

УДК 539.3

НЕОДНОРОДНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПОЛУПОЛОСЕ. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ

© 2020 г. М. Д. Коваленко^{a,b,*}, И. В. Меньшова^{a,c,**},
А. П. Кержаев^{a,***}, G. Yu^{d,e,****}

^a Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН, Москва, Россия

^b Институт прикладной механики РАН, Москва, Россия

^c Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

^d School of Civil Engineering, Qingdao University of Technology, Qingdao, China

^e Cooperative Innovation Center of Engineering Construction and Safety in Shandong Blue Economic Zone,
Qingdao University of Technology, Qingdao, China

*e-mail: kov08@inbox.ru

**e-mail: menshovairina@yandex.ru

***e-mail: alex_kerg@mail.ru

****e-mail: yu-guangming@263.net

Поступила в редакцию 10.07.2020 г.

После доработки 25.07.2020 г.

Принята к публикации 15.08.2020 г.

В статье в виде рядов по собственным функциям Папковича–Фадля построены точные решения двух неоднородных краевых задач теории упругости для полуполосы со свободными длинными сторонами: 1) торец полуполосы свободен, 2) торец полуполосы жестко зашпелен. Для решения неоднородной задачи в свободной полосе используется соотношение ортогональности Папковича. К нему потом добавляется точное решение для полуполосы.

Ключевые слова: полуполоса, неоднородная краевая задача, собственные функции Папковича–Фадля, соотношение ортогональности Папковича, точное решение

DOI: 10.31857/S0572329920060094

1. Введение. В статье получены точные решения для полуполосы со свободными длинными сторонами. Внешняя нагрузка действует внутри полуполосы вдоль ее оси (четно-симметричная деформация). Торец полуполосы свободен (напряжения равны нулю) или жестко зашпелен (перемещения равны нулю). Вначале решается соответствующая неоднородная задача для бесконечной полосы. Затем с помощью точных решений для полуполосы [1, 2] удовлетворяются граничные условия на торце.

Решение неоднородной задачи в бесконечной полосе строится с использованием соотношения ортогональности Папковича. Это позволяет существенно упростить процесс решения, а окончательные формулы представить в виде рядов по собственным функциям Папковича–Фадля, коэффициенты которых записываются в простом явном виде.

В 1940 П.Ф. Папковичем в статье [3] было получено соотношение биортогональности для собственных функций, возникающих при решении краевой задачи в полуполосе со свободными длинными сторонами. В работе [1] отмечалось, что соотношение ортогональности Папковича можно использовать для бесконечной полосы с разрыва-

ми перемещений или напряжений. Известно [4], что задачи с разрывами эквивалентны неоднородным краевым задачам теории упругости. Основываясь на этом, с помощью соотношения ортогональности Папковича можно быстро получить решение неоднородной задачи для свободной полосы.

2. Решение неоднородной задачи в бесконечной полосе. Простой путь решения неоднородной задачи для свободной полосы основан на соотношении ортогональности Папковича. В этом случае результат получается в виде рядов ($\text{Re } \lambda_k < 0$)

$$\begin{aligned}\sigma_x(x, y) &= C \text{sign}(x) + \text{sign}(x) \sum_{k=1}^{\infty} 2 \text{Re}[A_k s_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k |x|}] \\ \sigma_y(x, y) &= \text{sign}(x) \sum_{k=1}^{\infty} 2 \text{Re}[A_k s_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k |x|}] \\ \tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2 \text{Re}[A_k t_{xy}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k |x|}] \\ U(x, y) &= \frac{C|x|}{2(1+\nu)} + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \text{Re}[A_k \xi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k |x|}] \\ V(x, y) &= -\text{sign}(x) \frac{C\nu y}{2(1+\nu)} + \text{sign}(x) \sum_{k=1}^{\infty} 2 \text{Re}[A_k \chi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k |x|}]\end{aligned}\quad (2.1)$$

по собственным функциям Папковича—Фадля

$$\begin{aligned}s_x(\lambda_k, y) &= (1+\nu)\lambda_k \{(\sin \lambda_k - \lambda_k \cos \lambda_k) \cos \lambda_k y - \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y\} \\ s_y(\lambda_k, y) &= (1+\nu)\lambda_k \{(\sin \lambda_k + \lambda_k \cos \lambda_k) \cos \lambda_k y + \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y\} \\ t_{xy}(\lambda_k, y) &= (1+\nu)\lambda_k^2 (\cos \lambda_k \sin \lambda_k y - y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y) \\ \xi(\lambda_k, y) &= \left(\frac{1-\nu}{2} \sin \lambda_k - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k \right) \cos \lambda_k y - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y \\ \chi(\lambda_k, y) &= \left(\frac{1+\nu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k + \sin \lambda_k \right) \sin \lambda_k y - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k \cos \lambda_k\end{aligned}\quad (2.2)$$

где λ_k — комплексные корни трансцендентного уравнения $\lambda + \sin \lambda \cos \lambda = 0$ [1, 2].

Известны различные формы записи соотношения ортогональности Папковича. Воспользуемся той, что приведена в статье [1]:

$$\int_{-1}^1 [s_x(\lambda_k, y) \xi(\lambda_m, y) - \chi(\lambda_k, y) t_{xy}(\lambda_m, y)] dy = \begin{cases} 2(1+\nu)\lambda_k^3 & (k = m) \\ 0 & (k \neq m) \end{cases} \quad (2.3)$$

Если на торце правой полуполосы $\{P: |x| \geq 0, |y| \leq 1\}$ со свободными длинными сторонами заданы продольные нормальные напряжения $X(y)$ и поперечные перемещения $V(y)$, то коэффициенты A_k рядов (2.1) легко найти с помощью (2.3):

$$A_k = \frac{1}{2(1+\nu)\lambda_k^3} \int_{-1}^1 [X(y) \xi(\lambda_k, y) - V(y) t_{xy}(\lambda_k, y)] dy \quad (k \geq 1) \quad (2.4)$$

Продолжая решение из правой полуполосы в левую как нечетно-симметричное и полагая в (2.4) $V(y) = 0$ (в силу нечетности продолжения), получим формулы (2.1),

описывающие решение задачи в свободной бесконечной полосе с разрывами нормальных напряжений. В этих формулах

$$A_k = \frac{1}{2(1+\nu)\lambda_k^3} \int_{-1}^1 X(y) \xi(\lambda_k, y) dy \quad (2.5)$$

Если подставить (2.5) в первые две формулы (2.1), то с помощью теоремы о вычетах получим

$$\sigma_x(0, y) = X(y), \quad \sigma_y(0, y) = \nu X(y) \quad (2.6)$$

Проверим выполнение уравнений равновесия и совместности деформаций для решения (2.1). Используя равенства, которым удовлетворяют собственные функции Папковича–Фадля:

$$\frac{d}{dy} t_{xy}(\lambda_k, y) = -\lambda_k s_x(\lambda_k, y), \quad \frac{d}{dy} s_y(\lambda_k, y) = -\lambda_k t_{xy}(\lambda_k, y) \quad (2.7)$$

а также следующие свойства обобщенных функций [5] (штрихом обозначена производная дельта-функции):

$$\frac{d}{dx} \text{sign}(x) = 2\delta(x), \quad \delta(x) e^{\lambda_k |x|} = \delta(x), \quad \delta'(x) e^{\lambda_k |x|} = \delta'(x), \quad \delta(x) \text{sign}(x) = 0 \quad (2.8)$$

с учетом формул (2.6) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \sigma_x(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy}(x, y) &= 2X(y)\delta(x), \quad \frac{\partial}{\partial y} \sigma_y(x, y) + \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy}(x, y) = 0 \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x(x, y) + \sigma_y(x, y)) &= 2(1+\nu)X(y)\delta'(x) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Как известно, уравнения (2.9) соответствуют неоднородной задаче [6]. Следовательно, решение (2.1) с разрывами нормальных напряжений эквивалентно решению неоднородной задачи для свободной полосы.

Если в формулах (2.1) заменить x на $x - \beta$, то получим

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y) &= C \text{sign}(x - \beta) + \text{sign}(x - \beta) \sum_{k=1}^{\infty} 2 \text{Re}[A_k s_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k |x - \beta|}] \\ \sigma_y(x, y) &= \text{sign}(x - \beta) \sum_{k=1}^{\infty} 2 \text{Re}[A_k s_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k |x - \beta|}] \\ \tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2 \text{Re}[A_k t_{xy}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k |x - \beta|}] \\ U(x, y) &= \frac{C|x - \beta|}{2(1+\nu)} + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \text{Re}[A_k \xi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k |x - \beta|}] \\ V(x, y) &= -\text{sign}(x - \beta) \frac{C\nu y}{2(1+\nu)} + \text{sign}(x - \beta) \sum_{k=1}^{\infty} 2 \text{Re}[A_k \chi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k |x - \beta|}] \end{aligned} \quad (2.10)$$

3. Решение неоднородной задачи для полуполосы со свободными длинными сторонами. Решение неоднородной задачи для полуполосы П со свободными длинными сторонами и какими-либо граничными условиями на торце получается как сумма решений неоднородной задачи для свободной полосы (2.10) и однородной задачи для полуполосы П.

Последнее имеет вид [7] ($x \geq 0$, $\text{Re } \lambda_k > 0$)¹:

а) если на торце полуполосы заданы нормальные напряжения, то

$$\begin{aligned}
 \sigma_x^{hs}(x, y) &= C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \sigma_k \frac{s_x(\lambda_k, y)}{M_k} \frac{\operatorname{Im}(-\bar{\lambda}_k e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)} \right\} \\
 \sigma_y^{hs}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \sigma_k \frac{s_y(\lambda_k, y)}{M_k \lambda_k^2} \lambda_k \bar{\lambda}_k \frac{\operatorname{Im}(-\lambda_k e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)} \right\} \\
 \tau_{xy}^{hs}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \sigma_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \lambda_k \bar{\lambda}_k \frac{\operatorname{Im}(-e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)} \right\} \\
 U^{hs}(x, y) &= B_0 + \frac{C_0 x}{2(1+\nu)} + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \lambda_k \sigma_k \frac{\xi(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \frac{\operatorname{Im}(-\bar{\lambda}_k e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)} \right\} \\
 V^{hs}(x, y) &= -\frac{C_0 \nu y}{2(1+\nu)} + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \sigma_k \frac{\chi(\lambda_k, y)}{M_k} \frac{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)} \right\}
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

б) если на торце полуполосы заданы касательные напряжения, то

$$\begin{aligned}
 \sigma_x^{hs}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \tau_k \frac{s_x(\lambda_k, y)}{M_k} \frac{\operatorname{Im}(e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)} \right\} \\
 \sigma_y^{hs}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \tau_k \frac{s_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k} \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k^2 e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)} \right\} \\
 \tau_{xy}^{hs}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \tau_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)} \right\} \\
 U^{hs}(x, y) &= -\sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \tau_k \frac{\xi(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)} \right\} \\
 V^{hs}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{\tau_k \chi(\lambda_k, y)}{\lambda_k} \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k e^{\lambda_k x})}{M_k \operatorname{Im}(\lambda_k)} \right\}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Здесь $M_k = \cos^2(\lambda_k)$ – нормирующий множитель, а σ_k , τ_k – коэффициенты Лагранжа [1, 2], которые нужно найти из граничных условий на торце полуполосы. Постоянным B_0 , C_0 соответствует элементарное решение.

3.1. Решение неоднородной задачи для полуполосы со свободным торцом. Рассмотрим неоднородную задачу для полуполосы II со свободным торцом (рис. 1).

Воспользуемся формулами (2.10), (3.1), (3.2) и будем считать, что при $x = 0$

$$\sigma_x^{hs}(0, y) = -\sigma_x(0, y), \quad \tau_{xy}^{hs}(0, y) = -\tau_{xy}(0, y) \tag{3.3}$$

¹ Аналогичные формулы, описывающие решение однородной задачи для полуполосы, были получены в статье [8], но для нечетно-симметричной деформации полуполосы.

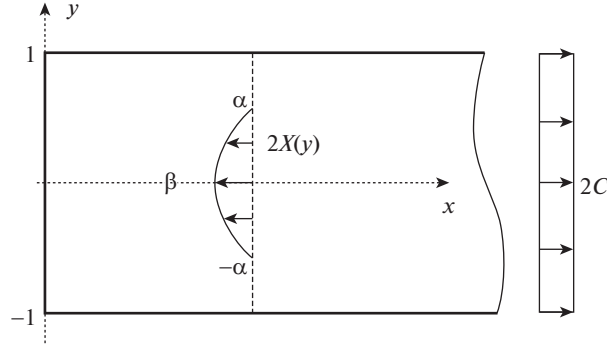


Рис. 1

Отсюда получим

$$\begin{aligned} C + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \sigma_k \frac{s_x(\lambda_k, y)}{M_k} \right\} &= C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} [A_k s_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k |\beta|}] \\ \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \tau_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \right\} &= - \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} [A_k t_{xy}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k |\beta|}] \end{aligned} \quad (3.4)$$

Умножим равенства (3.4) на функции, биортогональные к собственным функциям Папковича–Фадля, и проинтегрируем. Следуя [2], на основании соотношений биортогональности найдем

$$C_0 = C, \quad \sigma_k = A_k M_k e^{\lambda_k |\beta|}, \quad \tau_k = -A_k M_k \lambda_k e^{\lambda_k |\beta|} \quad (3.5)$$

Подставив эти выражения в формулы (3.1), (3.2) и складывая их с соответствующими формулами (2.10), получим полное решение неоднородной задачи для полуполосы со свободными длинными сторонами и торцом, у которой в сечении $x = \beta$ действует направленная вдоль оси x четно-симметричная нагрузка $2X(y)$.

Элементарные решения удобно выделить из полного решения. Сумма элементарных решений (2.10) и (3.1) равна:

$$\begin{aligned} \sigma_x^0(x, y) &= C \operatorname{sign}(x - \beta) + C \\ U^0(x, y) &= \frac{C|x - \beta|}{2(1 + \nu)} + \frac{Cx}{2(1 + \nu)} + B_0 \\ V^0(x, y) &= -\frac{Cvy}{2(1 + \nu)} \operatorname{sign}(x - \beta) - \frac{Cvy}{2(1 + \nu)} \\ \sigma_y^0(x, y) &= \tau_{xy}^0(x, y) = 0, \quad C = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 X(y) dy \end{aligned} \quad (3.6)$$

Если считать, что

$$B_0 = -\frac{C\beta}{2(1 + \nu)} \quad (3.7)$$

то тогда $U^0(0, y) = 0$.

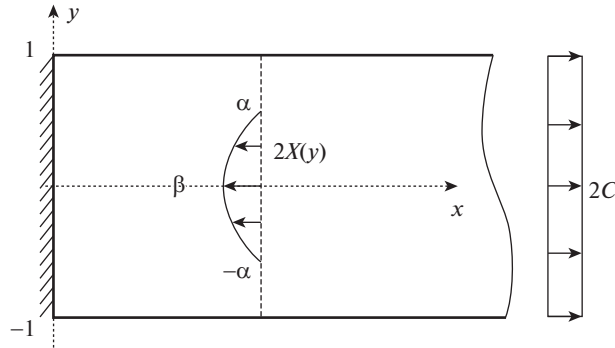


Рис. 2

3.2. *Решение неоднородной задачи для полуполосы с жестко зашлепленным торцом.* Рассмотрим неоднородную задачу для полуполосы П с жестко зашлепленным торцом (рис. 2).

Вновь воспользуемся формулами (2.10), (3.1), (3.2) и будем считать, что при $x = 0$

$$U^{hs}(0, y) = -U(0, y), \quad V^{hs}(0, y) = -V(0, y) \quad (3.8)$$

При $C_0 = C$ и B_0 , равной (3.7), элементарное решение (3.6) удовлетворяет условию отсутствия перемещений на торце полуполосы. Поэтому из (3.8) получим следующие два уравнения относительно коэффициентов Лагранжа σ_k и τ_k :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \lambda_k \sigma_k \frac{\xi(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \right\} - \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \tau_k \frac{\xi(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \right\} &= - \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} [A_k \xi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k |\beta|}] \\ - \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \sigma_k \frac{\chi(\lambda_k, y)}{M_k} \right\} + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \tau_k \frac{\chi(\lambda_k, y)}{M_k} \right\} &= \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} [A_k \chi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k |\beta|}] \end{aligned} \quad (3.9)$$

Отсюда, как и выше, придем к системе из двух алгебраических уравнений:

$$\lambda_k \sigma_k - \tau_k = -\lambda_k A_k M_k e^{\lambda_k |\beta|}, \quad -\sigma_k + \frac{\tau_k}{\lambda_k} = A_k M_k e^{\lambda_k |\beta|} \quad (3.10)$$

Уравнения (3.10) линейно зависимы, поэтому система (3.10) имеет бесконечное множество решений. Физически это означает, что решение из правой полуполосы П может быть продолжено в левую бесконечным числом комбинаций четно-симметричных и нечетно-симметричных продолжений. В частности, если оно продолжено как четно-симметричное, то

$$\tau_k = 0, \quad \sigma_k = -A_k M_k e^{\lambda_k |\beta|} \quad (3.11)$$

Если же оно продолжено как нечетно-симметричное, то

$$\sigma_k = 0, \quad \tau_k = \lambda_k A_k M_k e^{\lambda_k |\beta|} \quad (3.12)$$

4. Заключение. 1. В статье предложен основанный на соотношении ортогональности Папковича метод решения неоднородных краевых задач теории упругости в свободной полосе. Показана эквивалентность решения неоднородной задачи и задачи с разрывами продольных нормальных напряжений. С помощью этого же соотношения ортогональности или соотношений ортогональности Папковича, записанных в иной форме, можно получить другие простые решения различных задач с разрывами на-

пряжений или перемещений и эквивалентных им неоднородных задач. Все решения будут представляться рядами по собственным функциям Папковича–Фадля.

2. В случае защемленного торца напряжения не имеют особенности в угловых точках полуполосы, в отличие от соответствующих решений для бесконечного клина. Причина этого заключается в том, что, в отличие от решения, полученного в статье, в решении для клина тип граничных условий меняется в точке (вершине клина), лежащей на одной координатной линии, а именно вдоль границы клина. В статье [9] было показано, что в задачах для полуполосы или прямоугольника в этом случае соответствующей особенностью должны обладать функции, биортогональные к функциям Папковича–Фадля. Поэтому решение для клина не может рассматриваться как асимптотическое в соответствующих задачах для полуполосы, т.к. это и физически и математически разные задачи.

3. Функция $X(y)$ должна обращаться в нуль в окрестности точек ($x = \beta$, $y = \pm 1$). Если это условие не выполняется, то решение задачи может оказаться нерегулярным в этих точках в смысле Н.И. Мусхелишвили [10].

4. Известно, что соотношение ортогональности Папковича остается справедливым и для других типов однородных граничных условий на сторонах полосы, в частности, когда ее стороны жестко защемлены. Поэтому рассмотренным в этой статье методом можно построить простые точные решения для широкого круга (с различными граничными условиями) неоднородных краевых задач в полуполосе (в прямоугольнике).

Благодарности. Исследование М.Д. Коваленко и И.В. Меньшовой (разделы 3 и 4) выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Государственного фонда естественных наук Китая в рамках научного проекта № 20-51-53021. Исследование А.П. Кержаева (разделы 1 и 2) выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-71-00094). The research of G. Yu was funded by the National Natural Science Foundation of China (No. 51674150) and NSFC-RFBR (No. 5191101589).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коваленко М.Д., Шуляковская Т.Д. Разложения по функциям Фадля–Папковича в полосе. Основы теории // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 5. С. 78–98.
2. Коваленко М.Д., Меньшова И.В., Шуляковская Т.Д. Разложения по функциям Фадля–Папковича. Примеры решений в полуполосе // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 5. С. 121–144.
3. Папкович П.Ф. Об одной форме решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной полосы // Докл. АН СССР. 1940. Т. 27. № 4. С. 335–339.
4. Kasahara K. Earthquake Mechanics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1981.
5. Ketch V., Teodorescu P. Introduction to the Theory of Generalized Functions with Applications in Engineering. New York: Wiley, 1978.
6. Timoshenko S.P., Goodier J.N. Theory of Elasticity. New-York: McGraw-Hill, 1951.
7. Yu G., Kovalenko M.D., Menshova I.V., Kerzhaev A.P. Two problems for a strip with a transverse crack: Exact solutions // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. V. 1215. 012037.
8. Kovalenko M.D., Menshova I.V., Kerzhaev A.P. On the exact solutions of the biharmonic problem of the theory of elasticity in a half-strip // Z. Angew. Math. Phys. 2018. V. 69. 121.
9. Kovalenko M.D., Menshova I.V., Kerzhaev A.P., Yu G. Mixed boundary value problems in the theory of elasticity in an infinite strip // Acta Mech. 2018. V. 229. № 11. P. 4339–4356.
10. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1949. 635 с.