}$$

Здесь screv(·) – винтовая часть бикватерниона, стоящего в круглых скобках.

Как видно из (7.4), (7.5), для скалярных $p_0 > 0$ и $q_0 > 0$, удовлетворяющих условиям (7.3), значение винтовой части $\mathbf{N}_{\xi v}$ бикватерниона $\mathbf{N}_\xi$ ошибки положения твердого тела в инерциальной системе координат ξ и ее первой производной по времени $\dot{\mathbf{N}}_{\xi v}$ в процессе управления стремятся асимптотически к нулю, что соответствует переводу твердого тела, имеющего произвольные начальные угловую и линейную скорости, из произвольного начального углового и линейного положения на любую заданную программную траекторию и дальнейшему асимптотически устойчивому движению твердого тела по программной траектории с требуемыми программными угловой и линейной скоростями и программными угловым и линейным ускорениями. При этом законы изменения всех дуальных переменных $N_{\xi i}$ и $\dot{N}_{\xi i}$ $(i = 1, 2, 3)$ в процессе управления для дуальных скалярных коэффициентов $P_0 = p_0 + sp_0^0$, $Q_0 = q_0 + sq_0^0$ усиления нелинейных обратных связей носят качественно одинаковый характер (затухающий колебательный) и имеют такие одинаковые количественные характеристики, как частоты (периоды) колебаний, коэффициенты затухания. Отметим, что для скалярных $p_0 > 0$ и $q_0 > 0$ в случаях $p_0/2 = q_0^{1/2}$ и $p_0/2 > q_0^{1/2}$ законы изменения всех дуальных переменных $N_{\xi i}$ и $\dot{N}_{\xi i}$ $(i = 1, 2, 3)$ в процессе управления для дуальных скалярных коэффициентов P_0, Q_0 будут иметь одинаковый затухающий апериодический характер.

Анализ (7.4), (7.5) показывает, что управляемое движение носит характер плоского винтового движения твердого тела в случае, когда винт $\dot{\mathbf{N}}_{\xi v}(0) = 0$, а также в случае, когда винтовые части $\mathbf{N}_{\xi v}(0)$ и $\dot{\mathbf{N}}_{\xi v}(0)$ бикватернионов $\mathbf{N}_\xi(0)$ и $\dot{\mathbf{N}}_\xi(0)$ параллельны, что означает равенство нулю для начального момента времени ошибок по угловой и линейной скоростям твердого тела или (во втором случае) параллельность для этого момента времени винта $\delta\mathbf{U}(0)$ ошибки по угловой и линейной скоростям твердого тела и винта $\mathbf{N}_v(0)$ ошибки по угловому и линейному положениям.

Соотношения (7.3)–(7.6) позволяют определить необходимые значения дуальных скалярных коэффициентов усиления нелинейных обратных связей P_0 и Q_0 исходя из требуемых качественных и количественных характеристик переходного процесса и исходя из имеющихся ограничений на максимально допустимые скорости и ускорения твердого тела.

Отметим, что использование дуальных матричных коэффициентов усиления нелинейных обратных связей по положению и скорости твердого тела в общих законах управления пространственным движением твердого тела (6.1) и (6.2) позволяет реализовать взаимосвязанную желаемую динамику каналов управления движением, оптимальную в том или ином смысле и описываемую дуальными матричными линейными дифференциальными уравнениями второго порядка (5.1) и (5.2) с дуальными матричными коэффициентами.

Заключение. В статье изучена в динамической нелинейной постановке с использованием параболических бикватернионов Клиффорда и дуальных матриц задача построения управления пространственным движением твердого тела, обеспечивающего асимптотически устойчивый в большом перевод твердого тела, имеющего произвольные начальные угловую и линейную скорости, из его произвольного заранее незаданного начального углового и линейного положения на любую выбранную программную траекторию пространственного (углового и линейного) движения и дальнейшее асимптотически устойчивое движение твердого тела по этой траектории с необходимыми (программными) угловыми и линейными скоростями и ускорениями. При этом переходный процесс управления должен иметь желаемые качественные и количественные динамические характеристики.

Для решения задачи управления пространственным движением твердого тела в инерциальной системе координат использованы бикватернионные модели движения свободного твердого тела и концепция решения обратных задач динамики, с помощью которой задача построения управляющего момента и управляющей силы сводится к задаче синтеза требуемого углового и линейного ускорений твердого тела. Последняя задача носит общий характер для всех движущихся объектов, рассматриваемых как твердое тело, и поэтому представляет самостоятельный интерес. Требуемые угловое и линейное ускорения формируются в виде суммы программного и стабилизирующего угловых и линейных ускорений. Построение программных углового и линейного ускорений может быть выполнено с помощью методов теории оптимального управления.

Основное внимание в статье уделено синтезу стабилизирующих углового и линейного ускорений твердого тела. Оно формируется по принципу обратной связи в виде нелинейной винтовой функции компонент бикватерниона ошибок ориентации и местоположения твердого тела, а также дуальных компонент кинематического винта твердого тела (дуальных композиций проекций векторов ошибок по угловой и линейной скоростям твердого тела) так, чтобы нелинейные нестационарные дифференциальные уравнения возмущенного пространственного движения твердого тела, замкнутые предлагаемыми законами управления, принимали эталонный вид: вид линейных стационарных дуальных матричных дифференциальных уравнений второго порядка относительно винтовой переменной, характеризующей конечные ошибки ориентации и местоположения твердого тела (относительно винтовой части бикватерниона ошибок ориентации и местоположения твердого тела). Постоянные коэффициенты (дуальные скалярные или матричные) этих (эталонных) уравнений имеют смысл дуальных коэффициентов усиления нелинейных обратных связей по угловому и линейному положениям, а также по угловой и линейной скоростям, реализуемых системой управления пространственным движением твердого тела, а сами уравнения описывают эталонную динамику переходных процессов управления. Это позволяет аналитически точно определять коэффициенты усиления нелинейных обратных связей исходя из желаемых качественных и количественных динамических характеристик переходного процесса управления.

Центральную роль в построенной теории играют нелинейные нестационарные дифференциальные уравнения возмущенного пространственного движения твердого тела. Применение бикватернионов конечных перемещений позволяет построить компактные и наглядные уравнения возмущенного движения твердого тела, удобные для построения асимптотически устойчивых в большом управлений ориентацией и местоположением твердого тела. В статье рассматриваются два бикватернионных способа описания ошибок по угловому и линейному положениям твердого тела: с помощью бикватерниона ошибки ориентации и местоположения, определенного своими дуальными компонентами в основной (инерциальной) системе координат, и с помощью бикватерниона ошибки ориентации и местоположения, определенного своими дуальными компонентами в связанной с твердым телом системе координат (с помощью собственного бикватерниона ошибки ориентации и местоположения). Кроме этого, рассматриваются два способа описания ошибок по угловой и линейной скоростям, а также стабилизирующих углового и линейного ускорений твердого тела: 1) винтовой, когда ошибки по угловой и линейной скоростям и стабилизирующие угловое и линейное ускорения формируются в виде винтовых разностей действительного и программного винтов скоростей твердого тела и винтов действительного и программного ускорений; 2) формальный, когда ошибки по угловой и линейной скоростям и стабилизирующие угловое и линейное ускорения формируются в виде разностей дуальных проекций соответствующих винтов, определенных в разных системах координат. Полученные с помощью этих способов дифференциальные уравнения возмущенного движения различаются как по форме, так и по смыслу используемых переменных, что приводит к разным дуальным законам формирования стабилизирующего управления.

В статье построены два вида винтовых законов управления, соответствующих двум различным формам дифференциальных уравнений возмущенного пространственного движения твердого тела, с дуальными матричными или скалярными коэффициентами усиления нелинейных обратных связей, которые позволяют реализовать взаимосвязанную или развязанную желаемую динамику каналов управления движением, оптимальную в том или ином смысле и описываемую дуальными матричными линейными дифференциальными уравнениями второго порядка с дуальными постоянными матричными или скалярными коэффициентами. Эти законы управления позволяют обеспечить требуемые качественные и количественные динамические характеристики процесса управления пространственным движением твердого тела.

Предлагаемые законы управления могут быть использованы в инерциальных системах управления пространственным движением подвижных объектов, построенных на бесплатформенных принципах, когда подвижный объект имеет на своем борту бесплатформенную инерциальную навигационную систему, измеряющую проекции векторов абсолютной угловой скорости вращения и кажущегося ускорения объекта на связанные с ним координатные оси и вырабатывающую с помощью бортового вычислителя компоненты бикватерниона действительного углового и линейного положения объекта в инерциальной системе координат и проекции его абсолютной линейной скорости на связанные с ним координатные оси или на оси инерциальной системы координат. Эти законы управления могут быть также реализованы в системах управления движением роботов-манипуляторов, в которых используется принцип управления по абсолютному угловому и линейному положениям и по абсолютным угловой и линейной скоростям выходного звена робота-манипулятора.

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 19-01-00205.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lastman G.J.* A Shooting Method for Solving Two-Point Boundary-Value Problems Arising from Non-Singular Bang-Bang Optimal Control Problems // Intern. J. Control. 1978. V. 27. № 4. P. 513–524.
2. *Бранец В.Н., Черток М.Б., Казначеев Ю.В.* Оптимальный разворот твердого тела с одной осью симметрии // Космич. исслед. 1984. Т. 22. Вып. 3. С. 352–360.
3. *Li. F., Bainum P.M.* Numerical Approach for Solving Rigid Spacecraft Minimum Time Attitude Maneuvers // J. Guidance, Control, and Dynamics. 1990. V. 13. № 1. P. 38–45.
4. *Scrivener S.L., Thompson R.C.* Survey of Time-Optimal Attitude Maneuvers // J. Guidance, Control, and Dynamics. 1994. V. 17. № 2. P. 225–233.
5. *Левский М.В.* Применение принципа максимума Л.С. Понтрягина к задачам оптимального управления ориентацией космического аппарата // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2008. № 6. С. 144–157.
6. *Bedrossian, N., Bhatt S., Kang W. and Ross M.* Zero-Propellant Maneuver Guidance // IEEE Control Systems magazine. 2009. V. 29. № 5. P. 53–73.
7. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Особый режим управления в задаче оптимального разворота осесимметричного космического аппарата // Известия РАН. Теория и системы управления. 2010. № 6. С. 61–69.
8. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Новый класс аналитических решений в задаче оптимального разворота сферически симметричного твердого тела // Известия РАН. МТТ. 2012. № 2. С. 16–27.
9. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Аналитическое решение задачи оптимального по быстродействию разворота сферически-симметричного космического аппарата в классе конических движений // Известия РАН. Теория и системы управления. 2014. № 2. С. 13–25.
10. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Аналитическое приближенное решение задачи оптимального разворота космического аппарата при произвольных граничных условиях // Известия РАН. Теория и системы управления. 2015. № 3. С. 131–141.
11. *Mortensen R.E.* A globally stable linear attitude regulator // International journal of control. 1968. V. 8. № 3. P. 297–302.
12. *Гаврилова Н.Л., Ткаченко А.И.* О стабилизации положения твердого тела // Автоматика. 1974. № 6. С. 3–8.
13. *Лебедев Д.В.* Управление ориентацией твердого тела с использованием параметров Родрига–Гамильтона // Автоматика. 1974. № 4. С. 29–32.
14. *Лебедев Д.В.* К задаче управления ориентацией твердого тела // Прикладная механика. 1976. Т. 12. № 2. С. 76–82.
15. *Лебедев Д.В.* К управлению трехосной ориентацией твердого тела при наличии ограничений на параметры управления // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 3. С. 545–551.
16. *Wie B. and Barba P.M.* Quaternion feedback for spacecraft large angle maneuvers // Journal of guidance, control and dynamics. 1985. V. 8. P. 360–365.
17. *Мартыненко В.В., Пушкова С.В.* Синтез оптимального управления вращением космического аппарата // Космич. исслед. 1992. Т. 30. Вып. 1. С. 52–59.
18. *Челноков Ю.Н.* Кватернионное решение кинематических задач управления ориентацией твердого тела: Уравнения движения, постановка задач, программное движение и управление // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 4. С. 7–14.
19. *Челноков Ю.Н.* Кватернионное решение кинематических задач управления ориентацией твердого тела: Уравнения ошибок, законы и алгоритмы коррекции (стабилизации) // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 4. С. 3–12.
20. *Челноков Ю.Н.* Управление ориентацией космического аппарата, использующее кватернионы // Космич. исслед. 1994. Т. 32. Вып. 3. С. 21–32.
21. *Челноков Ю.Н.* Кватернионный синтез нелинейного управления ориентацией движущегося объекта // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1995. № 2. С. 145–150.
22. *Челноков Ю.Н.* Кватернионы и динамика управляемого движения твердого тела // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 2. С. 13–23.

23. *Челноков Ю.Н.* Построение управлений угловым движением твердого тела, использующее кватернионы и эталонные формы уравнений переходных процессов. Ч. 1 // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 1. С. 3–17.
24. *Челноков Ю.Н.* Построение управлений угловым движением твердого тела, использующее кватернионы и эталонные формы уравнений переходных процессов. Ч. 2 // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 2. С. 3–17.
25. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные модели и методы динамики, навигации и управления движением. М.: Физматлит, 2011. 560 с.
26. *Clifford W.* Preliminary Sketch of Bi-quaternions. Proceedings of the London Mathematical Society. 1873. P. 381–395.
27. *Котельников А.П.* Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике. Казань, 1895. 215 с.
28. *Котельников А.П.* Винты и комплексные числа // Изв. физ.-матем. общества при Казанском ун-те. 1896. Сер. 2. № 6. С. 23–33.
29. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения: Геометрия и кинематика движения. М.: Физматлит, 2006. 512 с.
30. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука, 1992. 280 с.
31. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах управления положением твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 4. С. 24–31.
32. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Кинематическая задача ориентации во вращающейся системе координат // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 6. С. 36–43.
33. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
34. *Плотников П.К., Сергеев А.Н., Челноков Ю.Н.* Кинематическая задача управления ориентацией твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 5. С. 9–18.
35. *Панков А.А., Челноков Ю.Н.* Исследование кватернионных законов кинематического управления ориентацией твердого тела по угловой скорости // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 6. С. 3–13.
36. *Молоденков А.В.* Кватернионное решение задачи оптимального в смысле минимума энергетических затрат разворота твердого тела // Проблемы механики и управления: Межвуз. сб. науч. трудов. Пермь: Изд-во ПГУ, 1995. С. 122–131.
37. *Бирюков В.Г., Челноков Ю.Н.* Кинематическая задача оптимальной нелинейной стабилизации углового движения твердого тела // Математика. Механика: Сб. науч. трудов. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002. Вып. 4. С. 172–174.
38. *Маланин В.В., Стрелкова Н.А.* Оптимальное управление ориентацией и винтовым движением твердого тела. Москва–Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2004. 204 с.
39. *Стрелкова Н.А.* Оптимальное по быстродействию кинематическое управление винтовым перемещением твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 4. С. 73–76.
40. *Челноков Ю.Н.* Об интегрировании кинематических уравнений винтового движения твердого тела // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 1. С. 32–39.
41. *Челноков Ю.Н.* Об одной форме уравнений инерциальной навигации // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 5. С. 20–28.
42. *Han D., Qing Wei Q., Li Z.* Kinematic Control of Free Rigid Bodies Using Dual Quaternions // International Journal of Automation and Computing. 05(3). July 2008. P. 319–324.
43. *Kim M.J., Kim M.S., Shin S.Y.* A Compact Differential Formula for the First Derivative of a Unit Quaternion Curve // Journal of Visualization and Computer Animation. 1996. V. 7. № 1. P. 43–57.
44. *Dapeng Han, Qing Wei, Zexiang Li, Weimeng Sun.* Control of Oriented Mechanical systems: A Method Based on Dual Quaternion // Proceedings of the 17th World Congress the International Federation of Automatic Control. Seoul, Korea, July 6–11 2008. P. 3836–3841.
45. *Dapeng Han, Qing Wei, Zexiang Li.* A Dual-quaternion Method for Control of Spatial Rigid Body. Networking, Sensing and Control // IEEE International Conference. 6–8 April 2008. P. 1–6.
46. *Ozgur E., Mezouar Y.* Kinematic modeling and control of a robot arm using unit dual quaternions // Robotics and Autonomous Systems. 77 (2016). P. 66–73.

47. *Челноков Ю.Н.* Бикватернионное решение кинематической задачи управления движением твердого тела и его приложение к решению обратных задач кинематики роботов-манипуляторов // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 1. С. 38–58.
48. *Челноков Ю.Н., Нелаева Е.И.* Бикватернионное решение кинематической задачи оптимальной нелинейной стабилизации произвольного программного движения свободного твердого тела // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16. Вып. 2. С. 198–206.
49. *Челноков Ю.Н.* Теория кинематического управления движением твердого тела // Мехатроника, автоматизация, управление. 2017. Т. 18. № 7. С. 435–446.
50. *Челноков Ю.Н.* Приложения теории кинематического управления движением твердого тела // Мехатроника, автоматизация, управление. 2017. Т. 18. № 8. С. 532–542.
51. *Челноков Ю.Н.* Уравнения и алгоритмы для нахождения инерциальной ориентации и кажущейся скорости движущегося объекта в кватернионных и бикватернионных четырехмерных ортогональных операторах // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 2. С. 17–25.
52. *Perez A. and McCarthy J.M.* Dual Quaternion Synthesis of Constrained Robotic Systems // Journal of Mechanical Design. 2004. V. 126. № 3. P. 425–435.
53. *Kavan L., Collins S., O'Sullivan, C. and Zara J.* Dual quaternions for Rigid Transformation Blending // Tech. Rep. TCD-CS-2006-46. 2006.
54. *Han D., Wei Q., Li Z. and Sun W.* Control of Oriented Mechanical Systems: A Method Based on Dual Quaternions // Proceedings of the 17th IFAC World Congress. Seoul, Korea. 2008. P. 3836–3841.
55. *Pham H.L., Perdereau V., Adorno B.V. and Fraisse P.* Position and Orientation Control of Robot Manipulators Using Dual Quaternion Feedback // Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference of Intelligence Robots System. 2010. P. 658–663.
56. *Wang X. and Yu C.* Feedback Linearization Regulator with Coupled Attitude and Translation Dynamics Based on Unit Dual Quaternion // IEEE Multi-Conference on Systems and Control. 2010. P. 2380-2384.
57. *Schilling M.* Universally Manipulable Body Models – Dual Quaternion Representations in Layered and Dynamic MMCs // Autonomous Robots. 2011. V. 30 (4). P. 399–425.
58. *Zhang F., Duan G.* Robust integrated translation and rotation finite-time maneuver of a rigid spacecraft based on dual quaternion // AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference. 08-11 August. 2011. Portland, Oregon. USA. AIAA 2011-6396.
59. *Wang J. and Sun Z.* 6-DOF Robust Adaptive Terminal Sliding Mode Control for Spacecraft Formation Flying // Acta Astronautica. 2012. V. 73. P. 76–87.
60. *Wang J., Liang H., Sun Z., Zhang S., Liu M.* Finite-time control for spacecraft formation with dual-number-based description // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2012. V. 35 (3). P. 950–962.
61. *Filipe N. and Tsiotras P.* Simultaneous Position and Attitude Control without Linear and Angular Velocity Feedback using Dual Quaternion // Proceedings of the American Control Conference. Washington DC. 2013. P. 4808-4813.
62. *Filipe N. and Tsiotras P.* Rigid Body Motion Tracking Without Linear and Angular Velocity Feedback Using Dual Quaternions // IEEE European Control Conference. 2013. P. 329–334.
63. *Lee U.* State-Constrained Rotational and Translational Motion Control with Applications to Monolithic and Distributed Spacecraft // A dissertation submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy. Program Authorized to Offer Degree: Aeronautics and Astronautics. University of Washington. 2014. 178 p.
64. *Zu Y., Lee U. and Dai R.* Distributed Motion Estimation of Space Objects Using Dual Quaternions // AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference. 2014. P. 1–13.
65. *Filipe N. and Tsiotras P.* Adaptive Position and Attitude–Tracking Controller for Satellite Proximity Operations Using Dual Quaternions // Journal of Guidance, Control and Dynamics. 2015. V. 38(4). P. 566–577.
66. *Filipe N., Kontitsis M. and Tsiotras P.* Extended Kalman Filter for Spacecraft Pose Estimation Using Dual Quaternions // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2015. V. 38 (9). P. 1625–1641.
67. *Lee U. and Mesbahi M.* Optimal Power Descent Guidance with 6-DoF Line of Sight Constraints via Unit Dual Quaternions // AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference. 2015.

68. *Unsik Lee and Mehran Mesbahi.* Optimal Powered Descent Guidance with 6-DoF Line of Sight Constraints via Unit Dual Quaternions // University of Washington, Seattle, WA 98195-2400 1 of 21 American Institute of Aeronautics and Astronautics. P. 1–21.
69. *Filipe N., Tsiotras P.* Adaptive Position and Attitude–Tracking Controller for Satellite Proximity Operations Using Dual Quaternions // Journal of Guidance, Control and Dynamics. 2015. V. 38 (4). P. 566–577.
70. *Haichao Gui, George Vukovich.* Dual-quaternion-based adaptive motion tracking of spacecraft with reduced control effort // Nonlinear Dynamics. 2016. V. 83. Issue 1–2. P. 597–614.
71. *Lee U. and Mesbahi M.* Constrained Autonomous Precision Landing via Dual Quaternions and Model Predictive Control // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2017. V. 40 (2). P. 292–308.
72. *Ахрамович С.А., Малышев В.В., Старков А.В.* Математическая модель движения беспилотного летательного аппарата в бикватернионной форме // Научно-технический журнал “Полет”. 2018. № 4. С. 9–20.
73. *Ахрамович С.А., Малышев В.В.* Применение бикватернионов в задачах управления летательными аппаратами // Системный анализ, управление и навигация: Тезисы докладов. Сборник. М.: МАИ. 2018. С. 117–120.
74. *Ахрамович С.А., Баринов А.В.* Система управления движением БПЛА с прогнозирующей моделью в бикватернионной форме // Системный анализ, управление и навигация: Тезисы докладов. Сборник. М.: МАИ. 2018. С. 120–122.
75. *Garcia C., Prett D.M., Morari M.* Model predictive control: theory and practice // Automatica. 1989. № 3. P. 335–348.