ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2020, № 6, с. 65–72

УДК 539.374

КРУЧЕНИЕ НЕОДНОРОДНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ ИЗ ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА ПРИ ЛИНЕАРИЗОВАННОМ УСЛОВИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Б. Г. Миронов[a],*, Ю. Б. Миронов[b],**

[a] *Российский университет транспорта, Москва, Россия*
[b] *Московский технический университет связи и информатики, Москва, Россия*
**e-mail: mbg.chspu@yandex.ru*
***e-mail: i.b.mironov@mtuci.ru*

Поступила в редакцию 01.06.2020 г.
После доработки 18.06.2020 г.
Принята к публикации 30.06.2020 г.

Рассмотрены общие соотношения теории кручения неоднородных стержней из идеального жесткопластического материала. В случае линеаризованного условия пластичности получены интегралы, определяющие напряженное и деформированное состояния идеального жесткопластического неоднородного стержня при кручении. Построено поле характеристик основных соотношений, найдены линии разрыва напряжений.

Ключевые слова: пластичность, неоднородность, кручение, деформация, напряжение
DOI: 10.31857/S0572329920060100

Кручение представляет собой один из видов деформации тел, характеризующийся взаимным поворотом его поперечных сечений под влиянием моментов, действующих в этих сечениях. Кручение стержней довольно часто встречается в инженерной практике, особенно в машиностроении. Теория кручения изотропных и анизотропных стержней из идеального жесткопластического материала изложена в работах [1–4]. Переход к случаю стержня из неоднородного материала приводит к определенным трудностям: задачу в общем случае невозможно проинтегрировать. Кручение составных призматических и цилиндрических стержней рассмотрены в [5, 7]. В работе [6] исследованы общие соотношения теории кручения стержней из идеального жесткопластического материала.

Соотношения теории кручения неоднородных цилиндрических и призматических стержней из идеально пластического материала [6] могут быть записаны в виде:

$$\begin{gathered}\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \\ \tau_{xz} = \tau_{xz}(x,y), \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x,y)\end{gathered} \tag{1}$$

– уравнение равновесия

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \tag{2}$$

– условие пластичности

$$f\left(\tau_{xz}, \tau_{yz}, x, y\right) = 0 \tag{3}$$

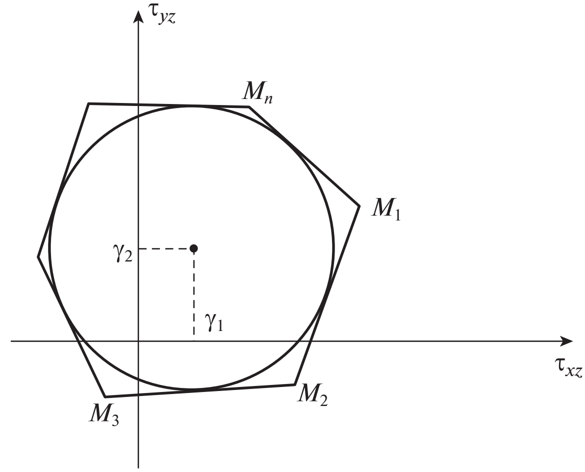

Рис. 1

— соотношения ассоциированного закона пластического течения

$$\frac{\varepsilon_{xz}}{A} = \frac{\varepsilon_{yz}}{B}, \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_{xy} = 0 \tag{4}$$

где σ_{ij} — компоненты напряжения, ε_{ij} — компоненты скорости деформации,

$$A = \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}(\tau_{xz}, \tau_{yz}, x, y), \quad B = \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}(\tau_{xz}, \tau_{yz}, x, y) \tag{5}$$

Условие пластичности (3) в плоскости τ_{xz}, τ_{yz} при фиксированных x, y представляет замкнутую выпуклую кривую (рис. 1), начало координат находится в области, ограниченной данной кривой.

Предположим, что кривая текучести (3) заменена замкнутой ломанной $M_1M_2M_3\ldots M_nM_1$ (рис. 1)

$$A_i\tau_{xz} + B_i\tau_{yz} = K_i \tag{6}$$

где $A_i = \dfrac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}(\tau_{xz}^{i0}, \tau_{yz}^{i0}, x_0, y_0), B_i = \dfrac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}(\tau_{xz}^{i0}, \tau_{yz}^{i0}, x_0, y_0), f(\tau_{xz}^{i0}, \tau_{yz}^{i0}, x_0, y_0) = 0$

$$K_i = A_i\tau_{xz}^i + B_i\tau_{yz}^i, \quad A_i = \mu\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}(\tau_{xz}^i, \tau_{yz}^i, x, y), \quad B_i = \mu\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}(\tau_{xz}^i, \tau_{yz}^i, x, y)$$

$$f(\tau_{xz}^i, \tau_{yz}^i, x, y) = 0, \quad \mu - \text{const}, \quad i = 1, 2, \ldots, \text{n}$$

Условие (6) представляет на некотором отрезке линеаризованное условие пластичности (3). Дифференцируя уравнение (6) по переменной y, получим

$$A_i\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} + B_i\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \frac{\partial K_i}{\partial y} \tag{7}$$

С учетом (2) из уравнения (7) имеем

$$A_i\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - B_i\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = \frac{\partial K_i}{\partial y} \tag{8}$$

Система уравнений для определения характеристик соотношения (8) и соотношений вдоль характеристик имеет вид

$$\frac{dx}{-B_i} = \frac{dy}{A_i} = \frac{d\tau_{xz}}{\dfrac{\partial K_i}{\partial y}} \tag{9}$$

Из (9) следует, что прямые

$$A_i x + B_i y = C_{i1} \quad (C_{i1} = \text{const}) \tag{10}$$

являются характеристиками соотношения (8). Вдоль характеристик (10) справедливы следующие соотношения

$$A_i\tau_{xz} = \int \frac{\partial K_i}{\partial y}(\alpha, y)\,dy, \quad -B_i\tau_{xz} = \int \frac{\partial K_i}{\partial y}(x, \beta)\,dx \tag{11}$$

где $\alpha = \dfrac{1}{A_i}(C_{i1} - B_i y)$, $\beta = \dfrac{1}{B_i}(C_{i1} - A_i x)$

Аналогично дифференцируя уравнение (6) по переменной x, с учетом (2) получим, что вдоль характеристик (10) справедливы следующие соотношения для компонент напряжения

$$-A_i\tau_{yz} = \int \frac{\partial K_i}{\partial x}(\alpha, y)\,dy, \quad B_i\tau_{yz} = \int \frac{\partial K_i}{\partial x}(x, \beta)\,dx \tag{12}$$

Рассматривая условие (6) в качестве пластического потенциала, получим вместо (4) соотношение

$$\frac{\varepsilon_{xz}}{A_i} = \frac{\varepsilon_{yz}}{B_i} \tag{13}$$

Интегрируя соотношение (6) и часть соотношений (4) и учитывая, что в начальный момент закручивания компоненты деформации e_{ij} равны 0, получим

$$\frac{e_{xz}}{A_i} = \frac{e_{yz}}{B_i}, \quad e_x = e_y = e_z = e_{xy} = 0 \tag{14}$$

Из (14) следует

$$B_i e_{xz} - A_i e_{yz} = 0 \tag{15}$$

Предположим, что компоненты перемещения u, v, w имеют вид

$$u = \theta yz, \quad v = -\theta xz, \quad w = w(x, y) \tag{16}$$

где θ – крутка, w – депланация.

Выражая компоненты деформации через компоненты перемещения

$$e_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right), \quad e_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \tag{17}$$

из (15), (16) получим

$$-B_i\frac{\partial w}{\partial x} + A_i\frac{\partial w}{\partial y} = \theta(A_i x + B_i y) \tag{18}$$

Из (18) следует, что прямые (10) являются характеристиками. Вдоль характеристик (10) имеют место соотношения

$$B_i w + \theta C_{i1} x = C_{i2} \quad \text{или} \quad A_i w - \theta C_{i1} y = C_{i3} \tag{19}$$

где $C_{i2}, C_{i3} = \text{const}$ вдоль характеристики.

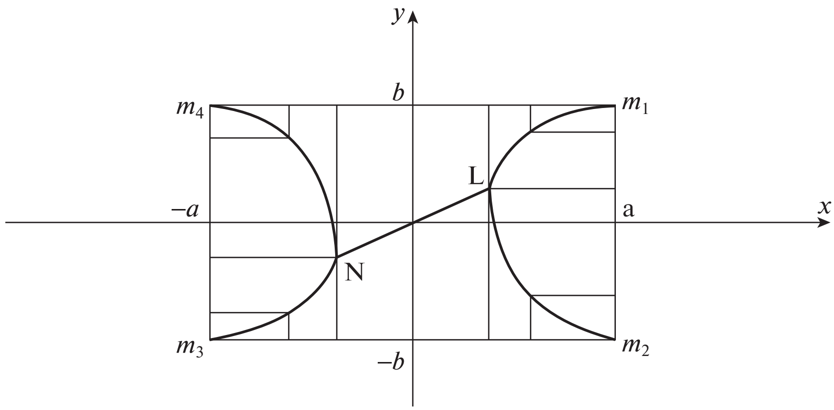

Рис. 2

Дифференцируя соотношение (18) по переменной x, получим уравнение

$$-B_i \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) + A_i \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) = \theta A_i \tag{20}$$

Из уравнения (20) следует, что вдоль характеристик (10) справедливы соотношения

$$B_i \frac{\partial w}{\partial x} + \theta A_i x = C_{i4} \quad \text{или} \quad \frac{\partial w}{\partial x} - \theta y = C_{i5} \tag{21}$$

где $C_{i4}, C_{i5} = \text{const}$ вдоль характеристики.

Аналогично дифференцируя соотношение (18) по переменной y, получим уравнение

$$-B_i \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) + A_i \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) = \theta B_i \tag{22}$$

Из уравнения (22) следует, что вдоль характеристик (10) справедливы соотношения

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \theta x = C_{i6} \quad \text{или} \quad A_i \frac{\partial w}{\partial y} - \theta B_i y = C_{i7} \tag{23}$$

где $C_{i6}, C_{i7} = \text{const}$ вдоль характеристики.

Используя второе соотношение (21) и первое соотношение (23) получим, что вдоль характеристик (10) справедливы соотношения

$$e_{xz} - \theta y = \frac{1}{2} C_{i5}, \quad e_{yz} + \theta x = \frac{1}{2} C_{i6} \tag{24}$$

Следует отметить, что из соотношений (24), (10), (15) вытекает

$$A_i C_{i6} - B_i C_{i5} = 2\theta C_{i1} \tag{25}$$

Рассмотрим кручение стержня прямоугольного сечения $m_1 m_2 m_3 m_4$ со сторонами $2a$ и $2b$ (рис. 2). На контуре сечения вектор касательного напряжения $\boldsymbol{\tau} = \left(\tau_{xz}, \tau_{yz}\right)$ параллелен контуру.

В случае изотропного идеально пластического материала характеристики направлены перпендикулярно к контуру. В рассматриваемом случае направление характеристик (10) фиксировано, поэтому для данного контура сечения стержня всегда можно выбрать линеаризованное условие пластичности (6) таким образом, чтобы характеристики оставались перпендикулярными к контуру. Для этого A_i, B_i в условии (6) необходимо выбрать так, чтобы вектор $\mathbf{n_i} = (A_i, B_i)$ был параллелен отрезку $m_i m_{i+1}$ контура (рис. 2).

Здесь мы имеем четыре семейства характеристик

$$A_1 x + B_1 y = C_{11} \tag{26}$$

$$A_2 x + B_2 y = C_{21} \tag{27}$$

$$A_3 x + B_3 y = C_{31} \tag{28}$$

$$A_4 x + B_4 y = C_{41} \tag{29}$$

Для того, чтобы характеристики (26) были ортогональны отрезку $m_1 m_2$ контура сечения стержня, следует положить $A_1 = 0$, $B_1 = -1$. Условие пластичности (6) принимает вид

$$\tau_{yz} = -K_1 \tag{30}$$

Характеристики (26) запишутся в виде

$$y = -C_{11} \tag{31}$$

Из (25) следует

$$C_{15} = 2\theta C_{11} \tag{32}$$

Тогда из (11), (30) и (2) вдоль характеристик (31) имеем

$$\tau_{yz} = -K_1, \quad \tau_{xz} = \int \frac{\partial K_1}{\partial y}(x, -C_{11})\, dx = k_1 \tag{33}$$

Для того, чтобы характеристики (27) были ортогональны отрезку $m_2 m_3$ контура сечения стержня, следует положить $A_2 = -1$, $B_2 = 0$. Условие пластичности (6) принимает вид

$$\tau_{xz} = -K_2 \tag{34}$$

Характеристики (27) запишутся в виде

$$x = -C_{21} \tag{35}$$

Из (25) следует

$$C_{26} = -2\theta C_{21} \tag{36}$$

Тогда из (12), (34) и (2) вдоль характеристик (35) имеем

$$\tau_{xz} = -K_2, \quad \tau_{yz} = \int \frac{\partial K_2}{\partial x}(-C_{21}, y)\, dy = k_2 \tag{37}$$

Для того, чтобы характеристики (28) были ортогональны отрезку $m_3 m_4$ контура сечения стержня, следует положить $A_3 = 0$, $B_3 = 1$. Условие пластичности (6) принимает вид

$$\tau_{yz} = K_3 \tag{38}$$

Характеристики (28) запишутся в виде

$$y = C_{31} \tag{39}$$

Из (25) следует

$$C_{35} = -2\theta C_{31} \tag{40}$$

Тогда из (11), (38) и (2) вдоль характеристик (39) имеем

$$\tau_{yz} = K_3, \quad \tau_{xz} = -\int \frac{\partial K_3}{\partial y}(x, C_{31})\,dx = -k_3 \tag{41}$$

Для того, чтобы характеристики (29) были ортогональны отрезку m_4m_1 контура сечения стержня, следует положить $A_4 = 1$, $B_4 = 0$. Условие пластичности (6) принимает вид

$$\tau_{xz} = K_4 \tag{42}$$

Характеристики (29) запишутся в виде

$$x = C_{41} \tag{43}$$

Из (25) следует

$$C_{46} = 2\theta C_{41} \tag{44}$$

Тогда из (12), (42) и (2) вдоль характеристик (41) имеем

$$\tau_{xz} = K_4, \quad \tau_{yz} = -\int \frac{\partial K_4}{\partial x}(C_{41}, y)\,dy = -k_4 \tag{45}$$

Особо следует остановиться на линиях разрыва напряжений (линии m_1L, m_2L, m_3N, m_4N, LN на рис. 2), которые возникают в случае, когда через данную точку сечения проходят две и более характеристики.

Линии разрыва напряжений являются следом исчезающих жестких областей. На них всегда выполняются соотношения

$$e_{xz} = e_{yz} = 0 \tag{46}$$

Кривая m_1L есть линия разрыва напряжений, выходящая из вершины m_1 контура сечения стержня и образованная за счет пересечения семейства характеристик (31) и (43).

Из (33) и (45) имеем уравнение линии разрыва напряжений m_1L

$$\frac{dx}{K_4 - k_1} = \frac{dy}{K_1 - k_4} \tag{47}$$

Кривая m_2L есть линия разрыва напряжений, выходящая из вершины m_2 контура сечения стержня и образованная за счет пересечения семейства характеристик (31) и (35).

Из (33) и (37) имеем уравнение линии разрыва напряжений m_2L

$$\frac{dx}{-K_2 - k_1} = \frac{dy}{K_1 + k_2} \tag{48}$$

Кривая m_3N есть линия разрыва напряжений, выходящая из вершины m_3 контура сечения стержня и образованная за счет пересечения семейства характеристик (35) и (39).

Из (37) и (41) имеем уравнение линии разрыва напряжений m_3N

$$\frac{dx}{K_2 - k_3} = \frac{dy}{K_3 - k_2} \tag{49}$$

Кривая m_4N есть линия разрыва напряжений, выходящая из вершины m_4 контура сечения стержня и образованная за счет пересечения семейства характеристик (39) и (43).

Из (41) и (45) имеем уравнение линии разрыва напряжений m_4N

$$\frac{dx}{-K_4 - k_3} = \frac{dy}{K_3 + k_4} \tag{50}$$

Кривая NL есть линия разрыва напряжений, образованная за счет пересечения семейства характеристик (35) и (43).

Из (37) и (45) имеем уравнение линии разрыва напряжений NL

$$\frac{dx}{K_4 + K_2} = \frac{dy}{-k_4 - k_2} \tag{51}$$

Рассмотрим случай, кода условие пластичности (3) имеет вид

$$\left(\tau_{xz} - \gamma_1\right)^2 + \left(\tau_{yz} - \gamma_2\right)^2 = k_0 \tag{52}$$

где $\gamma_1 = a_1x + b_1y, \gamma_2 = a_2x + b_2y, k_0 = \text{const}$

Согласно (6), (33), (37), (41), (45) компоненты напряжения определяются следующим образом:

– в области m_1Lm_2

$$\tau_{xz} = -b_2\left(x - a\right), \quad \tau_{yz} = -k_0 + a_2x + b_2y \tag{53}$$

– в области m_2LNm_3

$$\tau_{xz} = -k_0 + a_1x + b_1y, \quad \tau_{yz} =-a_1\left(y + b\right) \tag{54}$$

– в области m_3Nm_4

$$\tau_{xz} = -b_2\left(x + a\right), \quad \tau_{yz} = k_0 + a_2x + b_2y \tag{55}$$

– в области m_4NLm_1

$$\tau_{xz} = k_0 + a_1x + b_1y, \quad \tau_{yz} =-a_1\left(y - b\right) \tag{56}$$

Из (53), (54), (55), (56) получим уравнения линий разрыва напряжений

$$m_1L\colon a_2x^2 + 2\left(a_1 + b_2\right)xy + b_1y^2 - 2\left(k_0 + a_1b\right)x + 2\left(k_0 - b_2a\right)y = r \tag{57}$$

$$m_2L\colon a_2x^2 + 2\left(a_1 + b_2\right)xy + b_1y^2 - 2\left(k_0 - a_1b\right)x - 2\left(k_0 + b_2a\right)y = r \tag{58}$$

$$m_3N\colon a_2x^2 + 2\left(a_1 + b_2\right)xy + b_1y^2 + 2\left(k_0 + a_1b\right)x - 2\left(k_0 - b_2a\right)y = r \tag{59}$$

$$m_4N\colon a_2x^2 + 2\left(a_1 + b_2\right)xy + b_1y^2 + 2\left(k_0 - a_1b\right)x + 2\left(k_0 + b_2a\right)y = r \tag{60}$$

$$LN\colon -a_1bx + k_0y = 0 \tag{61}$$

где $r = a_2a^2 - 2k_0\left(a - b\right) + b_1b^2$

Таким образом, в работе:

получены интегралы, определяющие напряженное и деформированное состояния неоднородного идеального жесткопластического стержня при кручении для линеаризованного условия пластичности, найдены характеристики основных соотношений и соотношения для компонент напряжений и деформаций;

исследовано предельное состояние неоднородного идеального жесткопластического стержня с прямоугольным сечением: определено поле характеристик основных соотношений, найдены соотношения вдоль характеристик и линии разрыва напряжений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Соколовский В.В.* Теория пластичности. Москва: Высшая школа, 1969. 608 с.
2. *Ивлев Д.Д.* Механика пластических сред. В 2 т. Т 2. Общие вопросы. Жесткопластическое и упругопластическое состояние тел. Упрочнение. Деформационные теории. Сложные среды. Москва: Физматлит, 2002. 448 с.
3. *Прагер В.* Теория идеально пластических тел. Москва: ИЛ, 1956. 398 с.
4. *Быковцев Г.И.* Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
5. *Ольшак В.* Теория пластичности неоднородных тел. Москва: Мир, 1964. 156 с.
6. *Миронов Б.Г.* К теории кручения неоднородных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 4 (22). С. 236–240.
7. *Mironov B.G.* Torsion anisotropic and composite cylindrical rod //Journal of Physics: Conference Series. 1203. 2019. 012009.