ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2020, № 6, с. 73–81

УДК 539.3

ОБ ОСНОВНЫХ ГИПОТЕЗАХ ОБЩЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ И ПРЕДЕЛАХ ИХ ПРИМЕНИМОСТИ

В. Г. Зубчанинов

Тверской государственный технический университет, Тверь, Россия
e-mail: vlgzub@gmail.com

Поступила в редакцию 28.05.2020 г.
После доработки 22.06.2020 г.
Принята к публикации 15.08.2020 г.

В работе обсуждаются и анализируются вопросы применимости и пределы применимости некоторых основных гипотез общей математической теории пластичности. В теории процессов упругопластического деформирования это постулат изотропии начально изотропных тел, в котором утверждается инвариантность ортогональных преобразований образов процесса при установлении связи между напряжениями и деформациями. В теории течения – это гипотеза о разложении полных деформаций на упругие и пластические деформации и влияние на ее связь между напряжениями и деформациями при сложном нагружении.

Ключевые слова: упругость, пластичность, тензоры напряжений и деформаций, инварианты, сложное нагружение, векторы напряжений и деформаций, постулат изотропии, гипотеза о разложении деформаций

DOI: 10.31857/S0572329920060173

1. Тензоры напряжений, деформаций и их инварианты. Напряженно-деформированное состояние (НДС) сплошных сред и тел, отнесенных к координатным осям x_i $(i = 1, 2, 3)$ для каждой точки физического пространства с координатным ортонормированным репером $\hat{e}_i$, характеризуется заданием симметричных тензоров напряжений (σ_{ij}) и деформаций (ε_{ij}), где σ_{ij} и ε_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ – их компоненты. Геометрически тензоры напряжений и деформаций могут быть представлены тривекторами

$$\overline{S}_i = \sigma_{ji}\hat{e}_j, \quad \overline{E}_i = \varepsilon_{ji}\hat{e}_j \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

в каждой точке физического пространства. Вектор напряжений в данной точке на произвольной площадке с единичной нормалью $\hat{n} = n_i\hat{e}_i$ представляется формулой Коши

$$\overline{S}_n = \overline{S}_i n_i = X_i\hat{e}_i, \quad X_i = \sigma_{ij}n_j \tag{1.1}$$

Вектор напряжения $\overline{S}_n$ называют собственным или главным нормальным вектором напряжений, если его направление совпадает с направлением нормали $\hat{n} = n_i\hat{e}_i$, т.е.

$$\overline{S}_n = \sigma_k\hat{n} = \sigma_k\delta_{ij}n_j\hat{e}_i \tag{1.2}$$

Модуль этого вектора напряжений называют просто собственным значением или главным напряжением.

Сравнивая (1.1), (1.2), получаем систему уравнений относительно n_j

$$(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_k)n_j = 0, \quad n_j n_j = 1 \tag{1.3}$$

Приравнивая определитель (1.3) нулю, получаем характеристическое уравнение для определения собственных напряжений σ_k ($k = 1, 2, 3$)

$$|\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_k| = 0$$

откуда следует кубическое уравнение

$$\sigma_k^3 - I_1\sigma_k^2 + I_2\sigma_k - I_3 = 0 \tag{1.4}$$

где

$$I_1 = \sigma_{ii} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3\sigma_0$$
$$I_2 = \sigma_{ii}\sigma_{jj} - (\sigma_{ij}\sigma_{ij}) = 9\sigma_0^2 = S^2$$
$$I_3 = |\sigma_{ij}| = \sigma_1\sigma_2\sigma_3, \quad S^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2$$

которые являются инвариантами тензора напряжений относительно поворота координатных осей x_i ($i = 1, 2, 3$). Компоненты девиаторов

$$S_{ij} = \delta_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0, \quad Э_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0$$

Инварианты тензора-девиатора напряжений

$$J_1 = S_{ii} = S_{11} + S_{22} + S_{33} = S_1 + S_2 + S_3 = 0$$

$$2J_2 = S_{ij}S_{ij} = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = \sigma^2$$

$$J_3 = |S_{ij}| = \frac{\sigma^3 \cos 3\varphi}{3\sqrt{6}}$$

Модуль тензора напряжений

$$S = \sqrt{3\sigma_0^2 + \sigma^2}$$

где $\sigma_0 = \sigma_{ii}/3$ – модуль шарового тензора.

$$\sigma = \sqrt{3}\tau_{oct} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2)}$$

– модуль девиатора напряжений, $\tau_{oct} = \sigma/\sqrt{3}$ – октаэдрическое касательное напряжение. Общее решение кубического уравнения (1.4)

$$\sigma_1 = \sigma_0 + \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma\cos\varphi$$
$$\sigma_2 = \sigma_0 + \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \varphi\right)$$
$$\sigma_3 = \sigma_0 + \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \varphi\right)$$

Главные касательные напряжения

$$
\begin{aligned}
T_{12} &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \varphi\right) \\
T_{23} &= \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \sin\varphi \\
T_{13} &= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \varphi\right)
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

где φ – угол вида напряженного состояния формоизменения на октаэдрической площадке. Аналогичные формулы имеют место для тензора деформаций.

Наряду с главными касательными напряжениями в теории пластичности T_{ij} важное значение имеют октаэдрические касательные напряжения

$$\tau_{\text{oct}} = \frac{\sigma}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{T_{12}^2 + T_{23}^2 + T_{13}^2}$$

введенные А. Надаи [8, 9]. Эти напряжения равны на всех гранях частицы в виде октаэдра, что важно. Надаи А. предположил, что материал переходит из упругого состояния в пластическое тогда, когда $\tau_{\text{окт}}$ достигает некоторого предельного значения $\tau_{\text{oct}} = \tau^T$ либо $\sigma = \sigma^T$, где

$$\tau^T = \sqrt{2}\tau_*, \quad \sigma^T = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_T$$

где τ_* – предел текучести при пространственном чистом сдвиге, σ_T – предел текучести при растяжении. Таким образом, Надаи А. дал совершенно понятное толкование критерию пластичности Мизеса. На девиаторной плоскости в пространстве главных напряжений критерий Мизеса изображается окружностью радиуса $\sigma = \sigma^T = \sqrt{2/3}\sigma_T = \sqrt{3}\tau^T$.

Девиаторную плоскость можно разбить на шесть секторов и, согласно формулам (1.5), составить таблицу для $T_{\max}$ [12].

Из таблицы следует, что закономерность изменений $T_{\max}$ в каждом секторе совпадает и может быть представлена формулой

$$T_{\max} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \sin\omega = \sqrt{\frac{3}{2}}\tau_{\text{oct}} \sin\omega \quad (60^\circ \le \omega \le 90^\circ)$$

В крайних точках получаем

$$\frac{\tau_{\text{oct}}}{\tau_{\max}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} = 0.945, \quad \frac{\tau_{\text{oct}}}{\tau_{\max}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0.816$$

Таким образом, из двух известных критериев пластичности Треска и Мизеса–Надаи правильным (истинным) является критерий Мизеса–Надаи, т.к. $\tau_{\text{oct}} < \tau_{\max}$.

Естественным обобщением критерия Мизеса–Надаи на процессы упругопластического деформирования является единая универсальная кривая упрочнения материалов при простом нагружении Роша и Эйхингера и единая универсальная кривая упрочнения материалов для траекторий малой и средней кривизны Ильюшина [7].

2. О влиянии ортогональных преобразований координатного базиса и вектора напряжений на инварианты тензоров напряжений и деформаций в физическом пространстве. Этот вопрос изучается в работах [1–3, 10–12]. При ортогональном преобразовании координатного базиса $\{\hat{e}_i\}$ в новое положение $\hat{e}_i' = l_{ij}e_j$ $(i, j = 1, 2, 3)$, где $A = (l_{ij})$ – матрица этого преобразования. В новом положении неподвижный вектор напряжений $\bar{S}_n = X_i\hat{e}_i$ изменяет свои координаты так, что

$$\bar{S}_n = X_j\hat{e}_j = X'_i\hat{e}'_i$$

Однако $\hat{e}_j = l_{ij}\hat{e}'_i$ и поэтому

$$X'_i l_{ij} X_j \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

Вектор напряжений сохраняет свою длину. Следовательно,

$$X'_i X'_i = (l_{ij}X_j)(l_{ik})X_k = X_j\delta_{ij}X_k$$

откуда следует соотношение

$$l_{ij}l_{ik} = \delta_{jk} \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \tag{2.1}$$

из которого следует, что координатный базис остается ортонормированным.

При реализации процессов деформирования и нагружения в точке тела все три инварианта тензоров (тривекторов) будут изменяться. Вектор $\bar{S}_n$ и тривекторы будут изменять свою ориентацию. Новые проекции вектора $\bar{S}_n = X_i\hat{e}_i$ определяются формулой $X'_i = \beta_{ij}X_j$, где β_{ij} – компоненты матрицы ортогонального преобразования. Длина вектора неизменна и поэтому

$$X'_i X'_i = (\beta_{ij}X_j)(\beta_{ik})X_k = X_j\delta_{jk}(X_k)$$

откуда получаем соотношение

$$\beta_{ij}\beta_{ik} = \delta_{jk} \quad (i, j, k = 1,\ 2,\ 3) \tag{2.2}$$

Данное соотношение (2.2) совпадает по форме с (2.1) и поэтому $l_{ij} = \beta_{ij}$. Это означает, что ортогональные преобразования координатных осей и вектора $\bar{S}_n$ совпадают. Однако в первом случае сохраняются все три инварианта тензоров, а во втором – лишь один (длина вектора $\bar{S}_n$). Остальные два инварианта вида НДС остаются неопределенными. Это создает некоторую проблему при определении определяющих законов связи между напряжениями и деформациями.

Тензорная форма определяющих соотношений в механике сплошной среды (МСС) между напряжениями и деформациями является одной из наиболее общих, т.к. не зависит от координатной системы. Прагер В. и Ильюшин А.А. [1, 2, 7] для сложных процессов нагружения предложили, соответственно, соотношения

$$\frac{dS_{ij}}{ds} = A\frac{dЭ_{ij}}{ds} + BS_{ij} + CЭ_{ij}$$

$$S_{ij} = \sum_{n=0}^{4} A_n \frac{d^n Э_{ij}}{ds^n}$$

где коэффициенты A, B, C, A_n зависят от инвариантов.

Как было отмечено выше, в процессах деформирования и нагружения при ортогональных преобразованиях тривекторов $\bar{S}_n$ инварианты могут изменяться, что может приводить к неинвариантности самих определяющих соотношений [12].

3. Векторное представление тензоров напряжений, деформаций и процессов нагружения. Для геометрически наглядного отображения процессов деформирования и нагружения в точке физического пространства Ильюшин А.А. предложил изобразить тензоры напряжений (σ_{ij}) и деформаций (ε_{ij}) в виде векторов в координатном шестимерном пространстве линейной алгебры [1–3, 11, 12]

$$\bar{S} = X_i\hat{e}_i, \quad \bar{E} = Y_i\hat{e}_i \quad (i = 1, 2, \ldots, 6)$$

где $\hat{e}_i$ – компоненты ортонормированного координатного репера,

$$X_1 = \sigma_{11}, \quad X_2 = \sigma_{22}, \quad X_3 = \sigma_{33}, \quad X_4 = \sqrt{2}\sigma_{12}, \quad X_5 = \sqrt{2}\sigma_{23}, \quad X_6 = \sqrt{2}\sigma_{13}$$
$$Y_1 = \varepsilon_{11}, \quad Y_2 = \varepsilon_{22}, \quad Y_3 = \varepsilon_{33}, \quad Y_4 = \sqrt{2}\varepsilon_{12}, \quad Y_5 = \sqrt{2}\varepsilon_{23}, \quad Y_6 = \sqrt{2}\varepsilon_{13}$$

– координаты векторов.

$$S = \sqrt{\sigma_{ij}\sigma_{ij}}, \quad E = \sqrt{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}}$$

– их модули, равные модулям тензоров.

В объединенном шестимерном пространстве E_6 в работах [1–3, 11] были введены также понятия образа процесса деформирования и образа процесса нагружения. Тензор напряжений (σ_{ij}) можно разложить в прямую сумму нормальных и касательных напряжений. Им можно поставить в соответствие два трехмерных подпространства нормальных и касательных напряжений. Если исходный тензор (σ_{ij}) отнесен к главным собственным осям, то подпространство нормальных напряжений становится подпространством собственных напряжений, а подпространство касательных напряжений запустевает. Следовательно, пространство E_6 может иметь не более трех собственных направлений. Таким образом, вектор напряжений $\bar{S}$ будет тождественным тензору (σ_{ij}), если их модули равны, но вектор $\bar{S}$ может иметь не более трех собственных направлений и главных собственных напряжений. Аналогично для вектора $\bar{E}$ и тензора деформаций (ε_{ij}). Следовательно, три инварианта тензоров (σ_{ij}) и (ε_{ij}) в физическом пространстве остаются инвариантами векторов $\bar{S}$ и $\bar{E}$ в пространстве E_6.

Образом процесса деформирования в E_6 называют траекторию деформирования, описываемую концом вектора деформации $\bar{E}$ и построенными в каждой ее точке векторами $\bar{S}$, а также приписанными этим точкам скалярными свойствами типа температуры T и давления p. В теории пластичности объемная деформация $\theta = 3\varepsilon_0$ считается упругой и подчиняется закону Гука

$$\sigma_0 = 3K\varepsilon_0$$

где K – упругий модуль Бриджмена. Для этого случая А.А. Ильюшин [1–3] ввел следующие преобразования компонент тензоров в координаты векторов напряжений и деформаций

$$\bar{S} = S_0\hat{i}_0 + S_k\hat{i}_k, \quad E = Э_0\hat{i}_0 + Э_k\hat{i}_k \quad (k = 1, 3, \ldots, 5)$$

где новые координаты и координатный базис

$$S_0 = \sqrt{3}\sigma_0, \quad S_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}S_{11}, \quad S_2 = \frac{S_{22} - S_{33}}{\sqrt{2}}, \quad S_3 = \sqrt{2}\sigma_{12},$$
$$S_4 = \sqrt{2}\sigma_{23}, \quad S_5 = \sqrt{2}\sigma_{13}$$

$$Э_0 = \sqrt{3}\varepsilon_0, \quad Э_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}Э_{11}, \quad Э_2 = \frac{Э_{22} - Э_{33}}{\sqrt{2}}, \quad Э_3 = \sqrt{2}\varepsilon_{12},$$
$$Э_4 = \sqrt{2}\varepsilon_{23}, \quad Э_5 = \sqrt{2}\varepsilon_{13}$$

$$\hat{i}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \hat{e}_3), \quad \hat{i}_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}\left[\hat{e}_1 - \frac{1}{2}(\hat{e}_2 + \hat{e}_3)\right], \quad \hat{i}_2 = \frac{\hat{e}_2 - \hat{e}_3}{\sqrt{2}}$$
$$\hat{i}_3 = \hat{e}_4, \quad \hat{i}_4 = \hat{e}_5, \quad \hat{i}_5 = \hat{e}_6$$

В данном случае образ процесса строится в пятимерном E_5 девиаторном подпространстве. Под образом процесса деформирования понимается траектория, описываемая в E_5 концом вектора деформации формоизменения $\overline{Э}$, построенные в каждой ее точке векторы напряжений $\overline{\sigma}$, $d\overline{\sigma}/ds$ и приписанные к этим точкам параметры температуры T и давления p.

В каждой точке траектории деформирования можно построить также координатный репер $\{d^n\overline{Э}/ds^n\}$ и разложить в этом репере вектор напряжений

$$\overline{\sigma} = \sum_{n=0}^{4} A_n \frac{d^n\overline{Э}}{ds^n} \tag{3.1}$$

где коэффициенты A_n – функционалы процесса, зависящие от инвариантов тензоров.

Вместо косоугольного репера можно построить в каждой точке траектории подвижный ортонормированный репер Френе–Ильюшина $\hat{p}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, 5)$, орты которого удовлетворяют рекуррентным формулам

$$\frac{d\hat{p}_k}{ds} = -æ_{k-1}\hat{p}_{k-1} + æ_k\hat{p}_{k+1} \tag{3.2}$$

В этом репере можно разложить векторы $\overline{\sigma}$, $d\overline{\sigma}/ds$ в виде

$$\overline{\sigma} = P_k\hat{p}_k, \quad \frac{d\overline{\sigma}}{ds} = P_k^*\hat{p}_k, \quad \frac{d\hat{\sigma}}{ds} = P_k^0\hat{p}_k \tag{3.3}$$

где определяющие соотношения (3.1), (3.3) в [1–3] названы постулатом изотропии: определяющие соотношения связи между напряжениями и деформациями инвариантны относительно ортогональных преобразований образа процесса в координатных пространствах E_5 и E_6.

В работе [6] профессор Ивлев Д.Д. отметил, что третий инвариант девиаторов напряжений и деформаций при ортогональном преобразовании образа процесса может изменяться, что приводит к нарушению постулата изотропии. Это изменение инвариантов девиаторов было ранее замечено в работах [1–3, 10]. Замечание Ивлева Д.Д. послужило поводом дискуссии 1960–61 годов по новому направлению развития теории пластичности, предложенному А.А. Ильюшиным [1–3]. В работе [4] А.А. Ильюшин отметил, что, (изменение третьих инвариантов тензоров является) как показали многочисленные эксперименты отечественных и зарубежных ученых, влияние третьих инвариантов на выполнение постулата изотропии является слабым и им можно пренебречь при малых упругопластических деформациях.

В работе [3] А.А. Ильюшин отметил, что нарушения постулата изотропии возможны в нелинейной теории упругости.

Как и всякая гипотеза, постулат изотропии имеет свои границы применимости. Однако систематических экспериментальных исследований по установлению этой границы не производилось.

4. Теория процессов упругопластического деформирования и расширенная теория течения. В соотношениях постулата изотропии (3.3) изменим ортонормированный базис $\{\hat{p}_k\}$. Заменим в нем единичный вектор $\hat{p}_2$ на единичный вектор

$$\hat{\sigma} = p_k \cos\beta_k \quad (k = 1, 2, \ldots, 5) \tag{4.1}$$

где β_k – угловые координаты $\hat{\sigma}$. Тогда соотношения для $d\bar{\sigma}/ds$ можно представить в виде

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = M_m\hat{p}_m + M\hat{\sigma} \quad (m = 1, 3, 4, 5) \tag{4.2}$$

После умножения (4.2) на $\hat{\sigma}$ находим M и преобразуем (4.2) к виду

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = M_m\hat{p}_m + \left(\frac{d\sigma}{ds} - M_m\cos\beta_k\right)\hat{\sigma} \tag{4.3}$$

где $M_m(s) = \sigma M_m^*(s, æ_m)$ – функционалы процесса деформирования.

Представим вектор напряжений с учетом (4.1) в виде

$$\bar{\sigma} = \sigma\hat{\sigma} = \sigma(\hat{p}_k\cos\beta_k)$$

Дифференцируя полученное выражение, находим

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = \frac{d\sigma}{ds}\hat{\sigma} + \sigma\left(\frac{d\hat{\sigma}}{ds}\right) = \frac{d\sigma}{ds}\hat{\sigma} + \sigma\left[\frac{dp_k}{ds}\cos\beta_k + \hat{p}_k\frac{d}{ds}(\cos\beta_k)\right]$$

Используя формулы (3.2), получаем

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = \frac{d\sigma}{ds}\hat{\sigma}[-æ_{k-1}\hat{p}_{k-1} + æ_k\hat{p}_{k+1}]\cos\beta_k + \hat{p}_k\frac{d}{ds}(\cos\beta_k) \tag{4.4}$$

Исключая из полученного выражения (4.4)

$$\hat{p}_2 = \frac{\hat{\sigma} - \hat{p}_m\cos\beta_m}{\cos\beta_2} \quad (m = 1, 3, 4, 5)$$

приходим к выражению вида (4.3).

Ограничимся далее частным случаем теории процессов – гипотезой компланарности. В этом случае три вектора $\bar{\sigma}$, $d\bar{\sigma}$, $d\bar{Э}$ всегда лежат в одной соприкасающейся плоскости репера Френе–Ильюшина и $k = m = 1$, $\beta_2 = 90° - \beta_1$. В этом случае из уравнений (4.3)–(4.4) получаем

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = M_1\hat{p}_1 + \left(\frac{d\sigma}{ds} - M_1\cos\beta_1\right)\hat{\sigma} \tag{4.5}$$

$$\frac{d\beta_1}{ds} + æ_1 = -\frac{M_1}{\sigma}\sin\beta_1 \tag{4.6}$$

Уравнение (4.5) можно записать также в виде

$$\frac{d\bar{Э}}{ds} = \frac{1}{M_1}\frac{d\bar{\sigma}}{ds} + \left(\cos\beta_1 - \frac{1}{M_1}\frac{d\sigma}{ds}\right)\hat{\sigma} \tag{4.7}$$

Система уравнений (4.5), (4.6) теории процессов содержит два функционала. Для траекторий средней кривизны эти функционалы имеют вид

$$M_1 = 2G_p + (2G - 2G_p^0)f^q(\beta_1)$$
$$\sigma = \Phi(s)$$

где

$$f = \frac{1 - \cos\beta_1}{2}$$

– функционал сложного нагружения, q – экспериментально определяемый параметр, $\Phi(s)$ – универсальная функция упрочнения Одквиста–Ильюшина, G_p – модуль пластического сдвига, G_p^0 – его значение в точке излома траектории.

Таблица 1

Сектор	T_{max}	ω	φ°
I, IV	T_{13}, T_{31}	$\frac{2\pi}{3} - \varphi$	$0° \le \varphi \le 60°$ $180° \le \varphi \le 240°$
II, V	T_{23}, T_{32}	φ	$120° \le \varphi \le 180°$ $300° \le \varphi \le 360°$
II, VI	T_{12}, T_{21}	$\frac{2\pi}{3} + \varphi$	$60° \le \varphi \le 120°$ $240° \le \varphi \le 300°$

В теории течения введена основополагающая гипотеза о возможности разложения полных деформаций на упругие и пластические части

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, \quad Э_{ij} = Э_{ij}^e + Э_{ij}^p$$

С нашей точки зрения при сложном нагружении и разгружении это невозможно. Эта гипотеза противоречит также понятиям полной и неполной пластичности Хаара и Кармана [7]. В наших беседах с профессором Ивлевым Д.Д. по поводу гипотезы о разложении полных деформаций на упругую $\bar{Э}^e$ и пластическую $\bar{Э}^p$ части мы согласились, что, как и всякая гипотеза, она имеет пределы своей применимости. Если положить в уравнениях теории процессов (4.6), (4.7) $M_1 = G$, то получим расширенные основные уравнения теории течения

$$\begin{gathered} \frac{d\bar{Э}}{ds} = \frac{1}{2G}\frac{d\bar{\sigma}}{ds} + \left(\cos\beta_1 - \frac{1}{2G}\frac{d\sigma}{ds}\right)\hat{\sigma} \\ \frac{d\beta_1}{ds} + æ_1 = -\frac{2G}{\sigma}\sin\beta_1 \end{gathered} \tag{4.8}$$

где $\sigma = \Phi(s)$ – универсальная функция упрочнения. Из (4.8) следует

$$\frac{d\bar{Э}^e}{ds} = \frac{1}{2G}\frac{d\bar{\sigma}}{ds}, \quad \frac{d\bar{Э}^p}{ds} = \left(\cos\beta_1 - \frac{1}{2G}\frac{d\sigma}{ds}\right)$$

Уравнения (4.8) удовлетворяют постулату изотропии для траекторий средней кривизны, содержат параметр $æ_1$ сложного нагружения и угол сближения β_1, характеризующий векторные свойства материала. В целом уравнения (4.8) представляют собой уравнения расширенного варианта теории течения. Классический вариант теории свободного пластического течения получаем при $\beta_1 = 0$, $\hat{\sigma} = \hat{p}_1$ $(\cos\beta_1 = \hat{\sigma}\cdot\hat{p}_1)$, $æ_1 \approx 0$ для траектории деформирования малой кривизны или близкой к простому нагружению. Для траекторий деформирования большой кривизны теория течения становится неприемлемой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильюшин А.А.* Труды (1946–1966). Т. II. М.: Физматлит, 2004. 480 с.
2. *Ильюшин А.А.* Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
3. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во Московского ун-та, 1990. 310 с.
4. *Ильюшин А.А.* Еще о постулате изотропии // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1962. № 1. С. 201–204.
5. *Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д.* Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001, 701 с.

6. *Ивлев Д.Д.* О постулате изотропии в теории пластичности // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1960. № 2. С. 125–127.
7. Сборник. Теория пластичности / Под ред. Ю.Н. Работнова. М.: ИИЛ, 1948. 452 с.
8. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел. М.: ИИЛ, 1954. 647 с.
9. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: ГИТТЛ, 1956. 405 с.
10. *Сокольников И.С.* Тензорный анализ. М.: Наука, 1971. 375 с.
11. *Зубчанинов В.Г.* Механика процессов пластических сред. М.: Физматлит, 2010. 352 с.
12. *Зубчанинов В.Г.* Общая математическая теория пластичности и постулаты макроскопической определимости и изотропии // Вестник Московского ун-та. Серия 1. Математика и механика. 2018. № 5. С. 29–47.