ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2020, № 6, с. 59–64

УДК 517+531/534

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА НАД ТЕНЗОРНЫМИ ПОЛЯМИ ВЫСОКИХ РАНГОВ

Д. В. Георгиевский[a,b]

[a] *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

[b] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

**e-mail: georgiev@mech.math.msu.su*

Поступила в редакцию 28.02.2020 г.
После доработки 11.03.2020 г.
Принята к публикации 30.03.2020 г.

На тензорные поля произвольного ранга в многомерном пространстве естественным образом распространяются понятия операторов дивергенция, градиент, ротор, деформатор, а также их суперпозиций второго порядка. Приводятся два варианта обобщения ротора как внешнего произведения. Подробно рассматриваются дифференциальные операторы второго порядка, не меняющие ранг тензора, к которому применяются. Вводятся квадратные матрицы, состоящие из дифференциальных операторов $\mathrm{Div}_{(l)}\mathrm{Grad}_{(k)}$, $\mathrm{Grad}_{(k)}\mathrm{Div}_{(l)}$, и устанавливается их взаимосвязь. Выписывается явное выражение для повторного оператора ротор. Все введенные обобщенные операторы в частных случаях согласуются по своим свойствам с соответствующими им классическими в векторном и тензорном анализе операторами.

Ключевые слова: линейный дифференциальный оператор, дивергенция, градиент, ротор, лапласиан, деформатор, тензор, ранг, полиада, символ Леви-Чивиты

DOI: 10.31857/S0572329920060069

1. Обобщения операторов Div, Grad, Rot и их суперпозиции. Современные методы функционального анализа в приложениях механики и математической физики [1, 2] подразумевают оперирование в многомерном пространстве с тензорами, ранг которых больше двух. На такие объекты необходимо распространение понятий классических в векторном и тензорном анализе [3–6] линейных дифференциальных операторов первого порядка и их суперпозиций второго порядка.

Рассмотрим в пространстве R^n с декартовым базисом $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ дважды дифференцируемые тензорные поля $\mathbf{A}^{\{m\}}(\mathbf{x})$ ранга $m \ge 0$, задаваемые в полиаде $\mathbf{e}_{i_1}\otimes\ldots\otimes\mathbf{e}_{i_m}$ своими компонентами:

$$\mathbf{A}^{\{m\}}(\mathbf{x}) = A_{i_1\ldots i_m}(\mathbf{x})\,\mathbf{e}_{i_1}\otimes\ldots\otimes\mathbf{e}_{i_m},\quad 1\le i_1,\ldots,i_m\le n \tag{1.1}$$

Здесь и далее суммирование по повторяющимся два раза латинским индексам происходит от 1 до размерности n пространства. Запятая в индексе означает частное дифференцирование по координатам x с индексами, стоящими после запятой.

Как известно, в векторном и тензорном анализе выделяется три типа линейных дифференциальных операторов первого порядка, соответствующих разным видам умножения оператора набла $\nabla \equiv \mathbf{e}_i(\partial/\partial x_i)$ на объект. Применительно к тензорному полю (1.1) естественно построить их следующим образом.

1) Введем m операторов $\mathrm{Div}_{(l)}$, $l = 1,\ldots,m$; $m \geq 1$, каждый из которых понижает на единицу ранг объекта:

$$(\mathrm{Div}_{(l)}\mathbf{A}^{\{m\}})^{\{m-1\}} = \nabla \overset{(l)}{\cdot} (A_{i_1\ldots i_m}\mathbf{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_m}) \equiv A_{i_1\ldots i_m,i_l}\mathbf{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_{l-1}} \otimes \mathbf{e}_{i_{l+1}} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_m} \quad (1.2)$$

2) Введем $m+1$ операторов $\mathrm{Grad}_{(k)}$, $k = 1,\ldots,m+1$; $m \geq 0$, каждый из которых повышает на единицу ранг объекта:

$$\begin{gathered}(\mathrm{Grad}_{(k)}\mathbf{A}^{\{m\}})^{\{m+1\}} = \nabla \overset{(k)}{\otimes} (A_{i_1\ldots i_m}\mathbf{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_m}) \equiv \\ \equiv A_{i_1\ldots i_m,j}\mathbf{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_{k-1}} \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_{i_k} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_m}\end{gathered} \quad (1.3)$$

В случае $k = m+1$ вектор $\mathbf{e}_j$ присоединяется к полиаде справа от $\mathbf{e}_{i_m}$.

3) Оператор ротор Rot (в англоязычной литературе чаще принимается обозначение Curl, введенное еще Дж. Максвеллом и являющееся в векторном анализе полным синонимом символа Rot) на тензорные поля ранга m в n-мерном пространстве можно распространить несколькими способами. Приведем два из них, причем в одном используем обозначение Curl, а в другом для отличия Rot.

3a) По аналогии с выражениями (1.2), (1.3) с привлечением n-индексных символов Леви-Чивиты запишем

$$\begin{gathered}(\mathrm{Curl}_{(q)}\mathbf{A}^{\{m\}})^{\{n+m-3\}} = \nabla \overset{(q)}{\times} (A_{i_1\ldots i_m}\mathbf{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_m}) \equiv \\ \equiv \varepsilon_{j_1\ldots j_n}A_{i_1\ldots i_{q-1}j_n i_{q+1}\ldots i_m,j_{n-1}}\mathbf{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_{q-1}} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{j_{n-2}} \otimes \mathbf{e}_{i_{q+1}} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_m} \\ q = 1,\ldots,m; \quad m \geq 1\end{gathered} \quad (1.4)$$

Здесь векторное произведение $\nabla \times \mathbf{e}_{i_q}$ понимается [7] как внешнее произведение в R^n, представляющее собой тензор ранга $n-2$. Соответствующая этому тензору полиада $\mathbf{e}_{j_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{j_{n-2}}$ вставлена в (1.4) в исходную полиаду $\mathbf{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_m}$ вместо вектора $\mathbf{e}_{i_q}$. Тензор $\mathrm{Curl}_{(q)}\mathbf{A}^{\{m\}}$ (1.4) имеет ранг $n+m-3$, т. е. в трехмерном пространстве оператор Curl не меняет ранг объекта при любом m. В пространстве же любой другой размерности ранг не сохраняется. Повторный оператор Curl Curl делает ранг объекта $\mathbf{A}^{\{m\}}$ равным $n + (n+m-3) - 3 = 2n + m - 6$. Как и ранее, при $n = 3$ ранг объекта при любом m сохраняется, а при $n \neq 3$ обязательно меняется.

3b) Оператор $\mathrm{Rot}\,\mathbf{A}^{\{m\}}$ можно определить более просто, минуя этап с $\nabla \times \mathbf{e}_{i_q}$, как прямое внешнее произведение

$$\begin{gathered}(\mathrm{Rot}\,\mathbf{A}^{\{m\}})^{\{n-m-1\}} = \nabla \times \mathbf{A}^{\{m\}} \equiv \varepsilon_{i_1\ldots i_n}A_{i_{n-m+1}\ldots i_n,i_{n-m}}\mathbf{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_{n-m-1}} \\ 0 \leq m \leq n-1\end{gathered} \quad (1.5)$$

Ранг тензора $\mathrm{Rot}\,\mathbf{A}^{\{m\}}$ равен $n-m-1$. Лишь при $n = 2m+1$, что возможно только в нечетномерных пространствах, ранги $\mathrm{Rot}\,\mathbf{A}^{\{m\}}$ и самого тензора $\mathbf{A}^{\{m\}}$ совпадают. Это реализуется, например, при $n = 3$ и $m = 1$, когда речь идет о классическом понятии ротора векторного поля в R^3. Заметим, что в двумерном пространстве ротор вектора — скалярная величина, так же как и ротор тензора второго ранга в трехмерном пространстве. Повторный оператор Rot Rot, о котором пойдет речь в дальнейшем, не меняет ранг объекта ни при каких n и m, удовлетворяющих неравенствам $0 \leq m \leq n-1$. Данный факт делает предпочтительнее определение (1.5) в сравнении с (1.4) с точки зрения обобщения со случая $n = 3$, $m = 1$, когда

$$\mathrm{Curl}_{(1)}\mathbf{A}^{\{1\}} = \mathrm{Rot}\,\mathbf{A}^{\{1\}}$$

Из-за наличия в (1.5) символов Леви-Чивиты тензор $\mathrm{Rot}\,\mathbf{A}^{\{m\}}$ антисимметричен по перестановке любой пары своих $n - m - 1$ индексов, что сокращает число его линейно независимых компонент до C_n^{n-m-1}, или C_n^{m+1}.

Из выражений (1.2), (1.3), (1.5) суперпозициями можно образовать девять типов линейных дифференциальных операторов второго порядка. Два из них тождественно нулевые:

$$\begin{gathered}(\mathrm{Div}_{(l)}\mathrm{Rot}\,\mathbf{A}^{\{m\}})^{\{n-m-2\}} = (\mathrm{Rot}\,\mathrm{Grad}_{(k)}\mathbf{A}^{\{m\}})^{\{n-m-2\}} \equiv 0^{\{n-m-2\}} \\ l = 1,\ldots,n-m-1; \quad k = 1,\ldots,m+1; \quad 0 \le m \le n-2\end{gathered} \tag{1.6}$$

В R^3 при $m = 1$, $l = 1$ и при $m = 0$, $k = 1$ равенства (1.6) приводят к двум известным тождествам векторного анализа.

Среди оставшихся семи типов интерес в приложениях механики и математической физики представляют суперпозиции, оставляющие ранг объекта неизменным. Таких типов три:

$$\mathrm{rang}\,(\mathrm{Div}_{(l)}\mathrm{Grad}_{(k)}\mathbf{A}^{\{m\}}) = m, \quad l,k = 1,\ldots,m+1$$

$$\mathrm{rang}\,(\mathrm{Grad}_{(k)}\mathrm{Div}_{(l)}\mathbf{A}^{\{m\}}) = m, \quad l,k = 1,\ldots,m$$

$$\mathrm{rang}\,(\mathrm{Rot}\,\mathrm{Rot}\mathbf{A}^{\{m\}}) = n - (n-m-1) - 1 = m$$

2. Матрицы, состоящие из операторов $\mathrm{Div}_{(l)}\mathrm{Grad}_{(k)}$, $\mathrm{Grad}_{(k)}\mathrm{Div}_{(l)}$, и их связь. Согласно определениям (1.2) и (1.3)

$$\begin{gathered}(\mathrm{Div}_{(l)}\mathrm{Grad}_{(k)}\mathbf{A}^{\{m\}})^{\{m\}} = \\ = A_{i_1\ldots i_m,i_l j}\mathbf{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_{l-1}} \otimes \mathbf{e}_{i_{l+1}} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_{k-1}} \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_{i_k} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_m} \\ \text{если} \quad 1 \le l < k \le m+1\end{gathered} \tag{2.1}$$

$$\begin{gathered}(\mathrm{Div}_{(l)}\mathrm{Grad}_{(k)}\mathbf{A}^{\{m\}})^{\{m\}} = \\ = A_{i_1\ldots i_m,i_l j}\mathbf{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_{k-1}} \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_{i_k} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_{l-1}} \otimes \mathbf{e}_{i_{l+1}} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_m} \\ \text{если} \quad 1 \le k < l \le m+1\end{gathered} \tag{2.2}$$

$$\begin{gathered}(\mathrm{Div}_{(l)}\mathrm{Grad}_{(k)}\mathbf{A}^{\{m\}})^{\{m\}} = A_{i_1\ldots i_m,jj}\mathbf{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_m} \equiv \Delta\mathbf{A}^{\{m\}} \\ \text{если} \quad 1 \le l = k \le m+1\end{gathered} \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered}(\mathrm{Grad}_{(k)}\mathrm{Div}_{(l)}\mathbf{A}^{\{m\}})^{\{m\}} = \\ = A_{i_1\ldots i_m,i_l j}\mathbf{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_{k-1}} \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_{i_k} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_{l-1}} \otimes \mathbf{e}_{i_{l+1}} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_m} \\ \text{если} \quad 1 \le k < l \le m\end{gathered} \tag{2.4}$$

$$\begin{gathered}(\mathrm{Grad}_{(k)}\mathrm{Div}_{(l)}\mathbf{A}^{\{m\}})^{\{m\}} = \\ = A_{i_1\ldots i_m,i_l j}\mathbf{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_{l-1}} \otimes \mathbf{e}_{i_{l+1}} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_{k-1}} \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_{i_k} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_m} \\ \text{если} \quad 1 \le l < k \le m\end{gathered} \tag{2.5}$$

$$\begin{gathered}(\mathrm{Grad}_{(k)}\mathrm{Div}_{(l)}\mathbf{A}^{\{m\}})^{\{m\}} = \\ = A_{i_1\ldots i_m,i_l j}\mathbf{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_{l-1}} \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_{i_{l+1}} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_m}, \quad \text{если} \quad 1 \le l = k \le m\end{gathered} \tag{2.6}$$

Набор $\mathrm{Div}_{(l)}\mathrm{Grad}_{(k)}$ представим в форме квадратной матрицы Q_{lk} размером $(m+1)\times$ $\times(m+1)$, на главной диагонали которой стоит лапласиан (2.3). Диагонали, находящиеся непосредственно над и под главной, насчитывают по m элементов и совпадают друг с другом. Это видно, если положить $k=l+1$ в (2.1) и $l=k+1$ в (2.2) и сравнить результаты:

$$(\mathrm{Div}_{(l)}\mathrm{Grad}_{(l+1)}\mathbf{A}^{\{m\}})^{\{m\}}=(\mathrm{Div}_{(l+1)}\mathrm{Grad}_{(l)}\mathbf{A}^{\{m\}})^{\{m\}},\quad 1\le l\le m \tag{2.7}$$

Таким образом, из $(m+1)^2$ элементов Q_{lk} линейно независимыми являются $(m+1)^2-$ $-m-m=m^2+1$.

Набор $\mathrm{Grad}_{(k)}\mathrm{Div}_{(l)}$ представи́м квадратной матрицей S_{kl} размером $m\times m$, все m^2 элементов которой линейно независимы. Из соотношений (2.1)–(2.6) устанавливается следующая связь матриц S_{kl} и Q_{lk}:

$$(\mathrm{Grad}_{(k)}\mathrm{Div}_{(l)}\mathbf{A}^{\{m\}})^{\{m\}}=\begin{cases}(\mathrm{Div}_{(l+1)}\mathrm{Grad}_{(k)}\mathbf{A}^{\{m\}})^{\{m\}}, & 1\le k\le l\le m\\ (\mathrm{Div}_{(l)}\mathrm{Grad}_{(k+1)}\mathbf{A}^{\{m\}})^{\{m\}}, & 1\le l\le k\le m\end{cases} \tag{2.8}$$

Случай $k=l$ в (2.8) приводит к тому, что главная диагональ матрицы S_{kl} совпадает с диагоналями Q_{lk}, находящимися над и под главной (они одинаковы, о чем говорит равенство (2.7)).

Итак, все элементы массива S_{kl} в силу (2.8) присутствуют в массиве Q_{lk}, в то время как в S_{kl} отсутствует оператор Лапласа $Q_{11}=\ldots=Q_{m+1,m+1}$. Поэтому число m^2+1 линейно независимых элементов Q_{lk} на единицу больше m^2 – числа линейно независимых элементов S_{kl}.

В терминах введенных обозначений, например, квазистатические уравнения Ламе для вектора перемещений $\mathbf{u}$ ($m=1$, $n\ge 1$) можно записать в одной из следующих форм

$$((\lambda+\mu)S_{11}+\mu Q_{11})\mathbf{u}=0,\quad ((\lambda+\mu)Q_{12}+\mu Q_{22})\mathbf{u}=0 \tag{2.9}$$

На абсолютно симметричное тензорное поле $\mathbf{A}^{\{m\}}$ обобщается и оператор деформатор Def, связывающий в геометрически линейной теории вектор перемещений и тензор малых деформаций: $\boldsymbol{\varepsilon}^{\{2\}}=\mathrm{Def}\,\mathbf{u}$; $\varepsilon_{i_1i_2}=(u_{i_1i_2}+u_{i_2i_1})/2$. Для также абсолютно симметричного обобщенного деформатора $\mathbf{B}^{\{m+1\}}=\mathrm{Def}\,\mathbf{A}^{\{m\}}$ имеем

$$B_{i_1\ldots i_{m+1}}=\frac{1}{m}(A_{i_1\ldots i_m,i_{m+1}}+A_{i_2\ldots i_{m+1},i_1}+\ldots+A_{i_{m+1}i_1\ldots i_{m-1},i_m}) \tag{2.10}$$

В работах [8, 9] анализируются условия совместности компонент $B_{i_1\ldots i_{m+1}}$, для чего в рассмотрение вводится тензор несовместности Кренера с двумерным массивом индексов.

3. Оператор Rot Rot. Свойства оператора Rot Rot, или Curl Curl, находятся в центре внимания специалистов по спектральной теории операторов, о чем свидетельствуют публикации [10–13] последних лет.

Из определения (1.5) следует, что повторное применение операции Rot приводит к выражению

$$\begin{gathered}(\mathrm{Rot}\,\mathrm{Rot}\,\mathbf{A}^{\{m\}})^{\{m\}}=\\ =\varepsilon_{i_1\ldots i_{m+1}j_1\ldots j_{n-m-1}}\varepsilon_{j_1\ldots j_n}A_{j_{n-m+1}\ldots j_n,j_{n-m}i_{m+1}}\mathbf{e}_{i_1}\otimes\ldots\otimes\mathbf{e}_{i_m},\quad 0\le m\le n-1\end{gathered} \tag{3.1}$$

упрощение которого связано с правилами свертки двух символов Леви-Чивиты по группе повторяющихся индексов. Эти правила основаны на формулах

$$\varepsilon_{i_1\ldots i_n}\varepsilon_{j_1\ldots j_n} \equiv \delta^{i_1\ldots i_n}_{j_1\ldots j_n} = \begin{vmatrix} \delta_{i_1 j_1} & \ldots & \delta_{i_1 j_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta_{i_n j_1} & \ldots & \delta_{i_n j_n} \end{vmatrix} \tag{3.2}$$

$$\begin{gathered}\varepsilon_{i_1\ldots i_{m+1}j_1\ldots j_{n-m-1}}\varepsilon_{j_1\ldots j_n} \equiv \delta^{i_1\ldots i_{m+1}j_1\ldots j_{n-m-1}}_{j_1\ldots j_n} = (-1)^{(m+1)(n-m-1)}\delta^{i_1\ldots i_{m+1}j_1\ldots j_{n-m-1}}_{j_{n-m}\ldots j_n j_1\ldots j_{n-m-1}} = \\ = (-1)^{(m+1)(n-m-1)}(n-m-1)!\delta^{i_1\ldots i_{m+1}}_{j_{n-m}\ldots j_n}\end{gathered} \tag{3.3}$$

Подставляя (3.3) в (3.1), получим

$$\begin{gathered}(\operatorname{Rot}\operatorname{Rot}\mathbf{A}^{\{m\}})^{\{m\}} = \\ = (-1)^{(m+1)(n-m-1)}(n-m-1)!\delta^{i_1\ldots i_{m+1}}_{j_{n-m}\ldots j_n} A_{j_{n-m+1}\ldots j_n, j_{n-m}i_{m+1}}\mathbf{e}_{i_1}\otimes\ldots\otimes\mathbf{e}_{i_m}\end{gathered} \tag{3.4}$$

Остановимся на частных случаях выражения (3.4) для первых трех m. Второе из них при $n = 3$ представляет собой хорошо известную из векторного анализа формулу.

$m = 0$; $A(\mathbf{x})$ – скалярное поле в R^n:

$$\operatorname{Rot}\operatorname{Rot}A = (-1)^{n-1}(n-1)!\delta^{i_1}_{j_n}A_{j_n i_1} = (-1)^{n-1}(n-1)!\,\Delta A$$

$m = 1$; $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ – векторное поле в R^n:

$$\begin{gathered}\operatorname{Rot}\operatorname{Rot}\mathbf{A} = (n-2)!\,\delta^{i_1 i_2}_{j_{n-1}j_n}A_{j_n, j_{n-1}i_2}\mathbf{e}_{i_1} = \\ = (n-2)!\,(A_{i_2,i_2 i_1} - A_{i_1,i_2 i_2})\mathbf{e}_{i_1} = (n-2)!\,(\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A})7\end{gathered}$$

$m = 2$; $\mathbf{A}^{\{2\}}(\mathbf{x})$ – тензорное поле второго ранга в R^n:

$$\begin{gathered}\operatorname{Rot}\operatorname{Rot}\mathbf{A}^{\{2\}} = (-1)^{n-1}(n-3)!\,\delta^{i_1 i_2 i_3}_{j_{n-2}j_{n-1}j_n}A_{j_{n-1}j_n, j_{n-2}i_3}\mathbf{e}_{i_1}\otimes\mathbf{e}_{i_2} = \\ = (-1)^{n-1}(n-3)!\,[(A_{i_2 i_3} - A_{i_3 i_2})_{,i_1 i_3} + (A_{i_3 i_1} - A_{i_1 i_3})_{,i_2 i_3}) + \\ + (A_{i_1 i_2} - A_{i_2 i_1})_{,i_3 i_3})]\mathbf{e}_{i_1}\otimes\mathbf{e}_{i_2} = (-1)^{n-1}(n-3)!\,[(\operatorname{Grad}_{(1)}\operatorname{Div}_{(2)} - \\ - \operatorname{Grad}_{(1)}\operatorname{Div}_{(1)} + \operatorname{Grad}_{(2)}\operatorname{Div}_{(1)} - \operatorname{Grad}_{(2)}\operatorname{Div}_{(2)})\mathbf{A}^{\{2\}} + \Delta(\mathbf{A}^{\{2\}} - \mathbf{A}^{\{2\}T})]\end{gathered}$$

С ростом m число слагаемых вида $\operatorname{Grad}_{(k)}\operatorname{Div}_{(l)}$ быстро нарастает, и выписывание общей связи оператора $\operatorname{Rot}\operatorname{Rot}\mathbf{A}^{\{m\}}$ с элементами матрицы S_{kl} и лапласианами довольно громоздко и затруднительно.

Работа выполнена в рамках госзадания АААА-А20-120011690136-2 при поддержке РФФИ (гранты 18-29-10085мк, 19-01-00016а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lebedev L.P., Vorovich I.I.* Functional Analysis in Mechanics. N.-Y.: Springer, 2003. 238 p.
2. *Васильев В.В.* Сингулярные решения в задачах механики и математической физики // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 4. С. 48–65.
3. *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Изд-во УРСС, 2003. 664 с.
4. *Победря Б.Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1986. 264 с.
5. *Димитриенко Ю.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. Тензорный анализ. М.: Изд-во МГТУ, 2011. 464 с.
6. *Никабадзе М.У.* Некоторые вопросы тензорного исчисления. М.: ЦПИ МГУ, 2007. Ч. I. 86 с. Ч. II. 94 с.

7. *Георгиевский Д.В., Шамолин М.В.* Символы Леви-Чивиты, обобщенные векторные произведения и новые случаи интегрируемости в механике многомерного тела // Современная математика и ее приложения. 2012. Т. 76. С. 22–39.
8. *Георгиевский Д.В.* Уравнения совместности в системах, основанных на обобщенных кинематических соотношениях Коши // Изв. РАН. МТТ. 2014. № 1. С. 127–132.
9. *Георгиевский Д.В.* Деформаторы высоких рангов и тензоры несовместности Кренера с двумерной структурой индексов // Докл. РАН. 2019. Т. 486. № 4. С. 430–432.
10. *Ciarlet P.G., Ciarlet P. (Jr.), Geymonat G., Krasucki F.* Characterization of the kernel of the operator CURL CURL // C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. 2007. V. 344. P. 305–308.
11. *Zeng X.* Cylindrically symmetric ground state solutions for curl-curl equations with critical exponent // ZAMP. 2017. V. 68. № 6. Art. 135. 12 p.
12. *Mederski J.* The Bresis–Nirenberg problem for the curl-curl operator // J. Funct. Anal. 2018. V. 274. № 5. P. 1345–1380.
13. *Zhang Z.* Comparison results for eigenvalues of curl curl operator and Stokes operator // ZAMP. 2018. V. 69. № 4. Art. 104. 7 p.