ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2020,
№ 6, с. 141–148

УДК 539.374

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ СМЕСЕЙ

© 2020 г. А. Н. Спорыхин

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

e-mail: anspor@mail.ru

Поступила в редакцию 21.06.2020 г.
После доработки 27.06.2020 г.
Принята к публикации 30.06.2020 г.

Для описания поведения целого ряда реальных структур, состоящих из *n* компонент, используется обобщенная модель упруговязкопластического тела. В рамках предложенной модели многокомпонентного тела в строгой линеаризованной трехмерной постановке исследуется устойчивость многокомпонентных упруговязкопластических смесей. Показано, что исследование устойчивости докритического состояния смеси может быт сведено к исследованию устойчивости континуума с комплексными физико-механическими параметрами. Для однородных основных состояний приведены решения статических линеаризованных задач. Рассмотрен пример.

Ключевые слова: смеси, напряжения, деформации, пластичность, вязкость, устойчивость

DOI: 10.31857/S0572329920060148

Введение. Исследованию устойчивости пластически деформирующихся сред посвящены многие исследования. Состояние исследований, проведенных на основании трехмерных линеаризованных уравнений устойчивости, отражено в обзорных статьях и монографиях [1–4 и др.]. При этом значительная часть конкретных результатов получена в основном для задач устойчивости в геомеханике [5–8 и др.]. Для описания поведения и исследования устойчивости в строгой линеаризованной трехмерной постановке целого ряда реальных структур, состоящих из n- компонент, необходимо привлекать более общие модели тел, так как в рамках простейших структурных моделей тел [8–11], невозможно адекватно описать поведение многокомпонентных сред. Ниже, для предложенной модели многокомпонентного тела, рассматривается один из возможных приближенных подходов к исследованию устойчивости многокомпонентных упруговязкопластических (EVP) смесей.

1. Определяющие соотношения EVP тела. Рассмотрим EVP многокомпонентное тело, механическая модель которого представляет собой последовательное соединение α (α = 1, 2, 3..L) моделей тела $S_p^1 = H \sim StV \sim K$ [11], состоящего из последовательно соединенных тел: H-тела Гука, StV-тела Сен-Венана и K-тела Кельвина-Фойхта. При этом у каждой из этих моделей S_p^α свои собственные константы. Число α определяет порядок обобщенной модели тела S_p^α.

Следуя [9–12], запишем соотношения, которые полностью определяют свойства обобщенной модели S_p^α.

Тело остается упругим пока

$$S_{ij}S^{ij} < k_1^2; \quad S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}; \quad k_1 \geq k_2 \geq .. \geq k_L \tag{1.1}$$

где S_{ij} – компоненты тензора напряжений. При этом для последовательно соединенных моделей

$$\sigma_{ij}^\alpha = \lambda_\alpha \overset{e}{\varepsilon}{}_{nn}^\alpha \delta_{ij} + 2\mu_\alpha \overset{e}{\varepsilon}{}_{ij}^\alpha, \quad \Sigma\alpha = 1, 2, \ldots, L \tag{1.2}$$

где λ_α, μ_α – параметры Ламе.

Если $S_{ij}S^{ij} \geq k_1^2$, то полная деформация слагается из упругой и пластической

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^1 + \varepsilon_{ij}^2 + \ldots + \varepsilon_{ij}^L = \overset{e}{\varepsilon}{}_{ij}^1 + \overset{p}{\varepsilon}{}_{ij}^1 + \overset{e}{\varepsilon}{}_{ij}^2 + \overset{p}{\varepsilon}{}_{ij}^2 + \ldots + \overset{e}{\varepsilon}{}_{ij}^L + \overset{p}{\varepsilon}{}_{ij}^L \tag{1.3}$$

Здесь $\varepsilon_{ij}^1, \varepsilon_{ij}^2, \ldots, \varepsilon_{ij}^L$ – деформации, соответственно, первой, второй и т.д. моделей S_p^α. Пластическая составляющая объемной деформации моделей удовлетворяет условию несжимаемости

$$\overset{p}{\varepsilon}{}_{nn}^\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, L \tag{1.4}$$

Следовательно, компоненты девиатора тензора деформации $\overset{p}{e}{}_{ij}^\alpha$ тождественно равны компонентам тензора деформаций $\overset{p}{\varepsilon}{}_{ij}^\alpha$.

Напряжения, приложенные к моделям одинаковы, тогда

$$S_{ij}^1 = S_{ij}^2 = \ldots = S_{ij}^L = S_{ij} \quad (\sigma_{ij}^1 = \sigma_{ij}^2 = \ldots = \sigma_{ij}^L) \tag{1.5}$$

Тензоры скоростей пластической деформации $\overset{p}{e}{}_{ij}^\alpha$ связаны с тензором напряжений соотношениями ассоциированного закона течения

$$\overset{p}{e}{}_{ij}^\alpha = \psi_\alpha \left(S_{ij} - c_\alpha \overset{p}{\varepsilon}{}_{ij}^\alpha - \eta_\alpha \overset{p}{e}{}_{ij}^\alpha \right), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, L \tag{1.6}$$

если выполняется условие пластичности

$$\left(S_{ij} - c_\alpha \overset{p}{\varepsilon}{}_{ij}^\alpha - \eta_\alpha \overset{p}{e}{}_{ij}^\alpha \right)\left(S_{ij} - c_\alpha \overset{p}{\varepsilon}{}_{ij}^\alpha - \eta_\alpha \overset{p}{e}{}_{ij}^\alpha \right) = k_a, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, L \tag{1.7}$$

здесь η_α – коэффициент вязкости, c_α – коэффициент упрочнения, k_α – предел текучести, ψ_α – скалярные положительные множители, соответственно L-й модели S_p^α.

Полные деформации связаны с перемещениями формулами Коши

$$2\varepsilon_{ij} = \nabla_i u_j + \nabla_j u_i \tag{1.8}$$

Уравнения (1.1)–(1.8) с уравнениями равновесия

$$\nabla_i \sigma_j^i + \chi_j = 0 \tag{1.9}$$

представляют собой систему уравнений, описывающих деформированное состояние EVP среды произвольного порядка.

2. Постановка задачи об устойчивости деформирования EVP смесей. Рассмотрим сплошную среду объема V. Предположим, что на части поверхности Σ_p упруговязкопластического тела заданы поверхностные усилия p_i, а на части поверхности Σ_U заданы перемещения u_i, причем величины p_i и u_i с ростом времени t стремятся или принимают значения p_i^0 и u_i^0, не зависящие от времени.

Пусть решение системы уравнений (1.1)—(1.9) при этих граничных условиях есть

$$\overset{0}{\sigma}_{ij}(x_k,t),\ \overset{0}{\varepsilon}_{ij}(x_k,t),\ \overset{0}{e}{}_{ij}^{e\alpha}(x_k,t),\ \overset{0}{e}{}_{ij}^{p\alpha}(x_k,t),\ \overset{0}{u}_i(x_k,t) \tag{2.1}$$

Будем предполагать, что с ростом времени эти решения стремятся к

$$\overset{0}{\sigma}_{ij}(x_k),\ \overset{0}{\varepsilon}_{ij}(x_k),\ \overset{0}{e}{}_{ij}^{e\alpha}(x_k),\ \overset{0}{e}{}_{ij}^{p\alpha}(x_k),\ \overset{0}{u}_i(x_k) \tag{2.2}$$

В дальнейшем исследуется устойчивость этого состояния по отношению к малым возмущениям, т.е. на основе динамического подхода при предположении, что об устойчивости движения можно судить по линеаризованной системе уравнений (1.1)—(1.9). При этом для упрощения задачи ввиду ее сложности, принимаем обобщенную концепцию продолжающегося нагружения [2, 3], и будем исследовать соответствующую линеаризованную задачу с известными зонами разгрузки, возникшими в докритическом состоянии.

В случае первого варианта теории малых докритических деформаций [5] трехмерные линеаризованные уравнения равновесия имеют вид

$$\nabla_s\left(\overset{+}{\sigma}{}_j^s+\overset{0}{\sigma}{}_k^s\,\nabla^k\,\overset{+}{u}_j\right)+\overset{+}{X}_j-\rho\frac{\partial^2\overset{+}{u}_j}{\partial t^2}=0 \tag{2.3}$$

Здесь и далее верхние индексы “+” и “0” приписаны, соответственно, компонентам невозмущенного состояния и возмущениям.

Граничные условия на внешней поверхности $\sum_p$ обобщенного EVP тела следующие

$$N_s\left(\overset{+}{\sigma}{}_j^s+\overset{0}{\sigma}{}_k^s\,\nabla^k\,\overset{+}{u}_j\right)=\overset{+}{P}_j \tag{2.4}$$

при этом в случае “следящей” нагрузки

$$\overset{+}{P}_j=\overset{0}{P}_k\,\nabla^k\,\overset{+}{u}_j,\ \overset{+}{X}_j=\overset{0}{X}_K\,\nabla^k\,\overset{+}{u}_j \tag{2.5}$$

а в случае “мертвой” нагрузки

$$\overset{+}{P}_j=\overset{+}{X}_j=0 \tag{2.6}$$

Если на части поверхности тела Σ_U заданы перемещения, то граничные условия принимают вид

$$\overset{+}{u}_j=0 \tag{2.7}$$

Для компонент тензора деформаций имеют место формулы Коши

$$2\overset{+}{\varepsilon}_{jk}=\nabla_k\,\overset{+}{u}_j+\nabla_j\,\overset{+}{u}_k,\quad 2\overset{0}{\varepsilon}_{jk}=\nabla_k\,\overset{0}{u}_j+\nabla_j\,\overset{0}{u}_k \tag{2.8}$$

Соотношение (1.2) в этом случае запишется

$$\overset{+}{\sigma}{}^{\alpha}_{ij} = \lambda_\alpha \overset{+}{\varepsilon}{}^{e\alpha}_{nn} + 2\mu_\alpha \overset{+}{\varepsilon}{}^{e\alpha}_{ij}, \quad \Sigma\alpha = 1,2,\ldots,L \tag{2.9}$$

Для полных деформаций из (1.3) следует:

$$\overset{+}{\varepsilon}_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{L} \overset{+}{\varepsilon}{}^{\alpha}_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{L} (\overset{+}{\varepsilon}{}^{e\alpha}_{ij} + \overset{+}{\varepsilon}{}^{p\alpha}_{ij}) \tag{2.10}$$

Условие пластической несжимаемости таково:

$$\overset{+}{\varepsilon}{}^{p\alpha}_{nn} = 0, \quad (\alpha = 1,2\ldots L) \tag{2.11}$$

Для несжимаемого упрочняющегося EVP обобщенного S_p^α тела линеаризированные условия пластичности (1.7) и ассоциированный закон течения (1.6) принимают, соответственно, вид

$$\begin{aligned} &\left(\overset{0}{S}{}^k_j - c_\alpha \overset{0}{\varepsilon}{}^{p\alpha k}_j - \eta_\alpha \overset{0}{e}{}^{p\alpha}_{ij}\right)\left(\overset{+}{S}{}^k_j - c_\alpha \overset{+}{\varepsilon}{}^{p\alpha k}_j - \eta_\alpha \overset{+}{e}{}^{p\alpha}_{ij}\right) = 0, \\ &\overset{+}{e}{}^{p\alpha k}_j = \overset{0}{\psi}_\alpha \left(\overset{+}{S}{}^k_j - c_\alpha \overset{+}{\varepsilon}{}^{p\alpha k}_j - \eta_\alpha \overset{+}{e}{}^{p\alpha}_{ij}\right) + \overset{+}{\psi}_\alpha \left(\overset{0}{S}{}^k_j - c_\alpha \overset{0}{\varepsilon}{}^{p\alpha k}_j - \eta_\alpha \overset{0}{e}{}^{p\alpha}_{ij}\right), \end{aligned} \quad \alpha = 1,2,\ldots,L \tag{2.12}$$

Исключая из соотношений (2.10) вариации упругих $\overset{+}{\varepsilon}{}^{e\alpha}_k$, а также пластических $\overset{+}{\varepsilon}{}^{p\alpha}_k$ деформаций и величины $\overset{+}{\psi}_\alpha$ получим

$$\begin{aligned} &\left(2\mu_\alpha \overset{+}{\sigma}{}^{ij} - \frac{2}{3}\mu_\alpha (3\lambda_\alpha + 2\mu_\alpha)\overset{+}{\varepsilon}{}^{\alpha k}_k g^{ij} - c_\alpha\left(\lambda_\alpha \overset{+}{\varepsilon}{}^{\alpha k}_k g^{ij} + 2\mu_\alpha g^{ik} g^{jl} \overset{+}{\varepsilon}{}^{\alpha}_{kl} - \overset{+}{\sigma}{}^{ij}\right) - \right. \\ &\left. - \eta_\alpha \left(\lambda_\alpha \overset{+}{\dot{\varepsilon}}{}^{\alpha k}_k g^{ij} + 2\mu_\alpha g^{ik} g^{jl} \overset{+}{\dot{\varepsilon}}{}^{\alpha}_{kl} - \overset{+}{\dot{\sigma}}{}^{ij}\right)\right)\left(\overset{0}{S}_{ij} - c_\alpha \overset{0}{\varepsilon}{}^{p\alpha} - \eta_\alpha \overset{0}{e}{}^{p\alpha}_{ij}\right) = 0, \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned} &(1 + 2\eta_\alpha \overset{0}{\psi}_\alpha)\left(\lambda_\alpha \overset{+}{\dot{\varepsilon}}{}^{\alpha k}_k g^{ij} + 2\mu_\alpha g^{ik} g^{jl} \overset{+}{\dot{\varepsilon}}{}^{\alpha}_{kl} - \overset{+}{\dot{\sigma}}{}^{ij}\right) + 2c_\alpha \overset{0}{\psi}_\alpha \left(\lambda_\alpha \overset{+}{\varepsilon}{}^{\alpha k}_k g^{ij} + \right. \\ &\left. + 2\mu_\alpha g^{ik} g^{jl} \overset{+}{\varepsilon}{}^{\alpha}_{kl} - \overset{+}{\sigma}{}^{ij}\right) = k_\alpha^{-2}\left(\lambda_\alpha \overset{+}{\dot{\varepsilon}}{}^{\alpha n}_n g^{kl} + 2\mu_\alpha g^{nk} g^{ml} \overset{+}{\dot{\varepsilon}}{}^{\alpha}_{nm} - \overset{+}{\dot{\sigma}}{}^{kl}\right) \times \\ &\times \left(\overset{0}{S}_{kl} - c_\alpha \overset{0}{\varepsilon}_{kl}{}^{p\alpha} - \eta_\alpha \overset{0}{e}{}^{p\alpha}_{kl}\right)\left(\overset{0}{S}{}^{ij} - c_\alpha \overset{0}{\varepsilon}{}^{p\alpha ij} - \eta_\alpha \overset{0}{e}{}^{p\alpha}_{kl}\right) + \\ &+ 2\overset{0}{\psi}_\alpha \left(2\mu_\alpha \overset{+}{\sigma}{}^{ij} - \frac{2}{3}\mu_\alpha (3\lambda_\alpha + 2\mu_\alpha)\overset{+}{\varepsilon}{}^{\alpha k}_k g^{ij}\right), \quad \alpha = 1,2,\ldots,L \end{aligned} \tag{2.14}$$

Таким образом, линеаризованные уравнения состояния (2.13), (2.14) для обобщенного S_p^α тела совместно с соотношениями (2.8)–(2.10) и линеаризированными уравнениями второго варианта трехмерной теории устойчивости при малых деформациях (2.3) с краевыми условиями (2.4), (2.7) представляют собой замкнутую связную краевую задачу. Уравнения (2.3), (2.8), (2.10), (2.13), (2.14), описывающие возмущенное состояние обобщенной модели S_p^α произвольного порядка представляют собой сложную систему дифференциальных уравнений в частных производных с нестационарными коэффициентами. Поэтому практическое значение в решении проблем устойчивости неупругих сред получил приближенный подход [4], позволяющий исследование устойчивости основного состояния производить по предельной системе уравнений.

Устремляя время t к бесконечности, и учитывая, что при этом $\overset{0}{\dot\varepsilon}{}_{ij}^{p\alpha}\xrightarrow[t\to\infty]{}0$, $\overset{0}{\psi}_\alpha\xrightarrow[t\to\infty]{}0$, $(\alpha=1,2\ldots L)$ получаем предельную систему уравнений.

Уравнения равновесия таковы:

$$\nabla_s\left(\overset{+}{\sigma}{}_j^s+\overset{0}{\sigma}{}_k^s\,\nabla^k\,\overset{+}{u}_j\right)+\overset{+}{X}_j-\rho\,\overset{+}{\ddot u}_j=0 \tag{2.15}$$

Уравнения состояния принимают вид

$$\begin{gathered}\Bigg(2\mu_\alpha\,\overset{+}{\sigma}{}^{ij}-\frac{2}{3}\mu_\alpha\,(3\lambda_\alpha+2\mu_\alpha)\,\overset{+}{\varepsilon}{}_k^{\alpha k}\,g^{ij}-c_\alpha\left(\lambda_\alpha\,\overset{+}{\varepsilon}{}_k^{\alpha k}\,g^{ij}+2\mu_\alpha g^{ik}g^{jl}\,\overset{+}{\varepsilon}{}_{kl}^{\alpha}-\overset{+}{\sigma}{}^{ij}\right)-\\ -\eta_\alpha\left(\lambda_\alpha\,\overset{+}{\dot\varepsilon}{}_k^{\alpha k}\,g^{ij}+2\mu_\alpha g^{ik}g^{jl}\,\overset{+}{\dot\varepsilon}{}_{kl}^{\alpha}-\overset{+}{\dot\sigma}{}^{ij}\right)\Bigg)\left(\overset{0}{S}_{ij}-c_\alpha\,\overset{0}{\varepsilon}_{ij}{}^{p\alpha}\right)=0\\ \lambda_\alpha\,\overset{+}{\varepsilon}{}_k^{\alpha k}\,g^{ij}+2\mu_\alpha g^{ik}g^{jl}\,\overset{+}{\varepsilon}{}_{kl}^{\alpha}-\overset{+}{\sigma}{}^{ij}=k^{-2}\left(\lambda_\alpha\,\overset{+}{\varepsilon}{}_n^{\alpha n}\,g^{kl}+2\mu_\alpha g^{nk}g^{ml}\,\overset{+}{\varepsilon}{}_{nm}^{\alpha}-\overset{+}{\sigma}{}^{kl}\right)\times\\ \times\left(\overset{0}{S}_{kl}-c_\alpha\,\overset{0}{\varepsilon}_{kl}{}^{p\alpha}\right)\left(\overset{0}{S}{}^{ij}-c_\alpha\,\overset{0}{\varepsilon}{}^{p\alpha ij}\right),\quad \overset{+}{\varepsilon}_{ij}=\overset{+}{\varepsilon}{}_{ij}^{1}+\overset{+}{\varepsilon}{}_{ij}^{2}+\ldots,\quad \alpha=1,2,\ldots,L\end{gathered} \tag{2.16}$$

При этом вариации компонент тензора деформации связаны с вариациями компонент вектора перемещений формулами Коши (2.8).

Краевые условия на загруженной поверхности тела Σ_P таковы

$$N_s\left(\overset{+}{\sigma}{}_j^s+\overset{0}{\sigma}{}_k^s\,\nabla^k\,\overset{+}{u}_j\right)=\overset{+}{P}_j \tag{2.17}$$

3. Общее решение трехмерных уравнений устойчивости для однородных основных состояний смеси. Рассмотрим краевую задачу (2.15)–(2.17), (2.8). Выкладки проведем в декартовых координатах. Решение этих уравнений будем искать в виде

$$\overset{+}{u}_i(x_k,t)=u_j(x_k)\,e^{st},\quad \overset{+}{\varepsilon}{}_{ij}^{\alpha}(x_k,t)=\varepsilon_{ij}^{\alpha}(x_k)\,e^{st},\quad \overset{+}{\sigma}_{ij}(x_k,t)=\sigma_{ij}(x_k)\,e^{st} \tag{3.1}$$

то есть в компонентах векторов и тензоров, характеризующих возмущения выделим временной множитель e^{st} ($s=i\omega$ – комплексная величина), и для амплитудных величин оставим прежние обозначения, опустив значок плюс.

Подставляя решения (3.1) в уравнение (2.15) получим

$$\left(\sigma_{ij}+\overset{0}{\sigma}_{jk}\,u_{i,k}\right)+X_i+\rho\omega^2u_i=0 \tag{3.2}$$

Из соотношений (2.16) получаем

$$\sum_{\alpha=1}^{L}\frac{1}{2\mu_\alpha}\sigma_{ij} = \varepsilon_{ij} + \sum_{\alpha=1}^{L}\frac{b_\alpha^0}{(1-3b_\alpha^0)}\varepsilon_{nn}\delta_{ij} + \sum_{\alpha=1}^{L}\frac{a_\alpha^0}{(1-a_\alpha^0 k_\alpha^2)}\varepsilon_{kl}\overset{0}{f}{}_{kl}^{\alpha}\overset{0}{f}{}_{ij}^{\alpha} \tag{3.3}$$

где введены следующие обозначения:

$$a_\alpha^0 = \frac{\hat{a}_\alpha}{k_\alpha^2\hat{a}_\alpha - 2\mu_\alpha}, \quad b_\alpha^0 = \frac{\lambda_\alpha}{3\lambda_\alpha + 2\mu_\alpha}, \quad \hat{a}_\alpha = \frac{4\mu_\alpha^2}{k_\alpha^2(2\mu_\alpha + c_\alpha + s\eta_\alpha)}, \quad \Sigma\alpha = 1, 2, \ldots, L \tag{3.4}$$

Соотношения (3.3) можно трактовать как зависимость между напряженным и деформируемым состоянием в упругой среде (смеси) с комплексными модулями упругости.

Связь между амплитудными величинами деформаций и перемещений, а также граничные условия на поверхности Σ_P среды, согласно (3.1), (2.8) и (2.7) представима в виде

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{i,i} \tag{3.5}$$

$$\left(\sigma_{ij} + \overset{0}{\sigma}_{jk}u_{i,k}\right)n_j = P_i \tag{3.6}$$

Таким образом, в рамках принятой механической модели EVP смеси исследование устойчивости докритического состояния смеси сведено к исследованию устойчивости анизотропного континуума с комплексными физико-механическими параметрами.

Пусть начальное состояние является однородным. Под однородным состоянием понимается такой вид деформирования, при котором плотность постоянна в частице и одинакова для всех частиц, а напряженно-деформируемое состояние EVP смеси определяется соотношениями:

$$\overset{0}{\sigma}_{11} = \overset{0}{\sigma}_{22} = -q, \quad \overset{0}{\sigma}_{33} = -p; \quad \sigma_{ij} = 0, \quad i \neq j$$
$$\overset{0}{\varepsilon}_{11} = \overset{0}{\varepsilon}{}^1_{11} + \overset{0}{\varepsilon}{}^2_{22} + \ldots = \sum_{\alpha=1}^{L}\left(\overset{0}{\varepsilon}{}^e_{11\alpha} + \overset{0}{\varepsilon}{}^p_{22\alpha}\right) = \overset{0}{\varepsilon}_{22} = -0.5\overset{0}{\varepsilon}_{33} = \sum_{\alpha=1}^{L}\left(\overset{0}{S}c_\alpha^{-1} + \frac{p-q}{6\mu_\alpha}\right) \tag{3.7}$$
$$\overset{0}{S} = \frac{1}{3}(p - q - k_\alpha\sqrt{1,5})$$

Здесь трехмерное тело сжато вдоль оси Ox_3 усилиями интенсивности p и вдоль осей Ox_1 и Ox_2 усилиями интенсивности q.

Линеаризированные уравнения движения (3.2) в этом случае представимы в виде:

$$\left[\sigma_{ij} - q(\delta_{j1}u_{i,1} + \delta_{j2}u_{i,2}) - p\delta_{j3}u_{i,3}\right]_{,j} - \rho s^2 u_i = 0; X_i = 0 \tag{3.8}$$

Граничные условия (3.6) принимают вид:

$$\left[\sigma_{ij} - q\left(\delta_{j1}u_{i,1} + \delta_{j2}u_{i,2}\right) - p\delta_{j3}u_{i,3}\right]n_j = P_i \tag{3.9}$$

Линеаризованная связь (3.3) между амплитудными величинами напряжений и деформаций для сжимаемых EVP смесей для основного состояния определяемого соотношениями (3.7), в том числе в случаях зависимости компонент напряжений, деформаций и перемещений основного состояния от одной переменной может быть представлена в форме:

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij}a_{jk}u_{k,k} + (1-\delta_{ij})G_{ij}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right), \sum_{1}^{3}k \tag{3.10}$$

где

$$
\begin{gathered}
a_{jk} = \left(\delta_{jk} + B_{jj} + A_{jj}\right) A^{-1}, \quad G_{ij} = \frac{1}{2} A^{-1} = G, \quad A = \sum_{\alpha=1}^{L} \frac{1}{2\mu_\alpha} \\
A_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{L} \frac{b_\alpha^0}{(1 - 3b_\alpha^0)} \delta_{ij}, \quad B_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{L} \frac{a_\alpha^0}{(1 - a_\alpha^0 k_\alpha^2)} \overset{0}{f}{}_{kk}^{\alpha} \overset{0}{f}{}_{ij}^{\alpha}, \not{\Sigma} k
\end{gathered}
\tag{3.11}
$$

При $\hat{a}_\alpha = 0$, $a_\alpha^0 = 0$ получаем коэффициенты a_{jk} и G_{ij} для сжимаемой упругой смеси [4]

$$
a_{jk} = \left(\delta_{jk} + A_{jj}\right) A^{-1}, \quad G_{ij} = \frac{1}{2} A^{-1} = G \tag{3.12}
$$

Такая форма представления линеаризованных уравнений состояния для представленной здесь модели (3.10) позволяет построить согласно [12], решение уравнений трехмерной теории устойчивости в форме (3.8), аналогично приведенным для упругих, вязкоупругих и пластических тел [3–8, 11].

Подстановка выражений (3.10) в уравнение (3.8) приводит к системе уравнений в амплитудах перемещений:

$$
L_{ij} u_j = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{3.13}
$$

Дифференциальные операторы имеют вид:

$$
\begin{gathered}
L_{ij} = \delta_{ij} \left(M_{in} \frac{\partial^2}{\partial x_n{}^2} - \rho s^2 \right) + \left(1 - \delta_{ij}\right) F_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}, (\Sigma\, n) \\
F_{ij} = a_{ij} + G_{ij}, M_{in} = \begin{cases} a_{ii} - q\left(\delta_{in} + \delta_{2n}\right) - p\delta_{3n}, & (i = n) \\ G_{in} - q\left(\delta_{in} + \delta_{2n}\right) - p\delta_{3n}, & (i \neq n) \end{cases}
\end{gathered}
\tag{3.14}
$$

Проделав выкладки, аналогичные выполненным в работах [3, 11] получаем общее решение системы (3.13), (3.14) в форме, совпадающей с приведенной в [4, 6].

$$
\begin{gathered}
u_1 = \frac{\partial}{\partial x_2} \psi_1 - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} \psi, \quad u_2 = -\frac{\partial}{\partial x_1} \psi_1 - \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} \psi \\
u_3 = \frac{a_{11} - q}{G + a_{31}} \left(\Delta + \frac{G - p}{a_{11} - q} \frac{\partial^2}{\partial x_3{}^2} - \frac{\rho s^2}{a_{11} - q} \right) \psi
\end{gathered}
\tag{3.15}
$$

Функции ψ и ψ_1 являются решениями уравнений:

$$
\begin{gathered}
\left(\Delta + \frac{G - p}{G - q} \frac{\partial^2}{\partial x_3{}^2} - \frac{\rho s^2}{G - q} \right) \psi_1 = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2{}^2} \\
\left[\left(\Delta + \frac{G - p}{a_{11} - q} \frac{\partial^2}{\partial x_3{}^2} - \frac{\rho s^2}{a_{11} - q} \right) \left(\Delta + \frac{a_{33} - p}{G - q} \frac{\partial^2}{\partial x_3{}^2} - \frac{\rho s^2}{G - q} \right) - \right. \\
\left. - \frac{(G + a_{13})(G + a_{31})}{(a_{11} - q)(G - q)} \Delta \frac{\partial^2}{\partial x_3{}^2} \right] \psi = 0
\end{gathered}
\tag{3.16}
$$

После подстановки решения (3.15) уравнений устойчивости в граничные условия (3.9) получаем характеристические уравнения относительно s. Критические значения величины p и q находятся из условия:

$$
\max\left\{ \operatorname{Re} s_k \right\} = 0 \tag{3.17}
$$

Так как, представленные решения имеют формулу, совпадающую с приведенной [4, 6] для EVP тел, следовательно и характеристические определители полученные для класса EVP задач в [4, 6] остаются в силе и для EVP смесей любого порядка. В окончательном результате лишь необходимо подставить значение a_{jk} и G_{jk} определенных формулами (3.11).

Здесь ограничимся квазистатической постановкой задачи о неустойчивости свободной поверхности смеси произвольного порядка при сжатии (явления – skin effect; Biot M.A [14]).

Ненулевые компоненты напряженно-деформированного состояния до потери устойчивости определяются соотношениями (3.7), где $q = 0$.

Опуская промежуточные выкладки, которые аналогичны приведенным в [4], получаем характеристическое уравнение в виде:

$$\begin{gathered}\{a_{23}\left(G + a_{32}\right) + a_{22}(G\xi_1^2 - (a_{33} - p))\}(a_{33} - p + a_{32}\xi_2^2) - \\ - \{a_{23}((G + a_{32})) + a_{22}(G\xi_2^2 - (a_{33} - p))\}(a_{33} - p + a_{32}\xi_1^2) = 0\end{gathered} \tag{3.18}$$

Здесь коэффициенты a_{jk} определяются выражениями (3.11), где $q = 0$, а ξ_i $(i = 1, 2)$ удовлетворяют уравнению:

$$\begin{gathered}\xi_{1,2}^2 = \frac{B}{2C} \pm \sqrt{\left(\frac{B}{2C}\right)^2 - \frac{D}{C}}, \\ B = G\left(G - p\right) + a_{22}\left(a_{22} - p\right) - \left(G + a_{23}\right)\left(G + a_{32}\right) \\ C = Ga_{22}, \quad D = (a_{22} - p)(G - p)\end{gathered} \tag{3.19}$$

Критическое значение величины p находится из этого уравнения в рамках алгоритма численной реализации определения корня, при условии (3.17).

Отметим, если обобщенная модель EVP смеси имеет первый порядок, т.е. $S_p^{\alpha} = S_p^1$, то в этом случае следуют результаты работы [4] для EVP тела.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гузь А.Н., Спорыхин А.Н.* Трехмерная теория неупругой устойчивости. Общие вопросы // Прикл. механика. 1982. Т. 18. № 7. С. 3–22.
2. *Гузь А.Н., Спорыхин А.Н.* Трехмерная теория неупругой устойчивости. Конкретные результаты // Прикл. механика. 1982. Т. 18. № 8. С. 3–27.
3. *Гузь А.Н.* Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. Киев: Вища школа, 1986. 512 с.
4. *Спорыхин А.Н.* Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред. Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 1997. 361 с.
5. *Гузь А.Н.* Основы теории устойчивости горных выработок. Киев: Наукова Думка, 1977. 204 с.
6. *Спорыхин А.Н., Шашкин А.И.* Устойчивость равновесия пространственных тел и задачи механики горных пород. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 232 с.
7. *Спорыхин А.Н., Гоцев Д.В.* Метод возмущений в задачах устойчивости подкрепленных горных выработок // Издательско-полиграфический центр. Воронеж. госунивер., 2010. 298 с.
8. *Спорыхин А.Н.* Неконсервативные задачи трехмерной теории неупругой устойчивости в геомеханике. Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2015. 372 с.
9. *Рейнер М.* Реология. М.: Наука, 1965. 223 с.
10. *Ивлев Д.Д., Быковцев Т.И.* Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 231 с.
11. *Спорыхин А.Н.* Об устойчивости деформирования упруговязкопластических тел // ПМТФ. 1967. № 4. С. 52–58.
12. *Спорыхин А.Н.* Об одной модели упруговязкопластических смесей. Сборник трудов IX Всероссийской конференции. Воронеж. 2016. С. 199–201.
13. *Лурье А.И.* К теории систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами // Тр. Ленингр. индустр. ин-та. 1937. Т. 3. № 6. С. 31–36.
14. *Biot M.A.* Mechanics of jocremehtal deformation. N.-Y.: John Willey and Sons. 1965. P. 506.