ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2020,
№ 6, с. 24–32

УДК 539.374

О ФАКТОРИЗАЦИИ ОСНОВНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА МИКРОПОЛЯРНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

© 2020 г. Ю. Н. Радаев*,**

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
**E-mail: radayev@ipmnet.ru*
***E-mail: y.radayev@gmail.com*

Поступила в редакцию 08.05.2020 г.
После доработки 15.05.2020 г.
Принята к публикации 04.06.2020 г.

В статье рассматриваются динамические уравнения линейной микрополярной теории упругости. Они являются связанными по отношению к векторным полям перемещений и микровращений. Связанные уравнения получаются также для вихревых векторных потенциалов перемещений и микровращений. С помощью условий калибровки (или без них) удается сформулировать несвязанные уравнения, включающие один и тот же основной дифференциальный оператор. Указаны условия гиперболичности основного оператора и условие, связывающие определяющие постоянные, которые обеспечивает его факторизуемость, т.е. представление в виде произведения более простых перестановочных друг с другом дифференциальных операторов. Выполнено фактическое построение операторных сомножителей в факторизованной форме.

Ключевые слова: микрополярная теория упругости, вектор перемещения, вектор микровращения, связанный, векторный потенциал, дифференциальный оператор, гиперболическая форма, факторизация

DOI: 10.31857/S0572329920060136

1. Предварительные сведения и вводные замечания. Большинство современных материалов имеют неоднородную структуру, либо микроструктуру. Это утверждение справедливо, в частности, для волокнистых композитов, полимеров, сотовых и клеточных агрегатов, спиновых и дипольных стекол, жидких кристаллов. Подобные материалы проявляют масштабный эффект (size-effect), достаточно хорошо изученный в механике. Ясно, что в математических теориях механики деформируемого твердого тела микроструктура должна быть представлена именно в том пространственном масштабе (scale), который характерен для исследуемого тела. Иногда (в случае весьма умеренных пространственных масштабных характеристик) достаточным оказывается классическое континуальное приближение, систематически применяемое в теории упругости (см, например, [1]). В других случаях (когда масштаб, характеризующий микроструктуру, сравнительно велик) такого приближения попросту оказывается недостаточно. Такое положение дел имеет место для неплотно связанных сыпучих и гранулированных сред, волокнистых материалов и сотовых конструкций. Исторически первой моделью, которая учитывала наличие характерного пространственного масштаба, выступила микрополярная теория упругости, предложенная Коссера в 1909 г. [2]. В линейной изотропной теории Коссера среди шести определяющих постоянных присутствует одна, имеющая физическую размерность длины. В гемитропной микрополярной упругости получается 9 определяющих констант; на три больше, чем в изотропном случае. Значительные проблемы возникают в теориях анизотропных микрополярных тел, поскольку резко возрастает число определяющих постоянных. В наиболее общем случае всего будет 171 материальная постоянная. Очевидно, что оперирование с уравнениями для анизотропных микрополярных тел вызывает существенные трудности.

Целью представляемой работы является исследование связанной системы дифференциальных уравнений линейной микрополярной теории изотропного упругого тела в динамическом случае. Их изучение и преобразование с помощью динамических потенциалов приводит к различным дифференциальным операторам. Наиболее интересен из них тот, который обеспечивает переход от связанных уравнений к несвязанным.

После вводной части в статье приводятся (раздел 2) различные аналитические формы связанной системы дифференциальных уравнений линейной микрополярной теории упругости, сформулированной относительно векторов перемещений и микровращений. Рассматриваются два варианта выбора определяющих постоянных. Вводятся формальные переменные (трехмерный лапласиан и оператор двукратного дифференцирования по времени), их степени и линейные комбинации.

Затем, в третьем разделе, перемещения и микровращения представляются в виде сумм потенциальных и вихревых составляющих (разложения Гельмгольца). Устанавливается, что скалярные потенциалы удовлетворяют несвязанным дифференциальным уравнениям, в то время как векторные — системе связанных векторных дифференциальных уравнений. Интересно отметить, что указанная связанная система сохраняет свой вид независимо от использования того или иного условия калибровки. Связанная система далее приводится к двум несвязанным дифференциальным уравнениям относительно вихревых векторных потенциалов. Дифференциальные операторы в обоих уравнениях оказываются одинаковыми, что позволяет вести речь об одном основном дифференциальном операторе линейной микрополярной теории упругости. В результате может быть поставлена задача о его расщеплении в композицию более простых операторов.

В четвертом разделе решается задача о факторизации основного дифференциального оператора, поставленная в предыдущем разделе. С этой целью он сначала представляется в виде символической формы второго порядка. Опираясь на теорию рациональных алгебраических инвариантов, выполняется классификация формы: она оказывается гиперболической (за исключением только одного весьма частного случая). Далее находится условие факторизуемости формы второго порядка. Факторизуемость будет возможна только при выполнении весьма простого соотношения между определяющими постоянными. Завершается работа фактическим построением факторизованной формы основного дифференциального оператора линейной микрополярной теории упругости.

2. Дифференциальные уравнения линейной теории микрополярной упругости. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений линейной микрополярной теории упругости [3]:

$$
\begin{gathered}
G[(1+c_1)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} + (1-c_1+2\nu(1-2\nu)^{-1})\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} + 2c_1\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\phi}] = \rho(\partial_.)^2\mathbf{u} \\
GL^2[(1+c_2)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\phi} + (1-c_2+2c_3)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\phi}] - 2Gc_1(2\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u}) = \Im(\partial_.)^2\boldsymbol{\phi}
\end{gathered}
\tag{2.1}
$$

где ρ — плотность; $\Im$ — коэффициент микроинерции; $\mathbf{u}$ — вектор перемещения; $\boldsymbol{\phi}$ — вектор микровращения; G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона; L — характерная длина микрополярной теории упругости; c_1, c_2, c_3 — физически безразмерные определяющие постоянные; $\boldsymbol{\nabla}$ — трехмерный оператор Гамильтона; $\partial_.$ — частное дифференцирование по времени. Связанная система дифференциальных уравнений в частных производных (2.1) за счет выбора определяющих постоянных выглядит как наиболее приемлемая с физической точки зрения запись уравнений микрополярной теории упругости. Однако она не получила широкого распространения, по сравнению, например, с формулировкой [4, 5].

Система уравнений (2.1) координатной форме (примем, что в пространстве выбрана некоторая криволинейная координатная сетка) будет иметь вид:

$$G[(1+c_1)g^{sj}\nabla_s\nabla_j u^i + (1-c_1+2\nu(1-2\nu)^{-1})g^{is}\nabla_s\nabla_k u^k + 2c_1 e^{ikl}\nabla_k\phi_l] = \rho(\partial_.)^2 u^i$$
$$GL^2[(1+c_2)g^{sj}\nabla_s\nabla_j\phi_i + (1-c_2+2c_3)\nabla_i\nabla_k\phi^k] - 2Gc_1(2\phi_i - e_{ikl}g^{ks}\nabla_s u^l) = \Im(\partial_.)^2\phi_i$$

где g_{sj} — метрический тензор, ∇_s — оператор ковариантного дифференцирования относительно метрики g_{sj}, e_{ikl} — кососимметричный тензор.

Введем новые определяющие постоянные α, β, γ, λ, μ, ε согласно

$$G = \mu, \quad \frac{2\nu}{1-2\nu} = \frac{\lambda}{\mu}, \quad GL^2 = \gamma$$
$$c_1 = \frac{\alpha}{\mu}, \quad c_2 = \frac{\varepsilon}{\gamma}, \quad c_3 = \frac{\beta}{2\gamma}$$

Заметим, что они систематически используются в монографиях [4, 5] и множестве других публикаций, посвященных линейной микрополярной теории упругости изотропного тела.

В результате перехода к другому набору определяющих постоянных система связанных динамических уравнений линейной микрополярной теории упругости (2.1) преобразуется к следующей форме:

$$\begin{aligned}(\mu+\alpha)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} + (\mu-\alpha+\lambda)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} + 2\alpha\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\phi} &= \rho(\partial_.)^2\mathbf{u}\\ (\gamma+\varepsilon)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\phi} + (\gamma-\varepsilon+\beta)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\phi} - 2\alpha(2\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u}) &= \Im(\partial_.)^2\boldsymbol{\phi}\end{aligned} \tag{2.2}$$

отметим также еще одно эквивалентное представление

$$\begin{aligned}(\lambda+2\mu)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} - (\mu+\alpha)\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u}) + 2\alpha\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\phi} &= \rho(\partial_.)^2\mathbf{u}\\ (\beta+2\gamma)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\phi} - (\gamma+\varepsilon)\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\phi}) - 2\alpha(2\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u}) &= \Im(\partial_.)^2\boldsymbol{\phi}\end{aligned} \tag{2.3}$$

Во всем дальнейшем изложении дифференциальные операторы $\Delta = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla} = g^{sk}\nabla_s\nabla_k$ и $\partial_.$ будут рассматриваться и как формальные символы, для которых естественным образом определены их степени (как повторные действия операторов) и линейные комбинации, интерпретация которых также не вызывает никаких трудностей. Так, например, квадрат оператора $\partial_.$ есть его повторное применение

$$(\partial_.)^2 = \partial_.\partial_. = \partial_{..}$$

3. Основной дифференциальный оператор динамической микрополярной теории упругости. Воспользуемся разложениями Гельмгольца для векторов перемещений и микровращений

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \boldsymbol{\nabla}\Phi + \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\Psi}\\ \boldsymbol{\phi} &= \boldsymbol{\nabla}\Sigma + \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H}\end{aligned} \tag{3.1}$$

которые представляют указанные векторные поля с помощью скалярных потенциалов Φ, Σ и векторных потенциалов $\boldsymbol{\Psi}$, $\mathbf{H}$. К ним можно присоединять (а можно и не присоединять) различные калибровочные условия. В частности, стандартными принято считать условия, фиксирующие нулевую расходимость векторных потенциалов

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{H} = \mathbf{0} \tag{3.2}$$

Дифференциальные уравнения для скалярных потенциалов Φ, Σ не связанны между собой и поэтому рассматриваются как два независимых уравнения

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c_{\|}^{2}}(\partial_{.})^{2}\Phi = 0$$

$$\Delta\Sigma - \frac{1}{{}_{\mu}c_{\|}^{2}}(\partial_{.})^{2}\Sigma - \frac{\Omega^{2}}{{}_{\mu}c_{\|}^{2}}\Sigma = 0$$

Здесь постоянные $c_{\|}^{2}$, ${}_{\mu}c_{\|}^{2}$ и Ω^2 определяются согласно

$$c_{\|}^{2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad {}_{\mu}c_{\|}^{2} = \frac{\beta + 2\gamma}{\mathfrak{I}}, \quad \Omega^{2} = \frac{4\alpha}{\mathfrak{I}}$$

Для векторных потенциалов **Ψ**, **H** имеется два связанных между собой векторных дифференциальных уравнения

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}_{\perp}\boldsymbol{\Psi} + 2d_{\perp}^{2}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H} = \mathbf{0} \\ &\mathcal{B}_{\perp}\mathbf{H} + \frac{\Omega^{2}}{2\,{}_{\mu}^{\prime\prime}c_{\perp}^{2}}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Поясним смысл новых символов, которые были использованы при записи системы уравнений. Во-первых, были введены постоянные

$$d_{\perp}^{2} = \frac{{}^{\prime}c_{\perp}^{2}}{{}^{\prime\prime}c_{\perp}^{2}}, \quad {}^{\prime}c_{\perp}^{2} = \frac{\alpha}{\rho}, \quad {}^{\prime\prime}c_{\perp}^{2} = \frac{\mu + \alpha}{\rho}, \quad {}_{\mu}^{\prime\prime}c_{\perp}^{2} = \frac{\gamma + \varepsilon}{\mathfrak{I}} \tag{3.4}$$

и, кроме того, – два дифференциальных оператора второго порядка

$$\mathcal{A}_{\perp} = \Delta - \frac{1}{{}^{\prime\prime}c_{\perp}^{2}}(\partial_{.})^{2}, \quad \mathcal{B}_{\perp} = \Delta - \frac{1}{{}_{\mu}^{\prime\prime}c_{\perp}^{2}}(\partial_{.})^{2} - \frac{\Omega^{2}}{{}_{\mu}^{\prime\prime}c_{\perp}^{2}} \tag{3.5}$$

Заметим, что связанная система (3.3) сохраняет свой вид независимо от использования того или иного условия калибровки. В частности, можно вообще отказаться от калибровочного условия (3.2).

Из связанной системы уравнений (3.3), тем не менее, удается получить два *несвязанных* уравнения для векторных потенциалов

$$\begin{aligned} &\mathcal{B}_{\perp}\mathcal{A}_{\perp}\boldsymbol{\Psi} + d_{\perp}^{2}\frac{\Omega^{2}}{{}_{\mu}^{\prime\prime}c_{\perp}^{2}}\Delta\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{0} \\ &\mathcal{A}_{\perp}\mathcal{B}_{\perp}\mathbf{H} + d_{\perp}^{2}\frac{\Omega^{2}}{{}_{\mu}^{\prime\prime}c_{\perp}^{2}}\Delta\mathbf{H} = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Заметим, что дифференциальные операторы $\mathcal{A}_{\perp}$, $\mathcal{B}_{\perp}$ перестановочны, следовательно, достаточно рассмотреть лишь оператор

$$\mathcal{D} = \mathcal{A}_{\perp}\mathcal{B}_{\perp} + d_{\perp}^{2}\frac{\Omega^{2}}{{}_{\mu}^{\prime\prime}c_{\perp}^{2}}\Delta \tag{3.7}$$

В итоге система дифференциальных уравнений для динамических векторных потенциалов (3.6) компактно может быть представлена в следующем виде:

$$\mathcal{D}\begin{pmatrix}\mathbf{\Psi}\\ \mathbf{H}\end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{3.8}$$

Дифференциальный оператор $\mathcal{D}$, фигурирующий в несвязанной системе дифференциальных уравнений, которым должны подчиняться динамические векторные потенциалы, для краткости будем называть *основным* и исследуем его на возможность представления в факторизованной форме, т.е. в форме произведения двух более простых перестановочных друг с другом операторов

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_2\mathcal{D}_1 \tag{3.9}$$

4. Факторизация основного оператора. Представим прежде всего дифференциальный оператор $\mathcal{D}$ как стандартную форму второго порядка относительно формальных переменных Δ, $\partial_{\cdot\cdot}$:

$$\mathcal{D} = A\Delta^2 + 2B\Delta\partial_{\cdot\cdot} + C(\partial_{\cdot\cdot})^2 + 2D\Delta + 2E\partial_{\cdot\cdot} + F \tag{4.1}$$

с постоянными коэффициентами, которые как нетрудно заметить вычисляются в виде

$$A = 1,\quad 2B = -(a^2 + c^2),\quad C = a^2c^2,\quad 2D = \sigma^2 - b^2,\quad 2E = b^2c^2,\quad F = 0 \tag{4.2}$$

где, в свою очередь, постоянные a, b, c, σ находятся согласно

$$a^2 = \frac{1}{{}_{\mu}'' c_\perp^2},\quad b^2 = \frac{\Omega^2}{{}_{\mu}'' c_\perp^2},\quad c^2 = \frac{1}{'' c_\perp^2},\quad \sigma^2 = d_\perp^2\frac{\Omega^2}{{}_{\mu}'' c_\perp^2} \tag{4.3}$$

С формой (4.1) связаны три рациональных алгебраических инварианта [6]:

$$\begin{gathered}\delta_1 = A + C\\ \delta_2 = AC - B^2\\ \delta_3 = ACF + 2BED - D^2C - E^2A - B^2F\end{gathered} \tag{4.4}$$

Интерес для дальнейшего исследования представляют только второй и третий инварианты. Их вычисление не составляет никакого труда:

$$\begin{gathered}\delta_2 = -\frac{1}{4}(a^2 - c^2)^2\\ \delta_3 = -\frac{1}{4}c^2[b^2(a^2 + c^2)(\sigma^2 - b^2) + a^2(\sigma^2 - b^2)^2 + b^4c^2]\end{gathered} \tag{4.5}$$

Поскольку (при выполнении условия $a \neq c$)

$$\delta_2 < 0 \tag{4.6}$$

то форма (4.1) является гиперболической за упомянутым исключением, т.е. основной дифференциальный оператор $\mathcal{D}$ является гиперболическим.

Возможность факторизации оператора $\mathcal{D}$ зависит от того, будет ли присутствовать в канонической форме записи (4.1) ее неглавная часть. Последнее условие легко формализуется в виде равенства нулю третьего инварианта формы второго порядка (4.1):

$$\delta_3 = 0 \tag{4.7}$$

откуда на основании (4.5) приходим к заключению, что гиперболический дифференциальный оператор $\mathcal{D}$ факторизуем только при выполнении следующего условия:

$$b^2(a^2 + c^2)(\sigma^2 - b^2) + a^2(\sigma^2 - b^2)^2 + b^4c^2 = 0 \tag{4.8}$$

К счастью полученное только что условие может быть приведено к весьма простому соотношению между определяющими постоянными, если рассматривать его как квадратное уравнение относительно разности $\sigma^2 - b^2$:

$$a^2(\sigma^2 - b^2)^2 + b^2(a^2 + c^2)(\sigma^2 - b^2) + b^4c^2 = 0$$

Найдем сначала его корни. Дискриминант уравнения оказывается положительным, поэтому корни исследуемого квадратного уравнения вещественны и равны

$$\sigma^2 - b^2 = b^2\frac{-(a^2 + c^2) \pm (a^2 - c^2)}{2a^2}$$

т.е.

$$\sigma^2 - b^2 = -\frac{b^2c^2}{a^2}$$

$$\sigma^2 - b^2 = b^2$$

Второй корень физического смысла не имеет. Первый корень приводит к соотношению

$$'c_{\perp}^2 - ''c_{\perp}^2 = -''_{\mu}c_{\perp}^2$$

или в терминах определяющих постоянных –

$$\frac{\mu}{\rho} = \frac{\gamma + \varepsilon}{\Im} \tag{4.9}$$

Итак, можно констатировать, что факторизация основного дифференциального оператора $\mathscr{D}$ возможна только при выполнении условия (4.9). Явное построение декомпозиции (3.9) при этом требует фактического приведения формы второго порядка (4.1) к каноническому виду. Выполним указанное приведение, следуя хорошо известному из геометрии алгоритму.

Рассмотрим линейное преобразование поворота и одновременной трансляции пары символических переменных Δ, $\partial_{..}$, имеющее следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta &= \cos\omega\overline{\Delta} - \sin\omega\overline{\partial_{..}} + h \\ \partial_{..} &= \sin\omega\overline{\Delta} + \cos\omega\overline{\partial_{..}} + k \end{aligned} \tag{4.10}$$

В результате этого преобразования форма второго порядка (4.1) переходит в новую форму второго порядка относительно переменных $\overline{\Delta}$, $\overline{\partial_{..}}$

$$\mathscr{D} = \overline{A}\overline{\Delta}^2 + 2\overline{B}\overline{\Delta}\overline{\partial_{..}} + \overline{C}(\overline{\partial_{..}})^2 + 2\overline{D}\overline{\Delta} + 2\overline{E}\overline{\partial_{..}} + \overline{F} \tag{4.11}$$

с новыми коэффициентами $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$, $\overline{E}$, $\overline{F}$; как известно новые коэффициенты связываются со старыми с помощью следующих формул:

$$\begin{aligned} \overline{A} &= A\cos^2\omega + 2B\sin\omega\cos\omega + C\sin^2\omega \\ \overline{B} &= -A\sin\omega\cos\omega + B(\cos^2\omega - \sin^2\omega) + C\sin\omega\cos\omega \\ \overline{C} &= A\sin^2\omega - 2B\sin\omega\cos\omega + C\cos^2\omega \\ \overline{D} &= (Ah + Bk + D)\cos\omega + (Bh + Ck + E)\sin\omega \\ \overline{E} &= -(Ah + Bk + D)\sin\omega + (Bh + Ck + E)\cos\omega \\ \overline{F} &= Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 + 2Dh + 2Ek + F \end{aligned} \tag{4.12}$$

Угол ω подбирается так, чтобы коэффициент $\overline{B}$ в форме (4.11) оказывался равным нулю. Для этого достаточно положить

$$\operatorname{tg} 2\omega = \frac{2B}{A - C} = \frac{a^2 + c^2}{a^2c^2 - 1} \tag{4.13}$$

Далее подберем значения h, k таким образом, чтобы коэффициенты $\overline{D}$, $\overline{E}$ стали нулевыми, т.е.

$$\begin{aligned} Ah + Bk &= -D \\ Bh + Ck &= -E \end{aligned} \tag{4.14}$$

откуда сразу же находим

$$\begin{aligned} h &= \frac{2a^2c^2(\sigma^2 - b^2) + b^2c^2(a^2 + c^2)}{(a^2 - c^2)^2} \\ k &= \frac{(a^2 + c^2)(\sigma^2 - b^2) + 2b^2c^2}{(a^2 - c^2)^2} \end{aligned} \tag{4.15}$$

Подсчитаем оставшиеся (т.е. ненулевые) коэффициенты $\overline{A}$, $\overline{C}$ в форме (4.11):

$$\begin{aligned} \overline{A} &= 1 + a^2c^2 - \sin 2\omega[(a^2 + c^2) - (1 - a^2c^2)2\omega] \\ \overline{C} &= 1 + a^2c^2 + \sin 2\omega[(a^2 + c^2) - (1 - a^2c^2)2\omega] \end{aligned} \tag{4.16}$$

На основании (4.13) находим

$$\operatorname{ctg} 2\omega = \frac{a^2c^2 - 1}{a^2 + c^2} \tag{4.17}$$

откуда

$$\sin^2 2\omega = \frac{(a^2 + c^2)^2}{a^4 + c^4 + a^4c^4 + 1} \tag{4.18}$$

Из последнего уравнения значение $\sin 2\omega$ определяется с точностью до знака; выбирая для $\sin 2\omega$ отрицательное значение, имеем

$$\sin 2\omega = -\frac{a^2 + c^2}{\sqrt{(a^2 - c^2)^2 + (1 + a^2c^2)^2}} \tag{4.19}$$

В этом случае коэффициенты $\overline{A}$, $\overline{C}$ находятся (если воспользоваться формулами (4.16), (4.17), (4.19)) в следующем виде:

$$\begin{aligned} 2\overline{A} &= 1 + a^2c^2 + \sqrt{(1 + a^2c^2)^2 + (a^2 - c^2)^2} > 0 \\ 2\overline{C} &= 1 + a^2c^2 - \sqrt{(1 + a^2c^2)^2 + (a^2 - c^2)^2} < 0 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Ясно, что коэффициенты разных знаков в каноническом представлении формы второго порядка могут быть только в том случае, когда она гиперболична. Формулы (4.20) это наглядно демонстрируют, если при этом не забывать об условии гиперболичности

$$a \neq c$$

Следовательно, факторизованная форма основного дифференциального оператора будет записываться следующим образом:

$$\mathcal{D} = \overline{A}\,\overline{\Delta}^2 + \overline{C}(\overline{\partial_{\cdot\cdot}})^2 = \left(\overline{A}^{\frac{1}{2}}\overline{\Delta}\right)^2 - \left((-\overline{C})^{\frac{1}{2}}\overline{\partial_{\cdot\cdot}}\right)^2 = \left(\overline{A}^{\frac{1}{2}}\overline{\Delta} - (-\overline{C})^{\frac{1}{2}}\overline{\partial_{\cdot\cdot}}\right)\left(\overline{A}^{\frac{1}{2}}\overline{\Delta} + (-\overline{C})^{\frac{1}{2}}\overline{\partial_{\cdot\cdot}}\right) \tag{4.21}$$

т.е.

$$\mathcal{D}_1 = \overline{A}^{\frac{1}{2}}\overline{\Delta} - (-\overline{C})^{\frac{1}{2}}\overline{\partial_{\cdot\cdot}}, \quad \mathcal{D}_2 = \overline{A}^{\frac{1}{2}}\overline{\Delta} + (-\overline{C})^{\frac{1}{2}}\overline{\partial_{\cdot\cdot}} \tag{4.22}$$

Для правильной интерпретации факторизованной формы основного оператора (4.21) следует исходить из формул (4.10), точнее их необходимо сначала обратить. С этой целью представим (4.10) в виде матричного соотношения:

$$\begin{pmatrix} \Delta \\ \partial_{\cdot\cdot} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\Delta} \\ \overline{\partial_{\cdot\cdot}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \tag{4.23}$$

которое легко обращается

$$\begin{pmatrix} \overline{\Delta} \\ \overline{\partial_{\cdot\cdot}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega \\ -\sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta - h \\ \partial_{\cdot\cdot} - k \end{pmatrix} \tag{4.24}$$

Значения h, k были определены выше (см. формулу (4.15)). Однако их вычисление можно несколько упростить, если воспользоваться соотношением (4.9) между определяющими постоянными. Приведем соответствующий результат

$$\begin{aligned} h &= \frac{b^2c^2}{a^2 - c^2} \\ k &= \frac{1}{a^2}\frac{b^2c^2}{a^2 - c^2} \end{aligned} \tag{4.25}$$

Найдем значение угла ω, исходя из (4.19). Достаточно ограничиться значениями угла, расположенными в пределах

$$\frac{\pi}{2} < \omega < 0 \tag{4.26}$$

В этом случае знаки тригонометрических функций будут следующими:

$$\sin\omega < 0, \quad \cos\omega > 0, \quad \omega < 0 \tag{4.27}$$

Применяя хорошо известные формулы тригонометрии, можно показать, что

$$\begin{aligned} \mathrm{tg}\,\omega &= \frac{1 - a^2c^2 - \sqrt{(1 - a^2c^2)^2 + (a^2 + c^2)^2}}{a^2 + c^2} \\ \sqrt{2}\cos\omega &= \frac{a^2 + c^2}{\sqrt{\sqrt{(a^2 - c^2)^2 + (1 + a^2c^2)^2}\left(\sqrt{(1 - a^2c^2)^2 + (a^2 + c^2)^2} - (1 - a^2c^2)\right)}} \end{aligned} \tag{4.28}$$

Подытоживая, можно констатировать, что два несвязанных уравнения для динамических потенциалов линейной микрополярной теории упругости при выполнении условия (4.9) можно представить в факторизованной форме

$$\left(\overline{A}^{\frac{1}{2}}\overline{\Delta} - (-\overline{C})^{\frac{1}{2}}\overline{\partial_{\cdot\cdot}}\right)\left(\overline{A}^{\frac{1}{2}}\overline{\Delta} + (-\overline{C})^{\frac{1}{2}}\overline{\partial_{\cdot\cdot}}\right)\begin{pmatrix} \mathbf{\Psi} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{4.29}$$

в которой:

1) коэффициенты $\overline{A}$, $\overline{C}$ вычисляются согласно (4.20);

2) дифференциальные операторы $\overline{\Delta}$, $\overline{\partial_{\cdot\cdot}}$ определяются согласно (4.24);

3) постоянные h, k находятся с помощью (4.25);

4) значения $\cos\omega$ и $\sin\omega$ получаются на основании (4.28) и элементарного тригонометрического соотношения

$$\sin\omega = \cos\omega \,\mathrm{tg}\omega \tag{4.30}$$

Вихревые динамические потенциалы в случае факторизуемости основного дифференциального оператора представляются в виде суммы

$$\begin{pmatrix}\mathbf{\Psi}\\ \mathbf{H}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{\Psi}'\\ \mathbf{H}'\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mathbf{\Psi}''\\ \mathbf{H}''\end{pmatrix} \tag{4.31}$$

где слагаемые должны удовлетворять более простым уравнениям, точнее

$$\left(\overline{A}^{\frac{1}{2}}\overline{\Delta} - (-\overline{C})^{\frac{1}{2}}\overline{\partial_{\cdot\cdot}}\right)\begin{pmatrix}\mathbf{\Psi}'\\ \mathbf{H}'\end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{4.32}$$

$$\left(\overline{A}^{\frac{1}{2}}\overline{\Delta} + (-\overline{C})^{\frac{1}{2}}\overline{\partial_{\cdot\cdot}}\right)\begin{pmatrix}\mathbf{\Psi}''\\ \mathbf{H}''\end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{4.33}$$

Ясно, что поиск решений динамических уравнений микрополярной теории упругости в аддитивной форме (4.31) в случае факторизуемости основного дифференциального оператора намного *проще*, по сравнению с общим случаем. Именно по этой причине предложенный в настоящей работе подход скорее всего реализуем также методами группового анализа дифференциальных уравнений [7, 8].

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00844 “Моделирование термомеханических процессов в сложных средах с помощью принципа термомеханической ортогональности”).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Саусвелл Р.В.* Введение в теорию упругости для инженеров и физиков. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. 676 с.
2. *Cosserat E., Cosserat F.* Théorie des corps déformables. Herman et Fils, Paris, 1909. vi+226 pp.
3. *Радаев Ю.Н.* Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2018. Т. 22. № 3. С. 504–517.
https://doi.org/10.14498/vsgtu1635
4. *Nowacki W.* Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford New York Toronto Sydney Paris Frankfurt: Pergamon Press, 1986. viii+383 pp.
5. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
6. *Гуревич Г.Б.* Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. 408 с.
7. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989. 638 с.
8. *Ковалев В.А., Радаев Ю.Н.* Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2010. 328 с.