

УДК 539.3

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОРОУПРУГОГО СЛОЯ

© 2020 г. Е. М. Колосова^{a,**}, М. И. Чебаков^{a,*}

^aИнститут математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича
Южного федерального университета, Ростов-на-Дону, Россия

*e-mail: michebakov@yandex.ru

**e-mail: a_lena_ch@mail.ru

Поступила в редакцию 30.03.2020 г.

После доработки 13.04.2020 г.

Принята к публикации 23.05.2020 г.

В работе на основе уравнений теории пороупругих тел Ковина-Нунзиато рассматриваются осесимметричные контактные задачи о взаимодействии жесткого штампа с пороупругим слоем. Предполагается, что основание штампа имеет плоскую или параболическую форму, в зоне контакта отсутствует трение. Поставленные задачи сводятся относительно специальной функции, через которую выражаются контактные напряжения, к интегральным уравнениям, главной частью ядра которых является дельта-функция. Используя специальную аппроксимацию трансформанты ядра интегрального уравнения построено его асимптотическое решение для случая относительно больших толщин слоя. Такой подход к решению интегральных уравнений контактных задач был предложен И.И. Воровичем и получил дальнейшее развитие в работах его учеников. В простой аналитической форме получены выражения для контактных напряжений и области контакта в случае параболического штампа. Также в элементарных выражениях найдена связь между силой, действующей на штамп, и его перемещением, которая является одной из основных характеристик при определении механических параметров материала методом индентирования. Проведен сравнительный анализ исследуемых величин для различных значений параметров пористости и толщины слоя.

Ключевые слова: контактная задача, пористые материалы, пороупругость, модель Ковина–Нунзиато, осесимметричная задача, слой, асимптотический метод, индентирование

DOI: 10.31857/S0572329920050116

Введение. Теория Ковина-Нунзиато упругих материалов с пустотами является одним из распространенных обобщений классической теории упругости. Эта теория рассматривает упругие материалы с распределенными по объему небольшими незаполненными порами (пустотами). Практическое значение данного подхода имеет при исследовании различных типов геологических, биологических и синтетических пористых материалов, для которых классическая теория не подходит. Теория упругости пористых материалов с пустыми порами была представлена Ковиным и Нунзиато в [1]. В отсутствие поля объемной доли пор данная теория сводится к классической теории упругости. Линейная теория была описана в [2]. В работе [3] приведено математическое описание линейной теории термоупругости тел с пустотами. Общая теория была довольно хорошо изучена в последние годы [4–11]. В работах [5, 6] решены кон-

тактные задачи в рамках плоской постановки для полупространства и полосы, соответственно.

Точность предложенной схемы решения задач была протестирована на аналогичных задачах для упругого слоя, решения которых для некоторых значений параметров приведены в [12].

1. Постановка задачи. В цилиндрической системе координат (r, ϕ, z) рассмотрим осесимметричную контактную задачу о взаимодействии жесткого штампа с пороупругим слоем $0 \leq z \leq h$, деформация которого описывается соотношениями Ковина и Нунзиато [2]. Предполагается, что основание цилиндрического штампа может быть плоским (задача 1) или иметь форму параболоида вращения (задача 2).

Теория однородного изотропного материала с пустотами, согласно теории Ковина–Нунзиато, описывается следующей системой дифференциальных уравнений в частных производных [2]

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial r} + \mu \left(\Delta u - \frac{u}{r^2} \right) + \beta \frac{\partial \Phi}{\partial r} &= 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \Delta w + \beta \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= 0, \quad \alpha \Delta \Phi - \xi \Phi - \beta \theta = 0 \\ \Delta &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \theta = \frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь μ и λ – коэффициенты Ламэ, а α – коэффициент пустотной диффузии, β – параметр связи микродилатационных и макродилатационных свойств и ξ – пустотная жесткость, функция $\Phi(r, z)$ описывает изменение объемной части пор, u и w перемещения соответственно вдоль осей r и z . В случае $\beta = 0$ мы имеем упругую деформацию слоя.

Компоненты тензора напряжений определяются из следующих соотношений [2]

$$\sigma_z = \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \beta \Phi, \quad \tau_{rz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (1.2)$$

Граничные условия поставленных задач при $z = h$ и $z = 0$ запишутся в следующем виде

$$\begin{aligned} \tau_{rz}(r, z) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad w(r, z) = \delta(r) \quad (z = h, r \leq a), \\ \sigma_z(r, z) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (z = h, r > a) \\ \tau_{rz}(r, z) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad w(r, z) = 0 \quad (z = 0) \end{aligned} \quad (1.3)$$

В случае штампа с плоским основанием $\delta(r) = \delta = \text{const}$ (задача 1), в случае штампа с основанием в форме параболоида вращения $\delta(r) = \delta - r^2/(2R)$ (задача 2). Здесь R – радиус кривизны в вершине параболы.

2. Построение интегрального уравнения. Предварительно будем считать, что нормальные напряжения в зоне контакта известны: $\sigma_z(r, h) = q(r)$. В дальнейшем для их определения будет построено интегральное уравнение (2.20). Для этого найдем решение системы (1.1) с граничными условиями

$$\tau_{rz}(r, z) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad \sigma_z(r, z) = q(r) \quad (z = h, r \leq a) \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad \sigma_z(r, z) = 0 \quad (z = h, r > a), \quad \tau_{rz}(r, z) = 0, \quad w(r, z) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (z = 0)$$

Представим неизвестные функции в системе (1.1) в виде преобразования Ханкеля

$$u(r, z) = \int_0^\infty A(u, z) J_1(ur) u du, \quad w(r, z) = \int_0^\infty B(u, z) J_0(ur) u du \quad (2.2)$$

$$\Phi(r, z) = \int_0^\infty F(u, z) J_0(ur) u du$$

где $J_i(u)$ ($i = 0, 1$) – функции Бесселя. Тогда для отыскания неизвестных функций $A(u, z)$, $B(u, z)$, $F(u, z)$ получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка ($D = d/dz$)

$$c^2 D^2 A - u^2 A - (1 - c^2) u DB - u HF = 0, \quad (1 - c^2) u DA + D^2 B - c^2 u^2 B + H DF = 0 \quad (2.3)$$

$$l_1^2 (D^2 F - u^2 F) - \frac{l_1^2}{l_2^2} F - u A - DB = 0$$

На основе граничных условий (2.1) получим соответственно при $z = h$ и $z = 0$:

$$DA - uB = 0, \quad (1 - 2c^2) uA + DB + HF = Q(u) c^2 \mu^{-1}, \quad DF = 0 \quad (z = h) \quad (2.4)$$

$$B(u, 0) = 0, \quad DA - uB = 0, \quad DF = 0 \quad (z = 0)$$

$$Q(u) = \int_0^a q(r) J_0(ur) r dr, \quad q(r) = \int_0^\infty Q(u) J_0(ur) u du \quad (2.5)$$

Здесь использованы следующие обозначения [5]

$$c^2 = \frac{\mu}{(\lambda + 2\mu)}, \quad H = \frac{\beta}{\lambda + 2\mu}, \quad l_1^2 = \frac{\alpha}{\beta}, \quad l_2^2 = \frac{\alpha}{\xi} \quad (2.6)$$

Согласно теории систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка решение системы (2.3) может быть получено в виде

$$\begin{aligned} A(u, z) &= (a_1 + a_2 z) e^{uz} + (a_3 + a_4 z) e^{-uz} + a_5 e^{m_5 z} + a_6 e^{m_6 z} \\ B(u, z) &= (b_1 + b_2 z) e^{uz} + (b_3 + b_4 z) e^{-uz} + b_5 e^{m_5 z} + b_6 e^{m_6 z} \\ F(u, z) &= (c_1 + c_2 z) e^{uz} + (c_3 + c_4 z) e^{-uz} + c_5 e^{m_5 z} + c_6 e^{m_6 z} \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $m_5 = \sqrt{1 - N + u^2 l_2^2} / l_2$, $m_6 = -\sqrt{1 - N + u^2 l_2^2} / l_2$, $N = H \cdot l_2^2 / l_1^2$. Коэффициенты b_i , c_i ($1 \leq i \leq 6$) выражаются через a_i ($1 \leq i \leq 6$) согласно соотношениям

$$\begin{aligned} b_5 &= -a_5 \frac{\sqrt{u^2 l_2^2 - N + 1}}{u l^2}, \quad c_5 = a_5 \frac{1 - N}{u N l_1^2}, \quad b_6 = a_6 \frac{\sqrt{u^2 l_2^2 - N + 1}}{u l_1^2}, \quad c_6 = a_6 \frac{1 - N}{u N l_1^2} \\ b_1 &= -a_1 - a_2 \frac{c^2 + 1 - N}{u(c^2 - 1 + N)}, \quad b_2 = -a_2, \quad c_1 = a_2 \frac{2c^2 l_2^2}{l_1^2 (c^2 - 1 + N)}, \quad c_2 = 0 \\ b_3 &= a_3 - a_4 \frac{c^2 + 1 - N}{u(c^2 - 1 + N)}, \quad b_4 = a_4, \quad c_3 = -a_4 \frac{2c^2 l_2^2}{l_1^2 (c^2 - 1 + N)}, \quad c_4 = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.4), получаем уравнения для определения неизвестных коэффициентов a_i ($1 \leq i \leq 6$). Не выписывая их здесь ввиду громоздкости, приведем выражение для $B(u, 0)$, которое нам понадобится для построения интегрального уравнения относительно контактных напряжений $q(r)$

$$B(u, 0) = \frac{Q(u)}{2\mu(1 - c^2)} L(u), \quad L(u) = \frac{L_1(u)}{L_2(u)}, \quad L_i(u) = \tilde{L}_i(s) \quad (i = 1, 2), \quad s = ul_2 \quad (2.9)$$

$$\tilde{L}_1(s) = 8\mu l_2^2(1 - c^2)shX(ch2Y - 1)(N - 1)^2 \times \\ \times [2N(s^4 + Ts^3) - (2N - 1)(N - 1)s^2 - (N - 1)^2]$$

$$\tilde{L}_2(s) = 2chX(2Z_1sh2Y + Z) + 4Z_2chX(ch2Y - 1)$$

$$Z = 8h(N + c^2 - 1)(N - 1)[2N(s^5T + s^6) - (2N - 1)(N - 1)s^4 - (N - 1)^2s^2]$$

$$Z_2 = -4Nc^2s^4l_2[2s^3N + T(2s^2N + N - 1)]$$

$$Z_1 = 2l_2[4c^2N^2s^7 + 4c^2TN^2s^6 - 2N(N - 1)^2(2c^2 - 1)s^5 + \\ 2TN(N - 1)(N + c^2 - 1)s^4 - (N - 1)^2(2N^2 - 3N + 4Nc^2 + \\ + 1 - c^2)s^3 - (N - 1)^3(N + c^2 - 1)s]$$

Здесь введены обозначения

$$T = \sqrt{1 - N + s^2}, \quad Y = hs/l_2, \quad X = Th/l_2$$

Из условия удовлетворения граничному условию $w(r, 0) = \delta(r)$ при $r \leq a$ и $z = h$ из (1.3) найдем

$$w(r, h) = \frac{1}{2\mu(1 - c^2)} \int_0^\infty Q(u)L(u)uJ_0(ur)du = \delta(r) \quad (r \leq a) \quad (2.10)$$

Подставляя в (2.10) выражение (2.5) для $Q(u)$ получим после несложных преобразований интегральное уравнение

$$\int_0^a q(\rho)\rho k(\rho, r)d\rho = \frac{\mu}{1 - \nu} \delta(r) \quad (r \leq a) \quad (2.11)$$

$$k(\rho, r) = \int_0^\infty L(u)uJ_0(ur)J_0(u\rho)du \quad (2.12)$$

Здесь использовано соотношение $2(1 - c^2) = (1 - \nu)^{-1}$, ν — коэффициент Пуассона.

Если $N = 0$, то интегральное уравнение будет соответствовать контактной задаче для упругого слоя [12].

3. Решение интегрального уравнения. Можно показать, что

$$\lim L(u) = Ah \quad (u \rightarrow 0), \quad A = \frac{(N - 1)(1 - c^2)}{2(N - 1 + c^2)}, \quad \lim L(u) = 1 \quad (u \rightarrow \infty) \quad (3.1)$$

В соответствии с (3.1) для получения замкнутого решения интегрального уравнения (2.17) для относительно больших толщин слоя аппроксимируем $L(u)$ выражением [13]

$$L^*(hu) = th(Ahu) \quad (3.2)$$

Относительная максимальная погрешность такой аппроксимации не превышает 14.5%, при некоторых значениях параметров она может быть значительно меньше.

Такая аппроксимация позволяет для решения интегрального уравнения (2.11), (2.12) с символом ядра $L(u) = L^*(hu)$ из (3.2) использовать метод больших λ [12, 14–16], где $\lambda = h/a$, который позволяет получить окончательные выражения для контактных напряжений и других величин в компактной аналитической форме, удобной для инженерных расчетов. Для этого уравнение (2.11), (2.12) в соответствии со схемой, изложенной в [15–17], преобразуем к интегральному уравнению

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi\lambda} \int_{-1}^1 \varphi(\tau) k\left(\frac{t-\tau}{\lambda}\right) d\tau + d(t) \quad (|t| \leq 1) \quad (3.3)$$

$$k(y) = \int_0^\infty [1 - L^*(u)] \cos(uy) dy, \quad d(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{r\delta(ra) dr}{\sqrt{t^2 - r^2}} = \delta - \frac{a^2 t^2}{2R} \quad (3.4)$$

Тогда контактные напряжения через $\varphi(t)$ будут выражаться соотношениями [15]

$$q(r) = \frac{\mu}{(1-\nu)a} \sigma(r/a), \quad \sigma(\tau) = -\frac{2}{\pi} \frac{d}{d\tau} \tau \int_{\tau}^1 \frac{\varphi(t) dt}{t\sqrt{t^2 - \tau^2}} \quad (3.5)$$

Сила, действующая на штамп, может быть вычислена по формуле [15]

$$P = 2\pi \int_0^a q(r) r dr = \frac{4\mu a}{1-\nu} \int_0^1 \varphi(t) dt \quad (3.6)$$

Представим ядро и решение интегрального уравнения (3.3), (3.4) в виде [15]

$$k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{2k}, \quad \varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t) \lambda^n, \quad a_n = \int_0^\infty \frac{(-1)^n u^{2n}}{(2n)!} [1 - L^*(u)] du \quad (3.7)$$

Тогда для нахождения функций $\varphi_n(t)$ получим следующие рекуррентные соотношения

$$\varphi_0(t) = d(t), \quad \varphi_{2i+1}(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^i a_k \int_{-1}^1 \varphi_{2(i-k)}(\tau) (\tau - t)^{2k} d\tau \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.8)$$

$$\varphi_{2i}(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{i-1} a_k \int_{-1}^1 \varphi_{2(i-k)-1}(\tau) (\tau - t)^{2k} d\tau \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

Отметим, что в (3.8) интегралы берутся от степенных функций и в итоге функции $\varphi_n(t)$ будут представлены в виде многочленов. Приведем здесь некоторые из них

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= \delta - t^2 a^2 / R, & \varphi_1(t) &= \frac{2a_0}{\pi} \left(\delta - \frac{a^2}{3R} \right), & \varphi_2(t) &= \frac{4a_0^2}{\pi^2} \left(\delta - \frac{a^2}{3R} \right) \\ \varphi_3(t) &= \frac{\delta}{\pi} \left[\frac{8a_0^3}{\pi^2} + 2a_1 \left(\frac{1}{3} + t^2 \right) \right] - \frac{1}{\pi R} \left[\frac{8a_0^3 a^2}{3\pi^2} + 2t^2 a^2 a_1 \left(\frac{1}{3} + t^2 \right) \right] \\ \varphi_4(t) &= \frac{8\delta a_0}{\pi^2} \left[\frac{2a_0^3}{\pi^2} + a_1 \left(\frac{1}{3} + t^2 \right) \right] - \frac{4a_0 a^2}{R\pi^2} \left[\frac{4a_0^3}{3R\pi^2} + a_1 \left(t^2 + \frac{1}{3} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

В случае штампа с плоским основанием ($\delta(r) = \delta = \text{const}$) с учетом (3.9) получим значения для контактных напряжений

$$q(r) = \frac{\mu\delta}{(1-\nu)a} \sigma_0(r/a)$$

$$\sigma_0(t) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-t^2}} \left(1 + \frac{2a_0}{\pi\lambda} + \frac{4a_0^2}{\pi^2\lambda^2} + \frac{4(3\pi^2 a_1 t^2 - \pi^3 a_1 + 6\pi a_0^3)}{3\pi^4 \lambda^3} + \frac{16a_0(3\pi^2 a_1 t^2 - \pi^2 a_1 + 3a_0^3)}{3\pi^4 \lambda^4} + O(\lambda^{-5}) \right) \quad (3.10)$$

Соотношение для силы, приложенной к штампу, примет вид

$$P = 2\pi \int_0^a q(r) r dr$$

$$P = \frac{\mu a \delta}{1-\nu} \left(4 + \frac{8a_0}{\pi\lambda} + \frac{16a_0^2}{\pi^2\lambda^2} + \frac{16(6a_0^3\pi^2 + a_1\pi^4)}{3\pi^5\lambda^3} + \frac{64(3a_0^4\pi + a_0 a_1\pi^3)}{3\pi^5\lambda^4} + O(\lambda^{-5}) \right) \quad (3.11)$$

В случае штампа с основанием в форме параболоида вращения ($\delta(r) = \delta - r^2/(2R)$) дополнительно, кроме контактных напряжений и силы, требуется также найти радиус области контакта.

Область контакта найдем из условия обращения в ноль контактных напряжений на ее границе при $r = a$. Найдя выражения контактных напряжений на основе соотношений (3.5), (3.9), уравнение для определения радиуса области контакта найдем из условия

$$\lim(q(r) \sqrt{a^2 - r^2}) = 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow a \quad (3.12)$$

В результате предельного перехода (3.12) получим выражение для определения области контакта с любой заданной точностью при значениях $\lambda > 1$, ниже приведем его с точностью до $O(\lambda^{-5})$

$$a = \sqrt{3\delta RB(\lambda)/A(\lambda)} + O(\lambda^{-5}) \quad (3.13)$$

$$A(\lambda) = 9\pi^4 + 6a_0\pi^3\lambda^{-1} + 12a_0^2\pi^2\lambda^{-2} + 24(a_1\pi^3 + a_0^3\pi)\lambda^{-3} + 16(4a_0a_1\pi^2 + 3a_0^4)\lambda^{-4}$$

$$B(\lambda) = 3\pi^4 + 6a_0\pi^3\lambda^{-1} + 12a_0^2\pi^2\lambda^{-2} + 8(a_1\pi^3 + 3a_0^3\pi)\lambda^{-3} + 16(2a_0a_1\pi^2 + 3a_0^4)\lambda^{-4}$$

Для вычисления контактных напряжений под штампом необходимо воспользоваться соотношениями (3.5), (3.9). Здесь выпишем функцию $\sigma(\tau)$ с точность до членов порядка $O(\lambda^{-5})$

$$\sigma(\tau) = \frac{4\sqrt{\delta}(8a_1r^2N_1 + 3N_2)}{3\pi^2\sqrt{RD_1D_2}} \sqrt{1-r^2} + O(\lambda^{-5}) \quad (3.14)$$

$$N_1 = 3\pi^3\lambda^{-3} + 6\pi^2a_0\lambda^{-4} + 12\pi a_0^2\lambda^{-5} + (8a_1\pi^2 + 24a_0^3)\lambda^{-6}$$

$$N_2 = 3\pi^4 + 6a_0\pi^3\lambda^{-1} + 12a_0^2\pi^2\lambda^{-2} + 8\pi(a_1\pi^2 + 3a_0^3)\lambda^{-3} + 8a_0a_1\pi^2\lambda^{-4} + 16a_0^2a_1\pi\lambda^{-5} + 32a_0^3a_1\lambda^{-6}$$

$$D_1 = 3\pi^3 + 2\pi^2a_0\lambda^{-1} + 4\pi a_0^2\lambda^{-2} + 8(a_1\pi^2 + a_0^3)\lambda^{-3}$$

$$D_2 = 3\pi^3 + 6\pi^2a_0\lambda^{-1} + 12\pi a_0^2\lambda^{-2} + 8(a_1\pi^2 + 3a_0^3)\lambda^{-3}$$

Таблица 1

| 1 | τ | 0 | 0.2 | 0.2 | 0.2 | 0.8 | 0.95 |
|---|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 2 | $\sigma(\tau)$ | 0.827 | 0.843 | 0.897 | 1.019 | 1.344 | 2.556 |
| 3 | $\sigma(\tau)$ [12] | 0.785 | 0.801 | 0.854 | 0.976 | 1.296 | 2.480 |
| 4 | % | 5.35 | 5.24 | 5.04 | 4.41 | 3.70 | 3.06 |

Таблица 2

| λ | σ^* | σ^* [12] | % | P^* | P^* [12] | % |
|-----------|------------|-----------------|------|-------|------------|------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 4 | 2.541 | 2.560 | 0.74 | 3.090 | 3.04 | 1.65 |

Величину силы, действующей на штамп, на основе соотношений (3.6) можно получить с любой заданной точностью при значениях $\lambda > 1$, ниже приведем его с точностью до членов порядка $O(\lambda^{-5})$

$$P = \frac{4a\mu}{1-\nu} \int_0^1 \varphi(\tau) d\tau = \frac{4a\mu}{1-\nu} \sum_{n=0}^4 P_n \lambda^{-n} + O(\lambda^{-5}), \quad P_0 = \delta - \frac{a^2}{3R}, \quad P_1 = \frac{2a_0(3R\delta - a^2)}{3R\pi}$$

$$P_2 = \frac{4a_0^2(3R\delta - a^2)}{3R\pi^2}, \quad P_3 = \frac{4[15R\delta(a_1\pi^2 + 6a_0^3) - a^2(7a_1\pi^2 + 30a_0^3)]}{45R\pi^3} \quad (3.15)$$

$$P_4 = \frac{16a_0[5R\delta(a_1\pi^2 + 3a_0^3) - a^2(2a_1\pi^2 + 5a_0^3)]}{15R\pi^4}$$

4. Числовые расчеты. Для тестирования предложенной схемы решения интегрального уравнения (3.1) рассмотрен случай $N = 0$ (чисто упругий слой) с учетом аппроксимации соответствующей функции для упругого слоя выражением (3.2), где $A = 0.5$ [13]. Решение задач в этом случае в рамках классической теории упругости аналитическим методом получено в [12]. В табл. 1 для сравнения для задачи 1 приведены во второй строке значения приведенных контактных напряжений $\sigma(\tau)$ при $\lambda = 4$, вычисленных по формуле (3.10), а в третьей строке их соответствующие значения, взятые из табл. 27 работы [12]. В последней строке табл. 1 приведена относительная погрешность полученных значений контактных напряжений. Видим, что погрешность напряжений значительно меньше максимальной погрешности аппроксимации.

Для задачи 2 в табл. 2 приведено при $\lambda = 4$ сравнение величин $\sigma^* = 2\sigma(0)R/a$ и $P^* = P(1-\nu)/(\mu\delta a)$ с результатами для аналогичных величин, приведенных в табл. 30 [12]. В четвертой и седьмой колонках приведены значения относительной погрешности, здесь она меньше чем в задаче 1.

На основе полученного выше решения интегрального уравнения (3.3) были проведены расчеты контактных напряжений, величины силы, действующей на штамп, а также величины области контакта для задачи 2.

На рис. 1, а для задачи 1 при $\lambda = 2$ и $c = 0.6$ при некоторых значениях N приведены графики приведенных контактных напряжений $q^* = q(r)(1-\nu)/(\mu\delta)$. График 1 соответствует $N = 0.1$, 2 – $N = 0.35$, 3 – $N = 0.5$. При этих значениях параметров произведен также расчет величины $P^* = P(1-\nu)/(\mu\delta a)$, соответственно при $N = 0.1$ $P^* = 6.17$, $N = 0.35$ $P^* = 5.55$, $N = 0.5$ $P^* = 4.91$.

На рис. 1, б для задачи 2 при $\lambda = 2$, $\delta = 0.1$, $c = 0.6$ при некоторых значениях N приведены графики приведенных контактных напряжений $\hat{q} = q(r)(1-\nu)/\mu$. Здесь также

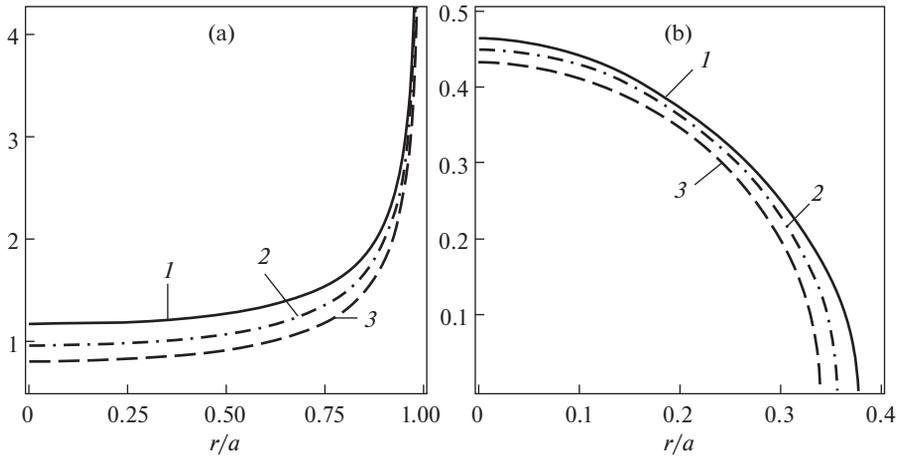


Рис. 1

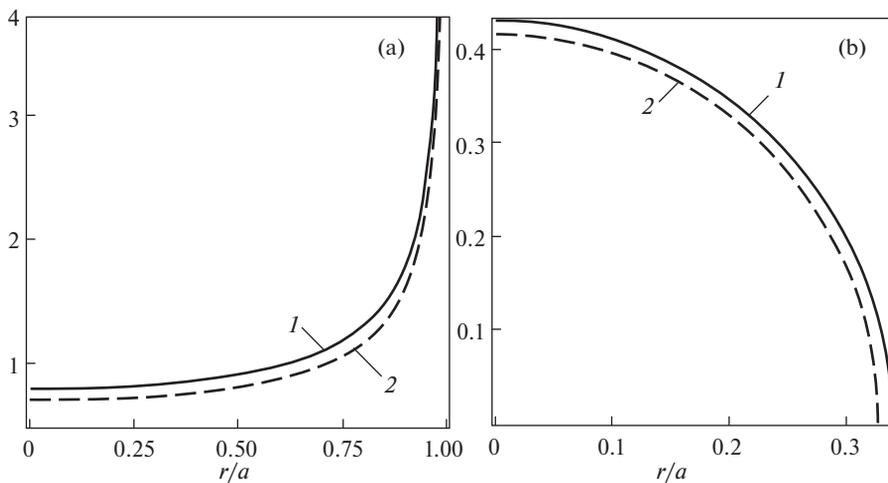


Рис. 2

график 1 соответствует $N = 0.1$, 2 – $N = 0.35$, 3 – $N = 0.5$. При этих значениях параметров произведен также расчет величины $\hat{P} = P(1 - \nu)/\mu$ и величины области контакта a , соответственно при $N = 0.1$ $\hat{P} = 0.126$, $a = 0.377$, при $N = 0.35$ – $\hat{P} = 0.115$, $a = 0.356$, при $N = 0.5$ – $\hat{P} = 0.103$, $a = 0.339$.

На рис. 2, а и 2, б для задач 1 и 2 соответственно приведены графики аналогичных величин, что и на рис. 1, а и 1, б при $c = 0.6$, $N = 0.5$ и различных значениях λ : график 1 построен при $\lambda = 2$, а график 2 при $\lambda = 4$.

Расчеты показывают, что в случае штампа с плоским основанием (задача 1) при увеличении пористости при постоянной величине смещения штампа и его радиуса контактные напряжения и величина приложенной силы уменьшаются.

В случае параболического штампа (задача 2) расчеты показывают, что при постоянной величине смещения штампа с увеличением толщины слоя контактные напряжения и величина приложенной силы также уменьшаются при фиксированных значениях других параметров. Стоит также отметить, что зона контакта в случае параболического штампа с увеличением пористости или толщины слоя уменьшается при одинаковом значении смещения штампа δ .

Работа финансово поддержана Южным федеральным университетом, 2020 (Министерство науки и высшего образования Российской Федерации). Проект № ВнГр/2020-04-ИМ.

Research was financially supported by Southern Federal University, grant No. VnGr/2020-04-IM (Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nunziato G.W., Cowin S.C.* A nonlinear theory of elastic materials with voids // *Arch Ration Mech Anal.* 1979. V. 72. P. 175–201.
2. *Cowin S.C., Nunziato G.W.* Linear theory of elastic materials with voids // *J. Elast.* 1983. V. 13. P. 125–147.
3. *Iesan D.* A theory of thermoelastic materials with voids // *Acta Mech.* 1986. V. 60. P. 67–89.
4. *Chandrasekharaiah D.S.* Effects of surface stresses and voids on Rayleigh waves in an elastic solid // *Int. J. Eng. Sci.* 1987. V. 25. P. 205–211
5. *Scalia A., Sumbatyan M.A.* Contact problem for porous elastic half-plane // *J. Elasticity.* 2000. V. 60. P. 91–102.
6. *Scalia A.* Contact problem for porous elastic strip // *Int. J. Eng. Sci.* 2002. V. 40. P. 401–410.
7. *Iovane G., Nasedkin A.V.* Modal analysis of piezoelectric bodies with voids. I. Mathematical approaches // *Applied Mathematical Modelling.* 2010. V. 34. P. 60–71.
8. *Iovane G., Nasedkin A.V.* Finite element dynamic analysis of anisotropic elastic solids with voids // *Computers and Structures.* 2009. V. 87. P. 981–989.
9. *Iovane G., Nasedkin A.V.* Finite element analysis of static problems for elastic media with voids // *Computers and Structures.* 2005. V. 84. P. 19–24.
10. *Kudimova A.B., Nadolin D.K., Nasedkin A.V., Nasedkina A.A., Oganeyan P.A., Soloviev A.N.* Models of porous piezocomposites with 3–3 connectivity type in ACELAN finite element package // *Mater. Phys. Mech.* 2018. V. 37(1). С. 16–24.
11. *Nasedkin A.V., Nasedkina A.A., Rybyanets A.N.* Numerical analysis of effective properties of heterogeneously polarized porous piezoceramic materials with local alloying pore surfaces // *Mater. Phys. Mech.* 2018. V. 40(1). С. 12–21.
12. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
13. *Александров В.М., Чебаков М.И.* Введение в механику контактных взаимодействий. Ростов-на-Дону: Изд-во ООО “ЦВВР”, 2007. 114 с.
14. *Чебаков М.И.* О дальнейшем развитии метода больших λ в теории смешанных задач // *ПММ.* 1976. Т. 40. Вып. 3. С. 561–565.
15. *Александров В.М., Чебаков М.И.* Аналитические методы в контактных задачах теории упругости. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 304 с.
16. *Александров В.М., Чебаков М.И.* Смешанные задачи механики сплошной среды, связанные с интегральными преобразованиями Ханкеля и Мелера–Фока // *ПММ.* 1972. Т. 36. Вып. 3. С. 494–504.
17. *Александров В.М., Чебаков М.И.* Об одном методе решения парных интегральных уравнений // *ПММ.* 1973. Т. 37. Вып. 6. С. 1088–1097.