ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2020, № 6, с. 40–49

УДК 539.374

КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫЕ ПЛАСТИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ КАК СРЕДСТВО РАСЧЕТОВ ПЛОСКИХ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

А. А. Буренин[a], А. В. Ткачева[a,*]

[a] *Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, Комсомольск-на-Амуре, Россия*
**e-mail: 4nansi4@mail.ru*

Поступила в редакцию 18.07.2020 г.
После доработки 23.07.2020 г.
Принята к публикации 01.08.2020 г.

Строится численно-аналитическое решение одномерной задачи теории температурных напряжений об эволюции плоских напряженных состояний в условиях нагрева и последующего остывания круглой пластины, изготовленной из упругопластического материала. Пластина подвергается нагреву так, что растет пропорционально времени уровень колоколообразного распределения температуры до задаваемого максимального значения. После этого источник нагрева отводится и далее остывание происходит в естественных условиях. Показано, что при следовании условиям кусочно-линейных пластических потенциалов в любой рассчитываемый момент времени процесса деформирования интегрированием уравнения равновесия устанавливаются зависимости, связывающие обратимые и необратимые деформации и напряжения с распределением температуры. Предел текучести полагается квадратично зависимым от температуры; упругие модули, удельная теплоемкость и коэффициент теплового расширения считаются постоянными. Установлено, что рассматриваемая задача в рамках пластического потенциала Треска–Сен-Венана решения не имеет, но разрешается в рамках пластического потенциала Ишлинского–Ивлева.

Ключевые слова: упругость, пластичность, температурные напряжения, пластическое течение, разгрузка, обратное пластическое течение

DOI: 10.31857/S0572329920060057

Введение. Заметный прогресс в развитии теории пластического течения в прошлом веке во многом определялся использованием кусочно-линейных пластических потенциалов [1–4]. Именно с помощью кусочно-линейных класических условий пластического течения максимальных касательных напряжений (условия Треска–Сен-Венана) и максимальных приведенных напряжений (условие Ишлинского–Ивлева) удалось получить решения задач теории [5–9], важных как для развития фундаментальной теории, так и для ее многочисленных приложений.

При решении конкретных и проблемных задач теории пластического течения используется, главным образом, условие пластичности Треска–Сен-Венана. Также кусочно-линейное условие пластического течения Ишлинского–Ивлева в подобном использовании наблюдается значительно реже. Возможно потому, что в сравнении с условием Треска–Сен-Венана (максимальных касательных напряжений) и Мизеса (максимальной интенсивности или максимальных октаэдрических напряжений) оно не обладает столь прозрачным механическим смыслом. Записано оно было значительно позже [10] первых двух, ставших уже к тому времени общепризнанными. В широкую исследовательскую и расчетную практику условие максимальных приведенных напряжений было введено А.Ю. Ишлинским [11] и Д.Д. Ивлевым [1, 12]. После этого оно заслуженно становится [1, 4] третьим после условий Треска—Сен-Венана и Мизеса классическим условием пластического течения, составившим вместе с ними основание теории идеальной пластичности [3, 4, 6, 13].

Условие пластичности максимальных приведенных напряжений успешно использовалось при разрешении разных задач необратимого деформирования [6, 14—16], включая и задачи теории неустановившихся температурных напряжений [17—19]. При этом установлено [18], что имеются задачи, которые при зависимости предела текучести от температуры не имеют решения в условиях пластичности Треска—Сен-Венана, но в то же время благополучно разрешаются в условиях Ишлинского—Ивлева. Здесь рассмотрим отмечающуюся этим же свойством задачу неустановившихся температурных напряжений о численно-аналитическом расчете эволюции плоских напряженных состояний при нагреве и последующем остывании круглой пластины.

Необходимо отметить, что благодаря постоянному и требовательному вниманию со стороны технологической практики, теория термопластичности [20—22] и, в частности, теория температурных напряжений [23—28] остаются уверенно развиваемыми направлениями исследований.

1. Основные соотношения теории неустановившихся температурных напряжений запишем в виде:

$$
\begin{gathered}
\mathbf{e} = \mathbf{e}^{\mathbf{e}} + \mathbf{e}^{\mathbf{p}} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla^T\mathbf{u}) \\
\boldsymbol{\sigma} = (\lambda tr\mathbf{e}^{\mathbf{e}} - 3\alpha T_0 K\theta)\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{e}^{\mathbf{e}} \\
d\mathbf{e}^{\mathbf{p}} = d\varphi\frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, k)}{\partial\boldsymbol{\sigma}}; \quad f(\boldsymbol{\sigma}, k) = 0; \quad d\varphi > 0 \\
\frac{\partial\theta}{\partial t} = a\Delta\theta - w(t, \mathbf{z}); \quad \theta = \frac{T - T_0}{T_0}
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

В (1.1) t — время, $\mathbf{z}$ — радиус вектор места, занимаемого расматриваемой точкой деформируемого тела; $\mathbf{u}$ — вектор перемещения; $\mathbf{e}^{\mathbf{e}}$, $\mathbf{e}^{\mathbf{p}}$ — обратимая и необратимая составляющие тензора полных деформаций $\mathbf{e}$; $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений; $\mathbf{I}$ — единичный тензор второго ранга; $f(\boldsymbol{\sigma}, k) = 0$ — уравнение поверхности нагружения (текучести); T, T_0 — текущая температура и температура свободного состояния тела; $w(t, \mathbf{z})$ — скалярная функция, задающая интенсивность источников тепла в теле. Упругие модули Ламе λ и μ, модуль всестороннего сжатия $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$, коэффициент линейного расширения α далее будем считать постоянными, от температуры независимыми. Только предел текучести k полагаем изменяющимся с изменением температуры и такую зависимость принимаем в форме

$$
k = k_0\tau^2; \quad \tau = T_0(T_p - T_0)^{-1}\theta \tag{1.2}
$$

T_p — температура плавления материала неизотермически деформируемого тела, k_0 — предел текучести материала при комнатной температуре T_0.

Далее массовыми силами и силами инерции пренебрегаем, поэтому уравнение равновесия запишется в форме

$$
\nabla\boldsymbol{\sigma} = 0 \tag{1.3}
$$

Записанные соотношения для своей замкнутости требуют указания условия пластического течения. Здесь будем использовать классические кусочно-линейные условия

$$\max\left|\sigma_i - \sigma_j\right| = 2k \tag{1.4}$$

$$\max\left|\sigma_i - \sigma\right| = \frac{4}{3}k; \quad \sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \tag{1.5}$$

Первое из соотношений называется условием максимальных касательных напряжений Треска—Сен-Венана, второе — условием максимальных приведенных Ишлинского—Ивлева.

2. Температурная задача. Рассмотрим круглую пластинку радиуса R, край которой закреплен. В цилиндрической системе координат r, φ, z последнее означает, что

$$u_r(0,t) = 0; \quad u_r(R,t) = 0 \tag{2.1}$$

где u_r — компонента вектора перемещений.

Нагрев пластины осуществляется источником, сообщающим пластине колоколообразное распределение температуры с растущим ее максимумом в центре пластины. Это позволяет задать источник в виде

$$\omega(t,r) = \beta t e^{-\gamma r^{2n}} \tag{2.2}$$

Уравнение теплопроводности (последнее равенство в (1.1)) теперь в цилиндрической системе координат перепишем в форме

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = a(r\theta_{,r})_{,r} + \beta t e^{-\gamma r^{2n}} - \chi\theta \tag{2.3}$$

Коэффициент теплоотдачи χ от пластины в окружающую среду будем считать постоянным. Если пренебречь теплоотводом от кромки $r = R$ пластины, то начальными и граничными условиями для (2.3) будут

$$\theta(r,0) = 0; \quad \theta_{,r}(R,t) = 0 \tag{2.4}$$

Температурная задача (2.3) и (2.4) разрешается до той поры, пока температура в центре пластины не достигнет своего задаваемого максимального значения $T = T_*$. Следовательно, после того как $\theta = T^{-1}T_* - 1$ предпоследнее слагаемое правой части из уравнения теплопроводности (2.3) исключается. Рис. 1 иллюстрирует решение температурной задачи до момента отвода источника тепла. Графически указано распределение температуры в ее росте со временем до максимальной (верхний график) при следующих значениях постоянной задачи: $a = 77.1 \times 10^{-6}$ м^2/с; $\chi = 7.6$ Вт/(м$^2 \cdot$ °С); $\beta = 20$ с$^{-2}$; $\gamma = 880$ см$^{-2}$ (рис. 1, a); $\gamma = 220$ см$^{-2}$(рис. 1, b); $T_p = 660$°С, $T_0 = 20$°С.

3. **Начальное термоупругое деформирование** происходит в согласии с уравнением равновесия (1.3), которое в рассмотренном случае запишется в виде

$$\sigma_{r,r} + r^{-1}(\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0 \tag{3.1}$$

Напряжения $\sigma_{rr} = \sigma_r$, $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_\varphi$, $\sigma_{zz} = \sigma_z = 0$ в рассматриваемом случае являются главными напряжениями. Исходя из соотношений Дюамеля—Неймана (1.1) и исключая с их помощью $u_{z,\,z}$, найдем

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= (4\mu(\lambda + \mu)u_{r,r} + 2\lambda\mu r^{-1}u_r - 6K\mu\alpha T_0\theta)(\lambda + 2\mu)^{-1} \\
\sigma_\varphi &= (4\mu(\lambda + \mu)r^{-1}u_r + 2\lambda\mu u_{r,r} - 6K\mu\alpha T_0\theta)(\lambda + 2\mu)^{-1}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

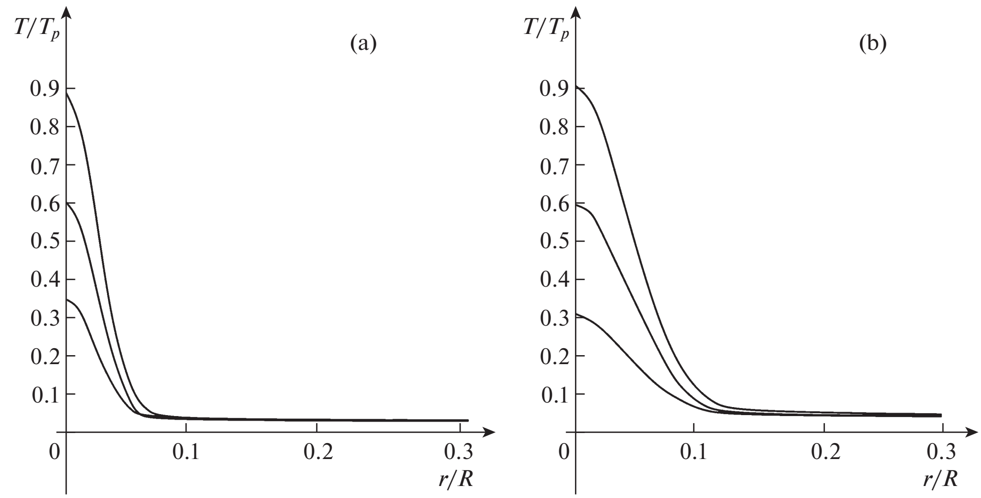

Рис. 1

Подстановка (3.2) в (3.1) и интегрирование результата приводит к зависимостям

$$u_r = 1.5Kr^{-1}(\lambda+\mu)^{-1}\alpha T_0\int_0^r \rho\theta(\rho)\,d\rho + 0.5rC_1(t) + r^{-1}C_2(t) \tag{3.3}$$

$$\sigma_r = -3K\mu r^{-2}(\lambda+\mu)^{-1}\alpha T_0\int_0^r \rho\theta(\rho)\,d\rho + 3K\mu(\lambda+2\mu)^{-1}C_1(t) - 2\mu r^{-2}C_2(t)$$

$$\sigma_\varphi = 3K\mu r^{-2}(\lambda+\mu)^{-1}\alpha T_0\int_0^r \rho\theta(\rho)\,d\rho - 3K\mu(\lambda+\mu)^{-1}\alpha T_0\theta + \tag{3.4}$$

$$+\,3K\mu(\lambda+2\mu)^{-1}C_1(t) + 2\mu r^{-2}C_2(t)$$

Выполняя граничные условия (2.1), найдем

$$C_1 = -3KR^{-2}(\lambda+\mu)^{-1}\alpha T_0\int_0^R \rho\theta(\rho)\,d\rho; \quad C_2 = 0$$

4. Пластическое течение. С ростом температуры растут и напряжения. Наступает момент времени $t = t_1 > 0$ когда напряжения, рассчитываемые согласно (3.4), удовлетворяют условиям пластического течения (1.4) или (1.5). Расчеты показывают, что в момент времени $t = t_1$ напряжения σ_r и σ_φ одинаковы и равны $\sigma_r = \sigma_\varphi = -2k$. Одновременно выполняются условие Треска–Сен-Венана и условие Ишлинского–Ивлева (см. рис. 2). Только условие максимальных касательных напряжений выполняется в соответствии ребру призмы Треска (условие полной пластичности), а условие максимальных приведенных напряжений в соответствии грани призмы Ивлева. На рис. 2 указано пересечение призмы Треска (внутренний шестиугольник) и призмы Ивлева (внешний шестиугольник) с координатной плоскостью $\sigma_z = 0$.

Если принять, что осуществляется состояние полной пластичности [1, 4, 5] в соответствии напряжений ребру призмы Треска, то согласно уравнению равновесия (3.1) имеем $\sigma_{r,r} = 0$. Выполнить условие $\sigma_r = \mathrm{const}$ невозможно, поскольку k и σ_r уже задаются распределением по r температуры. Следовательно, невозможно в таком случае

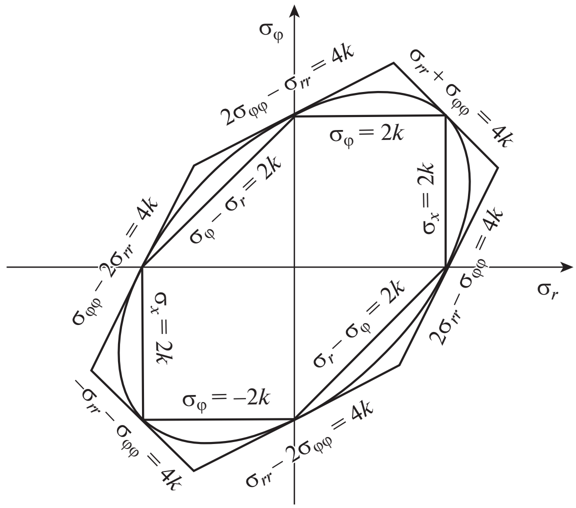

Рис.2

получить решение задачи теории из-за того, что она оказывается переопределенной вследствие зависимости предела текучести от температуры.

Остается считать, что начавшееся пластическое течение соответствует грани $\sigma_r + \sigma_\varphi = -4k$ призмы Ивлева (рис. 2). Следовательно, в момент времени $t = t_1$ в центре пластины зарождается и продвигается далее по пластине упругопластическая граница $r = n_1(t)$, оставляя за собой область пластического течения (рис. 3) $0 \le r \le n_1(t)$. В этой области

$$
\begin{gathered}
\sigma_r = (4\mu(\lambda+\mu)(u_{r,r} - e_r^p) + 2\lambda\mu(r^{-1}u_r - e_\phi^p) - 6K\mu\alpha T_0\theta)(\lambda+2\mu)^{-1} \\
\sigma_\varphi = (4\mu(\lambda+\mu)(r^{-1}u_r - e_\varphi^p) + 2\lambda\mu(u_{r,r} - e_r^p) - 6K\mu\alpha T_0\theta)(\lambda+2\mu)^{-1} \\
e_r^p = e_\varphi^p
\end{gathered}
\tag{4.1}
$$

Подстановка (4.1) в уравнение равновесия (3.1) и последующее интегрирование результата приводит к зависимостям

$$
\begin{gathered}
u_r = 2(\mu r)^{-1}\int_0^r \rho k(\rho)d\rho + 0.5rC_3(t) + r^{-1}C_4(t) \\
\sigma_r = -4r^{-2}\int_0^r \rho k(\rho)d\rho - 2r^{-2}\mu C_4(t) \\
e_r^p = 4((3\mu)^{-1} + (6K)^{-1})k - \alpha T_0\theta + 0.5C_3(t)
\end{gathered}
\tag{4.2}
$$

В рассматриваемый момент времени постоянные $C_3(t)$ и $C_4(t)$ вместе с новыми значениями $C_1(t)$ и $C_2(t)$ и положением упругопластической границы $r = n_1(t)$ определяются при выполнении граничных условий (2.1), условия пластичности и условий на граничной линии $r = n_1(t)$

$$
[u_r]\big|_{n_1(t)} = 0; \quad [\sigma_r]\big|_{n_1(t)} = 0 \tag{4.3}
$$

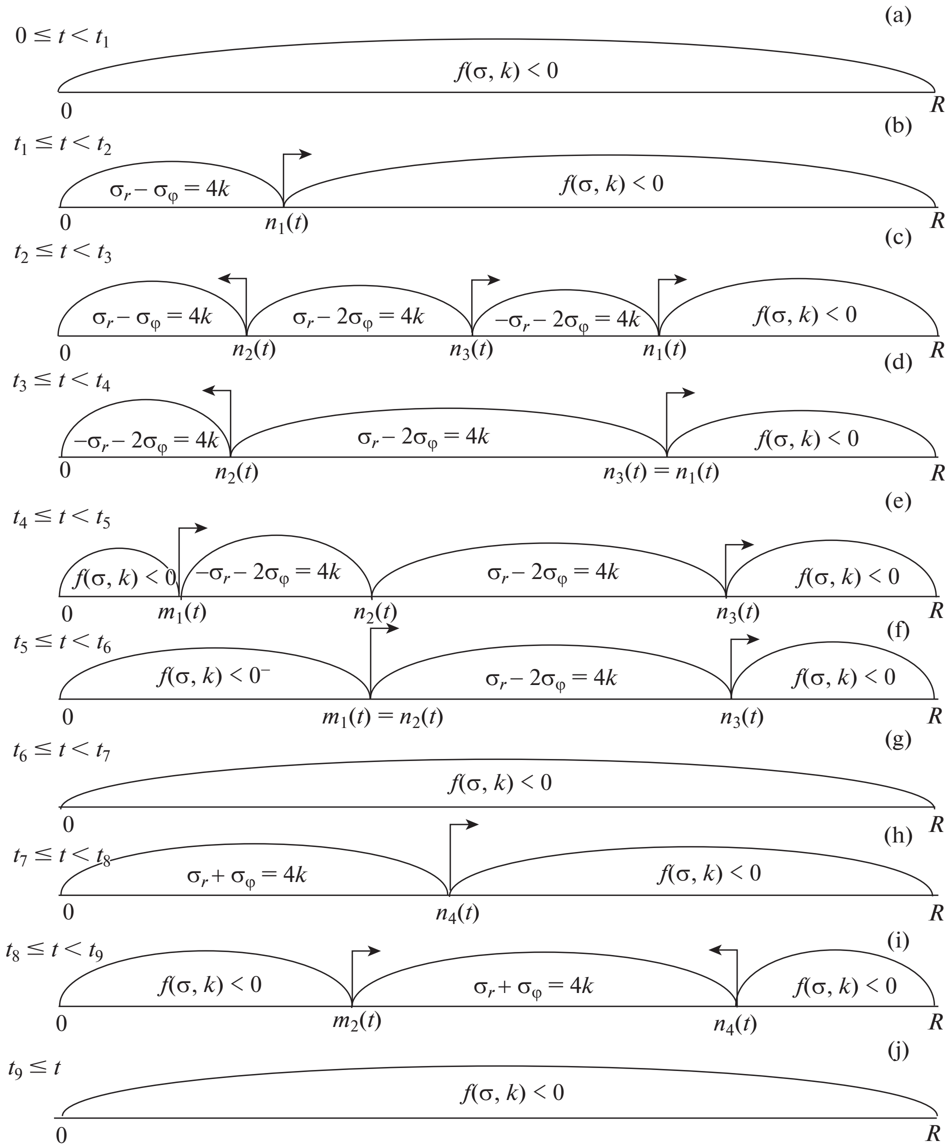

Рис. 3

Квадратными скобками в (4.3) обозначен разрыв переменной на продвигающейся линии $r = n_1(t)$. На рис. 3 представлена последовательная схема возникновения и исчезновения разных областей пластического течения. При продолжающемся нагреве находится момент времени $t = t_2 > t_1$, когда на некоторой внутренней линии пластической области наряду с условием $\sigma_r + \sigma_\varphi = -4k$, выполняется еще условие $\sigma_r - 2\sigma_\varphi = 4k$, то есть условия ребра призмы Ивлева. Однако в отличие от [19], пластическое течение в этих условиях оказывается неосуществимым. Действительно, на данном ребре $\sigma_r = -4k/3$, $\sigma_\varphi = -8k/3$ и согласно (3.1) $\partial k(r)/\partial r - k = 0$. Разрешая это дифференциальное уравнение получим распределение $k(r)$, которое уже задано распределением по пластине температуры $k = k(T(r))$. Это противоречие приводит к переопределенности задачи. Выход из такой ситуации состоит в том, что в момент времени $t = t_2$ в рассчитываемой линии области пластического течения возникают две линии $r = n_2(t)$ и $r = n_3(t)$, делящие область течения на три части (рис. 3) и продвигающиеся в разные стороны (направление движения указано стрелками). В двух таких частях $0 \le r \le n_2(t)$ и $n_3(t) \le r \le n_1(t)$ пластическое течение продолжается в соответствии грани $\sigma_r + \sigma_\varphi = -4k$, а в области $n_2(t) \le r \le n_3(t)$ оно соответствует соседней грани призмы Ивлева. При записи аналога (4.1) для последней области следует учитывать, что наряду с формирующимися деформациями $e_r^p(r,t)$ и $e_\varphi^p(r,t)$ в ней присутствуют необратимые деформации $p_r(t)$ и $p_\varphi(r)$, накопленные при пластическом течении в условиях прежней грани поверхности нагружения. Они вычисляются из (4.2) моментом прихода на линию с координатой r разделяющей линии $r = n_2(t)$ или $r = n_3(t)$.

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{4r^2}u_r = \frac{3\alpha T_0 K}{2(\lambda+\mu)}\theta_{,r} + \frac{3\alpha T_0 K}{4(\lambda+\mu)r}\theta + \frac{1}{3K}k_{,r} + \\ + \frac{\lambda+\mu}{2\mu K r}k + \left(p_{r,r} + \frac{1}{2r}p_r\right) + \frac{1}{2}\left(p_{\varphi,r} + \frac{1}{2r}p_\varphi\right) \tag{4.4}$$

После интегрирования (4.4) получим

$$u_r = \frac{1}{\sqrt{r}}\int_{n_2(t)}^{r}\left(p_r(\rho) + 0.5p_\varphi(\rho)\right)\sqrt{\rho}d\rho + \frac{\sqrt{r}(3\lambda+5\mu)}{3\mu K}\int_{n_2(t)}^{r}\frac{k(\rho)}{\sqrt{\rho}}d\rho - \\ - \frac{(3\lambda+5\mu)}{3\mu K\sqrt{r}}\int_{n_2(t)}^{r}k(\rho)\sqrt{\rho}d\rho + \frac{3}{2\sqrt{r}}\alpha T_0\int_{n_2(t)}^{r}\sqrt{\rho}\theta(\rho)\,d\rho + \frac{\sqrt{r}(3\lambda+5\mu)}{12\mu K}C_5(t) - \frac{C_6(t)}{\sqrt{r}}$$

$$e_r^p = -\frac{1}{2}e_\varphi^p = \frac{1}{2}p_\varphi - \frac{1}{2\sqrt{r^3}}\int_{n_2(t)}^{r}\left(p_r(\rho) + 0.5p_\varphi(\rho)\right)\sqrt{\rho}d\rho + \frac{3(\lambda+\mu)}{\mu K}k + \frac{\alpha T_0}{2}\theta + \\ - \frac{\lambda+\mu}{2\mu K\sqrt{r}}\int_{n_2(t)}^{r}\frac{k(\rho)}{\sqrt{\rho}}d\rho + \frac{(3\lambda+5\mu)}{6\mu K\sqrt{r^3}}\int_{n_2(t)}^{r}k(\rho)\sqrt{\rho}d\rho + \frac{(\lambda+\mu)}{8\mu K\sqrt{r}}C_5(t) + \frac{C_6(t)}{2\sqrt{r^3}} \tag{4.5}$$

$$\sigma_r = -\frac{2}{\sqrt{r}}\int_{n_2(t)}^{r}k(\rho)\sqrt{\rho}d\rho + \frac{C_5(t)}{\sqrt{r}}$$

Значение функций $C_1(t),\ldots,C_5(t),C_6(t)$ вместе с положениями разделяющих деформируемую область линий приходится пересчитывать на каждом временном шаге. Для этого решим систему алгебраических уравнений, составленную из граничных условий (2.1) условий пластического течения и непрерывности перемещения u_r и напряжения σ_r (аналог (4.3)) на разделяющих линиях.

Расчетом установлено, что линия $r = n_3(t)$ продвигается быстрее окружности $r = n_1(t)$; наступает момент времени $t = t_3 > t_2$, когда $n_3(t_3) = n_1(t_3)$ (рис. 3, d) и пластическая область исчезает.

Распределение напряжений в момент отвода источника тепла, то есть в момент времени, когда распределение температуры задается верхней зависимостью на рис. 1, указано на рис. 4 при $\lambda = 192.3k_0$, $\mu = 128.2k_0$, $k_0 = 210$ МПа, $\alpha = 23.4 \times 10^{-6}$ (°C)$^{-1}$, $\gamma = 880$ см$^{-2}$ (рис. 4a); $\gamma = 220$ см$^{-2}$ (рис. 4, b).

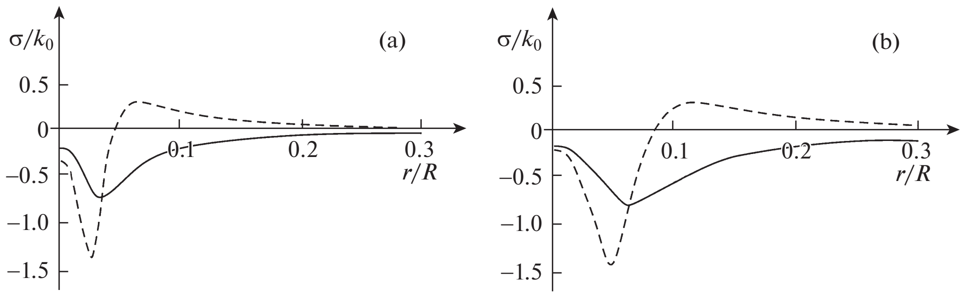

Рис. 4.

5. Остывание и разгрузка. Сразу за моментом $t = t_4$ отвода источника нагрева в центре пластины зарождается область обратимого деформирования $0 \le r \le m_1(t)$ с продвигающейся разгружающей упругопластической границей $r = m_1(t)$ (рис. 3, e). Продвижение этой линии приводит к исчезновению сначала пластической, области $m_1(t) \le r \le n_2(t)$ (рис. 3, f), а потом после $t = t_6$ и области $n_2(t) \le r \le n_3(t)$ (рис. 3, g). С момента времени $t = t_3$ пластина деформируется обратимо. Следует учитывать, что данное термоупругое деформирование происходит, в отличие от (3.3) и (3.4), в условиях присутствующих, со временем не изменяющихся пластических деформаций $p_r(r)$ и $p_\varphi(r)$.

В условиях достаточно высокой степени нагрева при остывании пластины необходимо возникает повторное (обратное) пластическое течение. Начинается оно в момент времени $t = t_7$, когда в центре пластины выполняется условие пластического течения $\sigma_r + \sigma_\varphi = 4k$, соответствующее противоположной грани призмы Ивлева в сравнении с активным процессом деформирования (рис. 2). В области повторного пластического течения $0 \le r \le n_4(t)$ (рис. 3h) после интегрирования уравнения равновесия в перемещениях получим

$$u_r = -2(\mu r)^{-1}\int_0^r \rho k(\rho)d\rho + r\int_0^r \rho^{-1}\left(p_r(\rho) - p_\varphi(\rho)\right)d\rho + 0.5rC_3(t) + r^{-1}C_4(t)$$

$$\sigma_r = 4r^{-2}\int_0^r \rho k(\rho)d\rho - 2r^{-2}\mu C_4(t)$$

$$e_r^p = -4((3\mu)^{-1} + (6K)^{-1})k - \alpha T_0\theta - \int_0^r \rho^{-1}\left(P_r(\rho) - P_\varphi(\rho)\right)d\rho - P_\varphi + 0.5C_3(t)$$

В момент времени $t = t_8$ в центре пластины возникает разгружающая упругопластическая граница $r = m_2(t)$, а упругопластическая граница $r = n_4(t)$ начинает двигаться в обратную сторону. Продвигаясь по пластине (рис. 3, i), он и при $t = t_9 > t_8$ встречаются. Далее пластина, вплоть до полного ее остывания деформируется обратимо, формируя окончательное поле остаточных напряжений (рис. 5, a) $\gamma = 880$ см$^{-2}$, b) $\gamma = 220$ см$^{-2}$.

Таким образом, кусочно-линейное условие пластичности Ишлинского–Ивлева обеспечивает расчет одномерного поля температурных напряжений в круглой пластине в его эволюции от начала нагрева до полного последующего остывания без обращения к приближенным численным методам расчетов. Расчеты проводятся последовательными шагами по времени с использованием конечных зависимостей деформаций

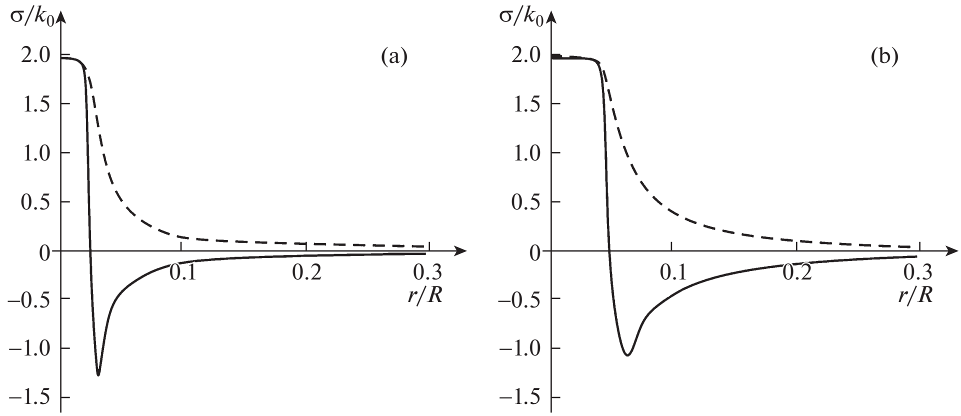

Рис. 5.

и напряжений от распределения в рассчитываемый момент времени температуры по пластине без дискретизации расчетных областей. Впервые обнаружены особенности в расчетах, связанные с выполнением условий пластического течения, соответствующих ребру призмы Ивлева. Указан способ дальнейших расчетов посредством мгновенного перехода с грани призмы на соседнею грань, минуя грань поверхности пластического течения. Установленные особенности окажутся полезными при использовании данного условия пластического течения в задачах более сложной геометрии и более сложного термомеханического воздействия.

Работа выполнена при поддержке государственного задания ХФИЦ ДВО РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРА

1. *Ивлев Д.Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 252 с.
2. *Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И.* Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 232 с.
3. *Клюшников В.Д.* Математическая теория пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1979. 208 с.
4. *Ивлев Д.Д., Ершов Л.В.* Метод возмущений в теории упруго-пластического тела. — М.: Наука, 1978. 208 с.
5. *Соколовский В.В.* Теория пластичности. М.: Высш. школа, 1969. 608 с.
6. *Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д.* Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
7. *Ерхов М.И.* Теория идеальной пластичности тел и конструкций. М.: Наука, 1978. 352 с.
8. *Аннин Б.Д., Черепанов Г.Б.* Упругопластическая задача. Новосибирск: Наука, 1983. 240 с.
9. *Галин Л.А.* Упругопластические задачи. М.: Наука, 1984. 232 с.
10. *Schmidt R.* Uber den Zusammenhang von Spannunqen und Iormanderunqen im Verfestigsgebiet // Ingender Arihiv. 1932. V. 3. № 3. P. 215–235.
11. *Ишлинский А.Ю.* Гипотеза прочности формоизменения // Ученые записки МГУ. 1940. № 46. С. 104–114.
12. *Ivlev D.D.* On the. development of a theory of ideal plasticity // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1958. V. 22. № 6. P. 1221–1230.
13. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: Мир. 1956. 407 с.
14. *Zhao D. W., Xie Y.-J. Liu X.-H., Wang G.-D.* Three-Dimensional Analysis of Rolling by Twin Shear Stress Yield Criterion // J. of Iron and Steel Research Int. 2006. V. 13. № 6. P. 21–26.
15. *Cai Q., Pang M., Zhang Y.-Q., Liw X.* Elastic-plastic stress distribution of rotating annuar disc based on twin-shear stress yorld criterion criterion // Zhejiang Daxue Xuebao (Gongxue Ban) / J of Zhejiang University (Eng. Scince). 2008. V. 42. № 9. P. 1540–1544.

16. *Zhu X., Pang M., Zhang Y.* Estimation of burst pressure of pipeline using twin-shear yield criterion // Chinese J. of Appl. Mech. 2011. V. 28. № 2. P. 135–138.
17. *Дац Е.П., Мурашкин Е.В., Ткачева А.В., Щербатюк Г.А.* Температурные напряжения в упругопластической трубе в зависимости от выбора условия пластичности // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 1. С. 32–43.
18. *Буренин А.А., Каинг М., Ткачева А.В.* К расчету плоских напряженных состояний в теории неустановившихся температурных напряжений в упругопластических телах // ДВМЖ. Т. 18. № 1. С. 1–8.
19. *Буренин А.А., Матвеенко В.П., Ткачева А.В.* Температурные напряжения в процессе сборки двухслойного вала способом горячей посадки // Ученые записки КнАГТУ. 2018. № 3 (35). С. 31–41.
20. *Шевченко Ю.Н.* Термопластичность при переменных нагружениях. Киев: Наукова думка. 1970. 288 с.
21. *Пэжина П., Савчук А.* Проблемы термопластичности// Проблемы теории пластичности и ползучести. М.: Мир. 1979. С. 94–202.
22. *Шевченко Ю.Н., Стеблянко П.А., Петров А.Д.* Численные методы в нестационарных задачах теории термопластичности // Пробл. выч. мех. и прочн. конструкций. 2014. № 22. С. 250–264.
23. *Gamer U. A* cocise treament of the shrink fit withelostic plastic hab // Int. J. Solids/ Struct. 1992. V. 29. P. 2463–2469.
24. *Mack W.* Thermal assembly of an elastic-plastic hub and a solid shaft // Arch. Appl. Mech. 1993. V. 63. P. 42–50.
25. *Kovacs A.* Residual Stresses in Thermally Looded Shrink Fits // Periodica Polytechnica: Mech. Eng. 1996. V. 40. № 2. P. 103–112.
26. *Александров С.Е., Ломакин Е.В., Дзенг Й.-Р.* Решение термоупругопластической задачи для тонкого диска из пластически сжимаемого материала, подверженного термическому нагружению // ДАН. 2012. Т. 443. № 3. С. 310–312.
27. *Antonio N.* Contact separation and failure analysis thermo-elastoplastic shrink-fit assembly // Appl. Math. 2013. V. 37. P. 2352–2364.
28. *Буренин А.А., Ткачева А.В., Щербатюк Г.А.* К расчету неустоявшихся температурных напряжений в упругопластических телах // Вычисл. мех. спл. сред. 2017. Т. 10. № 3. С. 245–259.