ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2020,
№ 6, с. 134–140

УДК 539.3

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ НЕОГРАНИЧЕННОГО ПРОСТРАНСТВА ВБЛИЗИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ С НЕКРУГОВОЙ ФОРМОЙ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ДЛЯ СТАРЕЮЩИХ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

Д. В. Гоцев[a,b,*], **А. В. Ковалев**[a,b,**], **А. Ю. Яковлев**[a,***]

[a] *Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия*
[b] *Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил "Военно-воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина", Воронеж, Россия*
**e-mail: rbgotsev@mail.ru*
***e-mail:kav-mail@mail.ru*
****e-mail:yakovlev@amm.vsu.ru*

Поступила в редакцию 18.05.2020 г.
После доработки 11.06.2020 г.
Принята к публикации 15.08.2020 г.

Настоящая работа посвящена определению напряженного состояния неограниченного пространства в окрестности цилиндрической полости (толстостенная плита с отверстием), имеющей в поперечном сечении форму близкую к правильной многоугольной (задача Галина–Ивлева). В качестве модели материала пространства использовалась модель среды, учитывающая стареющие упруговязкопластические свойства. Решение проводилось в рамках метода малого параметра, характеризующего отклонение формы отверстия от окружности, а также возмущение статических граничных условий. При этом невозмущенному состоянию соответствует осесимметричное упругопластическое напряженно-деформированное состояние толстой плиты с круговым отверстием из стареющего упруговязкопластического материала. В результате решения задачи получены аналитические выражения для компонент напряжений, а также уравнение для определения формы и размера границы раздела зон упругого и пластического деформирования плиты.

Ключевые слова: модель стареющего упруговязкопластического материала, двухосное растяжение, толстая плита с некруговым отверстием, метод возмущений, напряженное состояние

DOI: 10.31857/S0572329920060082

Модель наследственно стареющего вязкопластического материала была предложена Д.Д. Ивлевым и Н.Х. Арутюняном в работе [1]. В работах Ф.Б. Милявской построены поля напряжений в толстой плите из стареющего материала вблизи кругового [2] или эллиптического [3] отверстия при двухосном растяжении.

Подходы к постановке и исследованию неклассических задач наращивания вязкоупругих стареющих тел, основанные на приведении к задачам теории упругости, а также математические методы их решения активно и успешно разрабатываются в рамках научной школы, созданной А.В. Манжировым (см., например, [4–6]).

На основе общих идей теории возмущений в работах А.Н. Спорыхина и его учеников развита трехмерная линеаризированнная теория устойчивости сложных сред, в том числе сред, обладающих одновременно упругими, вязкими и пластическими свойствами при малых и конечных докритических деформациях [см., например, 7, 8]. С использованием схемы Ивлева–Ершова [9] получен ряд приближенных решений одного класса цилиндрических задач для упруговязкопластических материалов [см., например, 10], в том числе с учетом температурных эффектов [11].

Настоящим исследованием авторы продолжают цикл работ Д.Д. Ивлева и его учеников в направлении получения аналитических зависимостей, описывающих напряженные состояния в плоских упругопластических задачах о толстых плитах с некруговыми отверстиями методом малого параметра.

В данной статье решается задача о распределении поля напряжений в толстой плите, ослабленной цилиндрической полостью с формой поперечного сечения близкой к правильной m-угольной (m – количество сглаженных углов многоугольника). Материал плиты моделируется стареющей средой с упруговязкопластическими свойствами. На бесконечности плита растягивается взаимно перпендикулярными усилиями с интенсивностями $P_1(t)$ и $P_2(t)$. По внутренней поверхности полости приложена равномерно распределенная нагрузка интенсивностью $P_0(t)$. Рассматривается такая схема нагружения, при которой в плите возникает зона пластического деформирования материала, полностью охватывающая внутреннюю поверхность цилиндрической полости. Необходимым условием реализации такого состояния является условие монотонного возрастания функциональных зависимостей $P_1(t)$ и $P_2(t)$. Задача решается методом малого параметра в рамках плоско-деформированного состояния в цилиндрической системе координат (ρ, θ, z), при этом ось $0z$ направлена вдоль цилиндрической полости.

В зоне неупругих деформаций выполняется условие наследственной пластичности [1]

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\sigma_\rho(t)-\sigma_\theta(t)}{k(t)}+\int_0^t\left(\sigma_\rho(\tau)-\sigma_\theta(\tau)\right)K^*(t,\tau)d\tau\right)^2+\left(\frac{\tau_{\rho\theta}}{k(t)}+\int_0^t K^*(t,\tau)\tau_{\rho\theta}(\tau)d\tau\right)^2=1 \qquad (1)$$

где $K^*(t,\tau)$ – ядро наследственного оператора [1–3], $k(t)$ – переменный предел текучести, σ_ρ, σ_θ, $\tau_{\rho\theta}$ – радиальная, тангенсальная и касательная компоненты тензора напряжений соответственно.

Решение будем проводить в рамках метода возмущений. В качестве малого параметра выберем величину δ, характеризующую отклонение формы рассматриваемого контура поперечного сечения полости от окружности, а также возмущение статических граничных условий. В этом случае все решения задачи представляются в виде рядов по степеням этого малого параметра [9, 10], при этом ограничимся только линейными по δ членами разложения

$$\sigma_\rho=\sigma_\rho^{(0)}+\delta\sigma_\rho^{(1)},\quad \sigma_\theta=\sigma_\theta^{(0)}+\delta\sigma_\theta^{(1)},\quad \tau_{\rho\theta}=\tau_{\rho\theta}^{(0)}+\delta\tau_{\rho\theta}^{(1)},\quad r_s(t)=r_s^{(0)}(t)+\delta r_s^{(1)}(t) \qquad (2)$$

где верхний индекс указывает на номер приближения, $r_s(t)$ – радиус упругопластической границы в плите.

В плоскости плиты, перпендикулярной оси $0Z$, согласно [10] запишем уравнение контура, ограничивающего отверстие в плите до деформации

$$\rho=\alpha\left(1+\delta d_1\cos m\theta-\ldots\right) \qquad (3)$$

где α – радиус кругового контура в невозмущенном состоянии.

Возмущение статических граничных условий примем в виде

$$\frac{P_1(t)-P_2(t)}{2}=\delta\cdot d_2 \qquad (4)$$

В соотношениях (3), (4) d_1, d_2 – константы, принимающие значения из отрезка [0, 1]. При этом вариант $d_1=0$, $d_2\neq 0$ – соответствует двухосному растяжению толстой плиты с круговым отверстием, а в случае $d_2 = 0,\ d_1 \neq 0$ имеет место плита с отверстием близким по форме к правильному m-угольному под действием нормального давления.

Решение проведем в безразмерных параметрах и переменных, оставив им их прежние обозначения. При этом величины, имеющие размерность напряжений, отнесем к — $k_\infty = \lim\limits_{t\to\infty} k(t)$; величины, имеющие размерность длины отнесем к радиусу $r_s^{(0)}(0)$ упругопластической границы в плите для нулевого приближения в начальный момент времени; время t отнесем к некоторой константе t_0, имеющей размерность времени.

В качестве нулевого приближения выберем осесимметричное состояние неограниченного пространства, содержащего цилиндрическую полость, имеющую в поперечном сечении форму окружности радиуса α. На бесконечности данная конструкция растягивается взаимно перпендикулярными усилиями с интенсивностью $P(t) = (P_1(t) + P_2(t))/k_\infty$.

В этом случае согласно [2, 3] поля напряжений в упругой области деформирования толстостенной плиты описываются формулами

$$\sigma_\rho^{(0)e} = P(t) - \frac{\varphi(t)k(t)}{\rho^2},\quad \sigma_\theta^{(0)e} = P(t) + \frac{\varphi(t)k(t)}{\rho^2},\quad \tau_{\rho\theta}^{(0)e} = 0 \tag{5}$$

в пластической зоне соотношениями

$$\sigma_\rho^{(0)p} = 2k(t)\varphi(t)\ln\left(\frac{\rho}{\alpha}\right) - P_0(t),\quad \sigma_\theta^{(0)p} = 2k(t)\varphi(t)\left(\ln\left(\frac{\rho}{\alpha}\right)+1\right) - P_0(t),\quad \tau_{\rho\theta}^{(0)p} = 0 \tag{6}$$

Здесь и далее индекс “p” вверху величин указывает их принадлежность к пластической зоне, а индекс “e” — к упругой, $\varphi(t)$ — функция от времени.

Радиус раздела зон упругого и пластического деформирования в толстой плите в нулевом приближении описывается следующим выражением

$$r_s^{(0)}(t) = \alpha\cdot\sqrt{\exp\left(\frac{P(t)-P_0(t)}{k(t)\varphi(t)} - 1\right)} \tag{7}$$

Знание аналитических зависимостей (5)—(7), описывающих нулевое приближение позволяет перейти к определению решения в первом приближении.

Граничные условия на бесконечности для первого приближения имеют вид [9]

$$\sigma_\rho^{e\infty} = P(t) - \delta d_2\cos 2\theta,\quad \sigma_\theta^{e\infty} = P(t) + \delta d_2\cos 2\theta,\quad \tau_{\rho\theta}^{e\ \infty} = \delta d_2\sin 2\theta \tag{8}$$

Общий вид линеаризованных условий сопряжения в напряжениях на упругопластической границе в плите для первого приближения описываются соотношениями

$$\left.\left[\sigma_{ij}^{(1)} + \frac{\partial\sigma_{ij}^{(0)}}{\partial\rho}r_s^{(1)}\right]\right|_{\rho=1} = 0 \tag{9}$$

В (9) и далее квадратные скобки обозначают разность стоящих в них величин в упругой и пластической областях.

Граничные условия на внутреннем контуре отверстия в толстой плите с учетом (3) и [1, 2, 12] представляются следующими выражениями

$$\left.\sigma_\rho^{(1)p}\right|_{\rho=\alpha} = -2d_1k(t)\varphi(t)\cos m\theta,\quad \left.\tau_{\rho\theta}^{(1)p}\right|_{\rho=\alpha} = -2md_1k(t)\varphi(t)\sin m\theta \tag{10}$$

В пластической области плиты $(\alpha < \rho < 1)$, согласно [1, 9, 10] и с учетом условий (10) выражения для напряжений в первом приближении имеют вид

$$\begin{gathered}\sigma_\rho^{(1)p} = \sigma_\theta^{(1)p} = \frac{2}{\rho}\alpha d_1 k(t)\varphi(t)(\sqrt{m^2-1}\sin\gamma - \cos\gamma)\cos m\theta,\\ \tau_{\rho\theta}^{(1)p} = \frac{2}{\rho} m\alpha d_1 k(t)\varphi(t)\cos\gamma\sin m\theta\end{gathered} \tag{11}$$

где величина $\gamma = \sqrt{m^2-1}\ln(\rho/\alpha)$.

В упругой области при $\rho > 1$ согласно [1, 3, 10, 13] и при учете граничных условий (8), напряженное состояние описывается формулами

$$\begin{gathered}\sigma_\rho^{(1)e} = d_2\left(\frac{4}{\rho^4} - \frac{3}{\rho^2} - 1\right)\cos 2\theta + \alpha d_1 k(t)\varphi(t)\left(\sqrt{m^2-1}\sin\gamma^*\left(\frac{(m+2)}{\rho^m} - \frac{m}{\rho^{-m-2}}\right) + \right.\\ \left. + \cos\gamma^*\left(\frac{(m+2)(m-1)}{\rho^m} - \frac{m(m+1)}{\rho^{-m-2}}\right)\right)\cos m\theta,\\ \sigma_\theta^{(1)e} = d_2\left(\frac{3}{\rho^4} + 1\right)\cos 2\theta + \alpha d_1 k(t)\varphi(t)\left(\sqrt{m^2-1}\sin\gamma^*\left(\frac{(m-2)}{\rho^m} + \frac{m}{\rho^{-m-2}}\right) + \right.\\ \left. + \cos\gamma^*\left(\frac{(m-2)(m-1)}{\rho^m} + \frac{m(m+1)}{\rho^{-m-2}}\right)\right)\cos m\theta,\\ \tau_{\rho\theta}^{(1)e} = d_2\left(1 - \frac{3}{\rho^4} + \frac{2}{\rho^2}\right)\cos 2\theta + m\alpha d_1 k(t)\varphi(t)\left(\sqrt{m^2-1}\sin\gamma^*\left(\frac{1}{\rho^m} - \frac{1}{\rho^{-m-2}}\right) + \right.\\ \left. + \cos\gamma^*\left(\frac{(m-1)}{\rho^m} - \frac{(m+1)}{\rho^{-m-2}}\right)\right)\end{gathered} \tag{12}$$

где $\gamma^* = \gamma\big|_{\rho=1}$.

Таким образом, полученные соотношения (11), (12) определяют напряженное состояние в толстой плите из стареющего упруговязкопластического материала для первого приближения.

Вид упругопластической границы в первом приближении $r_s^{(1)}$ определяется линеаризованным условием [2, 9]

$$r_s^{(1)} = -[\sigma_\theta^{(1)}]\cdot\left[\frac{\partial\sigma_\theta^{(0)}}{\partial\rho}\right]^{-1}\Bigg|_{\rho=1} \tag{13}$$

Из (13) с учетом (11), (12) получим соотношение для определения радиуса упругопластической границы в толстой плите для первого приближения в форме

$$r_s^{(1)} = \frac{d_2 r_s^{(0)}(t)}{k(t)\varphi(t)}\cos 2\theta + \alpha d_1(\sqrt{m^2-1}(m-2)\sin\gamma^* + m(m-1)\cos\gamma^*)\cos m\theta \tag{14}$$

Анализ выражений (11), (12), (14) показывает, что при постоянных нагрузках и $k(t) = k(0)$ решение совпадает с результатами упругопластической задачи [9, 10]; если в указанных соотношениях положить $d_1 = 0$, то приходим к решению [2] задачи о двухосном растяжении толстой плиты с круговым отверстием; если в соотно-

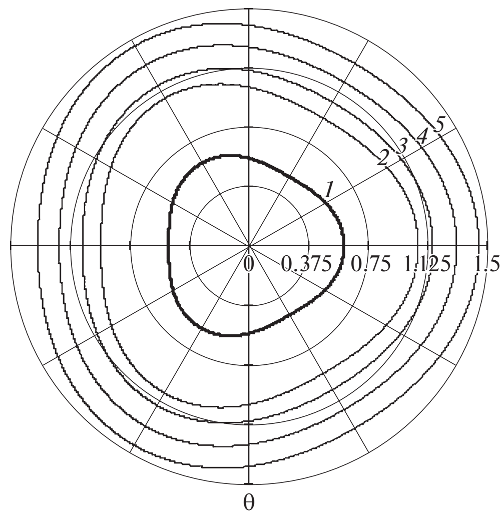

Рис. 1

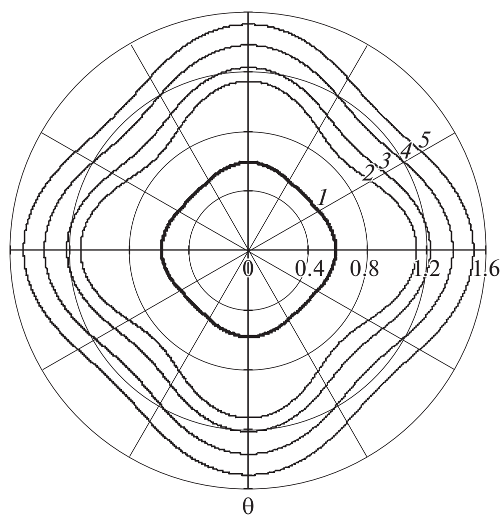

Рис. 2

шениях (11), (12), (14) принять $d_2 = 0$ и $m = 2$, то полученные решения совпадают с решениями [3] задачи о толстой плите с эллиптическим отверстием под действием нормального давления.

Для построения графических зависимостей, иллюстрирующих форму и размер упругопластической границы в плите в различные моменты времени, положим [3]

$$k(t) = \frac{1 - \beta \cdot e^{-\alpha t}}{1 - \beta}, \quad K(\tau) = \frac{\alpha\beta(1 - \beta) \cdot e^{-\alpha t}}{(1 - \beta \cdot e^{-\alpha t})^2}, \quad \varphi(t) = \frac{(1 - \beta \cdot e^{-\alpha t})^2}{(1 - \beta)^2}$$

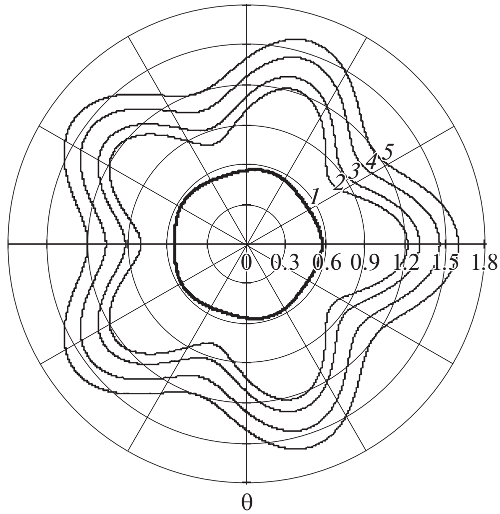

Рис. 3

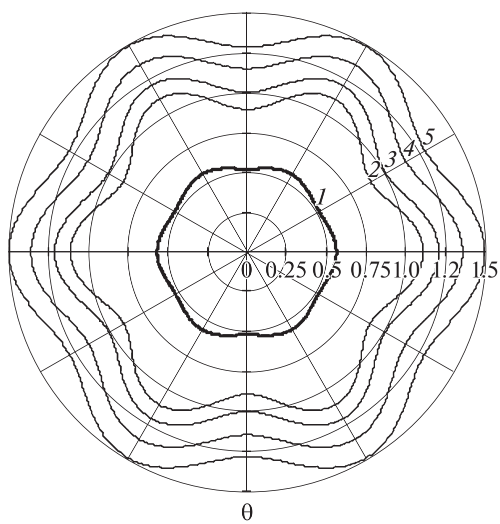

Рис. 4

В качестве оставшихся относительных исходных данных примем

$$P_0(t) = 0, \quad P_1(t) = 2 - 1.2 \cdot e^{-0.1t}, \quad P_2(t) = 1.84 - 1.2 \cdot e^{-0.1t},$$
$$\delta = 0.03, \quad d_1 = d_2 = 1, \quad \alpha = 0.5, \quad \beta = 0.2$$

На рисунках 1–4 представлены контур отверстия в плите (кривые *1*), а также форма и размер границы раздела зон упругого и пластического деформирования материала в различные моменты времени (кривые *2*, *3*, *4*, *5*) для случаев контура отверстия близкой к правильной треугольной форме ($m = 3$ – рис. 1), квадратной ($m = 4$ – рис. 2), правильной пятиугольной ($m = 5$ – рис. 3) и правильной шестиугольной ($m = 6$ – рис. 4). При этом на каждом из рисунков 1–4 кривые *2* соответствуют начальному моменту времени $t = 0$, кривые *3*, *4* – относительным моментам $t = 12, 20$, кривые *5* описывают положение и форму упругопластической границы при $t \to \infty$.

Отметим, что используемый в настоящей работе подход применения метода малого параметра для получения аналитических зависимостей, описывающих поля напряжений и перемещениях в толстых плитах с некруговыми отверстиями допускает обобщение на случаи более сложных моделей сред, предложенных в [1]. В частности данный подход может быть использован для получения аналитических зависимостей для модели наследственно неоднородно-стареющего трансляционно-упрочняющегося упруговязкопластического тела.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арутюнян Н.Х., Ивлев Д.Д.* К теории вязкопластичности неоднородно-стареющих тел // Изв. АН АрмССР. Механика. 1996. Т. 35. № 5. С. 22–26.

2. *Милявская Ф.Б.* Двуосное растяжение пластины с круговым отверстием из стареющего упругопластического материала // Краевые задачи и их приложения. Чебоксары: Чуваш. университет. 1986. С. 82–90.

3. *Милявская Ф.Б.* О двуосном растяжении толстой пластины с эллиптическим отверстием из стареющего материала // Краевые задачи и их приложения. – Чебоксары: Чуваш. университет. 1987. С. 169–174.

4. *Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В.* Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Институт механики НАН, 199. 320 с.

5. *Manzhirov A.V.* Fundamentals of mechanical design and analysis for am fabricated parts, *Procedia Manufacturing*. 2017. V. 7. P. 59–65.
https://doi.org/10.1016/j.promfg.2016.12.017

6. *Паршин Д.А.* Аналитические решения задачи об аддитивном формировании неоднородного упругого шарового тела в произвольном нестационарном центральном поле сил // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 5. С. 70–82.

7. *Спорыхин А.Н., Шашкин А.И.* Устойчивость равновесия пространственных тел и задачи механики горных пород. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 232 с.

8. *Андреева И.Ю., Гоцев Д.В., Спорыхин А.Н.* Устойчивость слоистой цилидрической оболочки с упруговязкопластическим заполнителем при нагружении // В сборнике: Современные проблемы механики и прикладной математики сб. трудов международной школы-семинара. Ответст. ред. А.Д. Чернышов. 2004. С. 20–23.

9. *Горностаев К.К., Ковалев А.В.* О симметричной деформации упрочняющейся упруговязкопластической трубы с учетом температуры // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 3 (25). С. 176–184.

10. *Ивлев Д.Д., Ершов Л.В.* Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.

11. *Спорыхин А.Н., Ковалев А.В., Щеглова Ю.Д.* Неодномерные задачи упруговязкопластичности с неизвестной границей. Воронеж: Изд-во ВГУ, 2004. 219 с.

12. *Ковалев А.В., Яковлев* Двухосное растяжение упругопластического пространства с призматическим включением // Современные методы в теории краевых задач. Воронежская весенняя математическая школа. 1999. С. 287.

13. *Бицено К.Б., Граммель Р.* Техническая динамика. Л.: Гостехиздат, 1950. Т. 1. 900 с.