

УДК 533.6.013.42

АЭРОУПРУГАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

© 2020 г. С. А. Бочкарёв^{а,*}, С. В. Лекомцев^а, В. П. Матвеевко^а

^аИнститут механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

*e-mail: bochkarev@icmm.ru

Поступила в редакцию 14.04.2020 г.

После доработки 25.05.2020 г.

Принята к публикации 23.06.2020 г.

Представлена математическая постановка и алгоритм ее численной реализации, предназначенные для исследования аэроупругой устойчивости цилиндрических оболочек произвольного поперечного сечения. Решение задачи осуществляется в трехмерной постановке с использованием метода конечных элементов. Достоверность полученных результатов подтверждена сравнением с известными решениями для круговых оболочек. Проанализированы зависимости статического давления в невозмущенном потоке газа, при котором происходит потеря устойчивости, полученные при разных отношениях полуосей эллипса и вариантах кинематических граничных условий. Продемонстрирована возможность повышения границ аэроупругой устойчивости цилиндрической оболочки с эллиптическим поперечным сечением по сравнению с круговой конфигурацией в случае консольного закрепления.

Ключевые слова: эллиптическая цилиндрическая оболочка, классическая теория пластин, метод конечных элементов, аэроупругая устойчивость, флаттер

DOI: 10.31857/S0572329920050049

1. Введение. Интерес к изучению аэроупругих явлений, возникающих в тонкостенных телах при их взаимодействии со сверхзвуковым потоком газа, не ослабевает уже более полувека [1–4], начиная с момента, когда для решения таких задач был предложен простой и надежный инструмент в виде аналитического выражения для аэродинамического давления, построенного на основе поршневой теории [5]. Библиографические обзоры, представленные в недавних публикациях [6–11], демонстрируют тенденцию к усложнению используемых моделей. В современных исследованиях принимается во внимание не только комбинированное воздействие статических и динамических нагрузок и оценивается их влияние на неустойчивость тонкостенных оболочек, выполненных из перспективных функциональных материалов, но и анализируются возможности активного или пассивного управления порогом устойчивости с помощью материалов, обладающих пьезоэлектрическими свойствами.

В технических приложениях находят применение оболочечные конструкции, в которых эллиптический или овальный профиль применяется в качестве инженерного решения. Кроме этого, незначительное отклонение от кругового поперечного сечения может рассматриваться как неправильность формы, возникающая в процессе использования изделия [12]. Очевидно, что анализ динамического поведения таких систем при их взаимодействии с газообразной средой требует тщательного изучения с целью определения эксплуатационных характеристик, влияющих на их жизненный цикл. Несмотря на данный факт, значительная часть представленных в литературе исследо-

ваний посвящена цилиндрическим или коническим оболочкам, имеющим круговое поперечное сечение. Лишь в немногих из них затронуты аспекты аэроупругой устойчивости оболочек, сечение которых отлично от кругового. Исследование панельного флаттера параболических оболочек, моделирующих обтекатель ракет-носителей, выполнено в работе [13], а цилиндрических оболочек с эллиптическим поперечным сечением – в [14–16]. В пионерской работе [14] для определения флаттерных характеристик эллиптического цилиндра конечной длины применяется метод Ритца. Показано, что критическая скорость потока газа незначительно меняется при малом изменении эксцентриситета эллипса и существенно падает с его ростом. В статьях [15, 16] с помощью метода Бубнова–Галёркина исследуется влияние эксцентриситета на критические характеристики ненагруженных и нагруженных оболочек, имеющих различные геометрические параметры. Отметим, что сведения о других исследованиях эллиптических оболочек, помимо обзорной работы [12], также приводится в статье авторов [17]. В перечисленных публикациях [14–16] используется теория пологих оболочек с пренебрежением инерцией в срединной поверхности, а решение задачи ищется в виде тригонометрических рядов с незначительным количеством удерживаемых членов. Современные конечно-элементные подходы для описания оболочек позволяют с достаточной достоверностью моделировать поведение тонкостенных конструкций в общем случае произвольного поперечного сечения [18, 19]. Существующие методы решения задач на собственные значения [20, 21], технологии разреженных матриц и параллельных вычислений предоставляют возможность использования традиционного подхода для изучения панельного флаттера в случае матриц больших размерностей. Несмотря на всю свою простоту, он все еще является эффективным инструментом для проведения параметрического исследования и получения качественных оценок в задачах аэроупругости. Разработка такого алгоритма и выполнение численных экспериментов на его основе является целью настоящей работы. Это позволит получить, по крайней мере, качественное подтверждение зависимостей, приведенных в численно-аналитических работах [14–16], которое, насколько известно авторам, в настоящий момент в литературе не представлено.

2. Математическая постановка задачи и ее численная реализация. Рассматривается тонкостенная изотропная эллиптическая цилиндрическая оболочка длиной L , полуосями R_x и R_y , толщиной h , которая взаимодействует с внешним сверхзвуковым потоком газа, текущим со скоростью U_∞ . Геометрические параметры конструкции приведены на рис. 1. Предполагается, что криволинейная поверхность оболочки представляет собой совокупность плоских сегментов [22]. Деформации в каждом из них считаются малыми и вычисляются с помощью классической теории тонких пластин [23–25] в декартовых координатах $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, связанных с боковой поверхностью тела

$$\bar{\epsilon} = \{\epsilon_{\bar{x}\bar{x}}, \epsilon_{\bar{y}\bar{y}}, \gamma_{\bar{x}\bar{y}}\}^T = \left\{ \frac{\partial u}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial v}{\partial \bar{y}}, \frac{\partial u}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial v}{\partial \bar{x}} \right\}^T + \bar{z} \left\{ -\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}^2}, -\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{y}^2}, -2\frac{\partial w}{\partial \bar{x}\partial \bar{y}} \right\}^T \quad (2.1)$$

Здесь и далее прямой чертой сверху обозначены величины, записанные в координатах $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, а u , v и w – компоненты перемещений срединной поверхности в направлении этих осей.

Физические соотношения, связывающие вектор усилий и моментов \mathbf{s} с вектором деформаций $\bar{\epsilon}$, записываются в виде

$$\mathbf{s} = \{T_{\bar{x}\bar{x}}, T_{\bar{y}\bar{y}}, T_{\bar{x}\bar{y}}, M_{\bar{x}\bar{x}}, M_{\bar{y}\bar{y}}, M_{\bar{x}\bar{y}}\}^T = \mathbf{D}\bar{\epsilon} \quad (2.2)$$

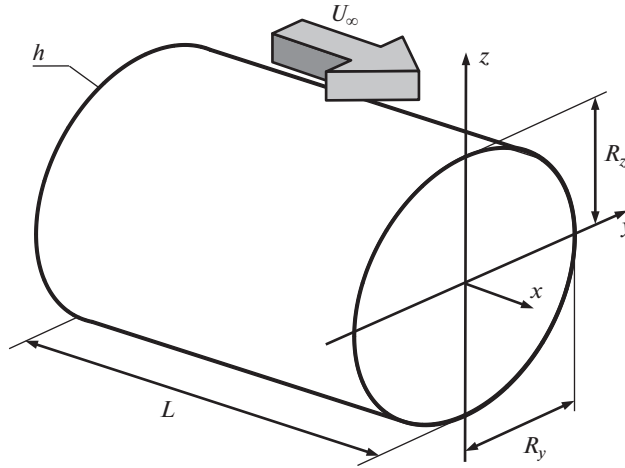


Рис. 1

Матрица упругих констант \mathbf{D} для изотропного материала определяется следующим образом

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_m = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{Q} d\bar{z}, \quad \mathbf{D}_b = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{Q} \bar{z}^2 d\bar{z}, \quad \mathbf{Q} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

где E и ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала оболочки.

Давление, действующее со стороны внешнего сверхзвукового потока газа на поверхность оболочки, вычисляется согласно квазистатической аэродинамической теории [2] с поправкой Крумхаара на кривизну оболочки [26]

$$p_a = -\left(q \frac{\partial w}{\partial \bar{x}} + q_1 \frac{\partial w}{\partial t} - q_2 w \right) \quad (2.4)$$

где

$$q = \rho_\infty U_\infty^2 / \beta = \kappa p_\infty M_\infty^2 / \beta, \quad q_1 = q (M_\infty^2 - 2) / (U_\infty \beta^2), \quad q_2 = q / (2R\beta)$$

Здесь: q – модифицированное динамическое давление; ρ_∞ , p_∞ и c_∞ – плотность, статическое давление и скорость звука в невозмущенном потоке газа; $M_\infty = U_\infty / c_\infty$ – число Маха в газе; κ – показатель адиабаты; $\beta = (M_\infty^2 - 1)^{1/2}$, $R = R(\varphi)$ – функция, которая описывает изменение радиуса оболочки в зависимости от угла φ в окружном направлении.

В дополнении к выражению (2.4) рассматривается соотношение, в котором не принимается во внимание поправка на кривизну [27]

$$p_a = -\left(q \frac{\partial w}{\partial \bar{x}} + q_1 \frac{\partial w}{\partial t} \right) \quad (2.5)$$

и формула на основе поршневой теории [5]

$$p_a = -\kappa p_\infty \left(M_\infty \frac{\partial w}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{c_\infty} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \quad (2.6)$$

Математическая формулировка задачи динамики тонкостенной оболочки основывается на вариационном принципе возможных перемещений, который записывается в матричном виде

$$\int_S \delta \bar{\mathbf{e}}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{e}} dS + \int_V \delta \bar{\mathbf{u}}^T \rho_s \ddot{\bar{\mathbf{u}}} dV - \int_{S_\sigma} \delta \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{t} dS = 0 \quad (2.7)$$

где ρ_s – плотность материала оболочки; $\bar{\mathbf{u}} = \{u, v, w, \theta_{\bar{x}}, \theta_{\bar{y}}, \theta_{\bar{z}}\}^T$ – вектор перемещений и углов поворота оболочки; $\mathbf{t} = \{0, 0, p_a, 0, 0, 0\}^T$ – вектор поверхностной нагрузки, S – поверхность оболочки объема V , S_σ – поверхность, на которой задано аэродинамическое давление.

Решение задачи осуществляется с помощью метода конечных элементов (МКЭ). После применения его известных процедур с учетом (2.1)–(2.3) и представления для давления, например, в виде (2.4), получим из (2.7) матричное соотношение

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + (\mathbf{K} + \mathbf{A} + \mathbf{A}_k) \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (2.8)$$

где \mathbf{u} – обобщенный вектор узловых перемещений и углов поворота в системе координат (x, y, z) .

Типовые матрицы отдельного конечного элемента формируются в координатах $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, связанных с боковой поверхностью оболочки, следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{M}} &= \int_V \mathbf{N}^T \rho_s \mathbf{N} dV, & \bar{\mathbf{C}} &= - \int_{S_\sigma} q_1 \mathbf{N}_w^T \mathbf{N}_w dS, & \bar{\mathbf{K}} &= \int_S \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dS \\ \bar{\mathbf{A}} &= - \int_{S_\sigma} q \mathbf{N}_w^T \frac{\partial \mathbf{N}_w}{\partial \bar{x}} dS, & \bar{\mathbf{A}}_k &= \int_{S_\sigma} q_2 \mathbf{N}_w^T \mathbf{N}_w dS \end{aligned}$$

Здесь: \mathbf{B} – матрица градиентов, связывающая вектор деформаций с вектором узловых перемещений оболочечного конечного элемента; \mathbf{N} и \mathbf{N}_w – функции формы обобщенного вектора узловых перемещений оболочки и его нормальной составляющей.

Преобразование узловых перемещений к глобальным декартовым координатам (x, y, z) , в которых записано уравнение (2.8), осуществляется для каждого конечного элемента с помощью матрицы направляющих косинусов известным образом. Мембранные перемещения оболочки (u, v) аппроксимируются линейными функциями формы, а изгибные перемещения w – неконформными функциями формы Эрмита. Дискретизация поверхности конструкции осуществляется плоскими четырехугольными конечными элементами, в общем случае произвольно ориентированными в пространстве. Более подробно аспекты численной реализации изложены в предыдущих работах авторов [17, 28].

Движение оболочки представляется в виде $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \exp(\lambda t)$, где $\lambda = \delta + i\omega$ – характеристический показатель, ω – собственная частота колебаний, δ – величина, отвечающая за демпфирование системы, $i = \sqrt{-1}$. Подставляя это выражение в уравнение (2.8) и сокращая на экспоненту, получим

$$(\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{C} + \mathbf{K} + \mathbf{A} + \mathbf{A}_k) \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (2.9)$$

Оценка устойчивого состояния системы основывается на анализе характеристических чисел λ , получаемых при последовательно возрастающем значении варьируемого параметра, в качестве которого выступает статическое давление в невозмущенном потоке газа p_∞ . Для этого уравнение (2.9) преобразуется к обобщенной задаче на соб-

Таблица 1

Число элементов N_θ	Число степеней свободы	p_{cr} Па	δ , %	j_{cr}
100	37200	4648	—	23
120	44640	4069	-14.22%	24
140	52080	3862	-5.36%	24
168	62496	3755	-2.86%	25
180	66960	3737	-0.48%	25
200	74400	3721	-0.44%	25

Таблица 2

Источник	p_{cr} Па	j_{cr}
Аналитическое решение [29]	3792	25
Полуаналитическое решение [30]	3730	25
МКЭ [31]	3875	26
Гибридный МКЭ [32]	3599	26
МКЭ [33]	3713	25
Данная работа	3721	25

ственные значения (2.10), которая решается с помощью алгоритма на основе неявно перезапускаемого метода Арнольди [20]

$$\lambda \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{K} + \mathbf{A}_0 \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.10)$$

где \mathbf{I} – единичная матрица, $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A} + \mathbf{A}_k$.

3. Результаты. 3.1. Верификация конечно-элементного алгоритма. Достоверность полученных с помощью разработанного конечно-элементного алгоритма результатов подтверждена асимптотическим поведением решения при увеличении числа узловых неизвестных (табл. 1) и сравнением с известными данными, представленными в литературе (табл. 2). Для этой цели рассмотрена задача о панельном флаттере свободно опертой на обоих краях ($v = w = 0$, $\theta_{\bar{x}} = 0$) круговой цилиндрической оболочки со следующими параметрами геометрии и материала: $R = 0.2032$ м, $L = 0.39116$ м, $R/h = 2000$, $E = 110.32$ ГПа, $\nu = 0.35$, $\rho_s = 8902.27$ кг/м³. Поток воздуха имел характеристики: $M_\infty = 3$, $\kappa = 1.4$, температура торможения в невозмущенном потоке газа $T_\infty = 48.89^\circ\text{C}$. В пространственной постановке при большом количестве окружных полуволн j необходимо увеличивать число конечных элементов N_θ в этом направлении, чтобы корректно описать форму колебаний. Значения статического давления в невозмущенном потоке газа p_∞ , при которых наступает потеря устойчивости (p_{cr}), приведены в табл. 1 при разной дискретизации в окружном направлении. В этих расчетах количество конечных элементов по длине оставалось неизменным и было равно двадцати. Во всех последующих примерах использовалась сетка, удовлетворяющая условию

$$\delta = \frac{|p_{cr}^{(i)} - p_{cr}^{(i-1)}|}{p_{cr}^{(i)}} \leq 1\%$$

где $p_{cr}^{(i)}$ – значение критического параметра, полученное при i -м варианте дискретизации. Причем, число степеней свободы в i -м варианте всегда больше, чем в $(i - 1)$ -м.

Сравнение критических номеров окружных полуволн j_{cr} и соответствующих им минимальных значений статического давления в невозмущенном потоке газа p_{cr} приведено в табл. 2. Из представленной информации можно заключить, что полученные с помощью разработанного конечно-элементного алгоритма данные достаточно хорошо согласуются с представленными в литературе результатами. Имеющиеся отличия обусловлены использованием в перечисленных работах как двумерных (осесимметричных) формулировок, так и различных оболочечных теорий.

3.2. Анализ аэроупругой устойчивости. Рассматриваются цилиндрические оболочки с эллиптическим поперечным сечением, которое характеризуется отношением $\alpha = R_{max}/R_{min}$, где R_{max} и R_{min} – наибольшая и наименьшая полуоси эллипса. При варьировании величины α значения R_{max} и R_{min} подбираются таким образом, чтобы площадь поперечного сечения оставалась неизменной и была равной площади круга радиуса R . В численных расчетах использовались следующие параметры геометрии и материала: $R = 0.07725$ м, $L = 0.231$ м, $R/h = 515$, $E = 2.05$ ГПа, $\nu = 0.3$, $\rho_s = 7850$ кг/м³. Поток воздуха имел характеристики как в п. 3.1. Рассмотрено два варианта кинематических граничных условий, задаваемых на краях конструкции: жесткое защемление ($u = v = w = 0$, $\theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$) и свободный край.

Известно [34], что потеря устойчивости круговых цилиндрических оболочек, обдуваемых снаружи сверхзвуковым потоком газа, осуществляется в виде связанного флаттера. Его критерием в постановке (2.10) является существование двух форм колебаний, у которых собственные значения λ имеют одинаковые мнимые части (частоту колебаний ω), а действительная часть одного из них (демпфирование δ) положительна. Решение задачи аэроупругой устойчивости круговой оболочки распадается на симметричную и антисимметричную составляющие. В этом случае кратным собственным частотам соответствуют две формы колебаний, отличающиеся поворотом в окружном направлении. Потеря устойчивости по каждой из них наступает при одинаковом значении критического давления. У эллиптической цилиндрической оболочки существуют формы с идентичным числом полуволн по окружности. Они имеют разные частоты в спектре и по своей сути не являются симметричными и антисимметричными, поскольку могут быть сильно искажены. В рассмотренных примерах это различие оказалось весьма мало ($<0.1\%$), поэтому связанный флаттер наступает сначала по одной форме, а затем практически сразу же по другой, но с таким же числом полуволн по окружности. В связи с этим, в следующих примерах критическим номером окружных полуволн j_{cr} для эллиптических цилиндрических оболочек будем считать тот, при котором потеря устойчивости наступает раньше.

На рис. 2 представлены зависимости критического давления p_{cr} (кПа), при котором происходит потеря устойчивости, от параметра эллиптичности α . Рассмотрены жестко закрепленные на обоих краях (рис. 2а) и консольные оболочки (рис. 2б) при $R/h = 515$. Здесь и далее на рисунках символом S обозначена область устойчивости. Сплошные линии соответствуют случаю, когда давление от потока газа вычислялось по квазистатической аэродинамической теории с поправкой Крумхаара на кривизну оболочки (выражение (2.4)). Символами обозначены результаты, где данная поправка отсутствует (выражение (2.5)). Поведение обеих кривых качественно совпадает, а количественное различие на одинаковой конечно-элементной сетке не превышает 5%. Вычисление аэродинамического давления согласно поршневой теории (выражение (2.6), на фигуре отмечено пунктирной линией) приводит не только к завышенным относительно этих значений результатам, но и к качественно другому виду границы устойчивости. Отметим, что аналогичное отличие в критических параметрах, получа-

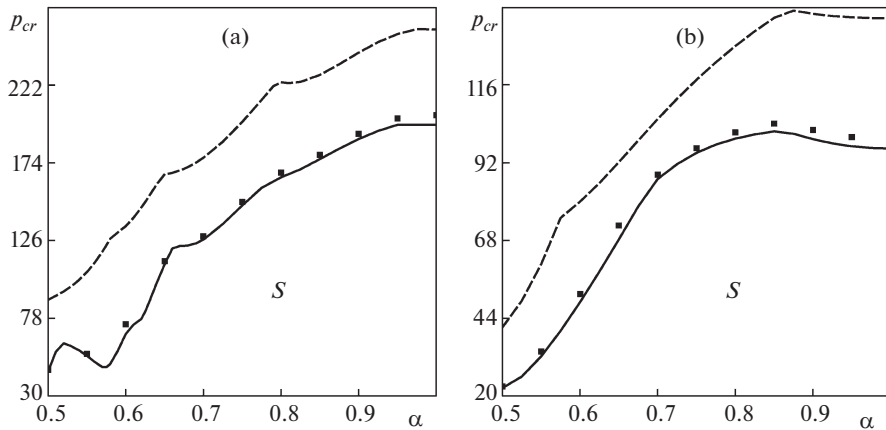


Рис. 2

емых по различным аэродинамическим теориям, выявлено и в случае оболочек с круговым поперечным сечением [32, 35]. Немонотонное поведение кривых объясняется сменой моды, по которой осуществляется потеря устойчивости. В частности, для жестко закрепленных на обоих краях оболочек количество окружных полуволн j_{cr} при малых α меняется достаточно часто (рис. 2а). В качестве примера на рис. 3 изображены формы колебаний, полученные при критических значениях статического давления для разных отношений полуосей эллипса $\alpha R/h = 515$. Цветовая шкала соответствует безразмерным нормальным перемещениям $\tilde{w}_n = w_n/\max(w_n)$. Во всех примерах потеря устойчивости происходит в виде связанного флаттера. Она наступает в результате слияния двух форм колебаний с одинаковым числом окружных полуволн j , но с их разным количеством по длине оболочки ($m = 1$ и $m = 2$).

В ходе исследования консольно защемленной оболочки обнаружено, что при уменьшении отношения полуосей эллипса α с 1 до 0.85 происходит повышение критического давления примерно на 5%, после чего следует его убывание (рис. 2б). Таким образом формируется некоторый интервал изменения параметра α , при котором оболочка с эллиптическим поперечным сечением будет устойчивее аналогичной круговой конфигурации. Данное явление стабилизации сохраняется при всех рассмотренных вариантах вычисления аэродинамического давления.

При уменьшении толщины оболочки до $R/h = 1000$ критическое давление p_{cr} (кПа), вычисляемое согласно выражению (2.4), снижается в разы, а его поведение в зависимости от параметра эллиптичности приобретает существенно немонотонный характер (рис. 4). Причиной этого является уже упоминавшаяся смена моды, по которой осуществляется потеря устойчивости. Наиболее активно этот процесс происходит у жестко закрепленных оболочек при значениях параметра эллиптичности $\alpha < 0.67$ (рис. 4а). Пилообразный вид кривой потребовал более тщательного анализа, поэтому построение зависимостей на таких участках осуществлялось с переменным шагом по α и со сгущением в области резкого изменения критического давления. Такое поведение можно объяснить тем, что часть конструкции с большим радиусом кривизны обладает меньшей жесткостью и работает подобно сегменту пологой оболочки или пластине, закрепленной вдоль двух длинных сторон. По этой же причине при $\alpha < 0.67$ потеря устойчивости наступает при более низком давлении.

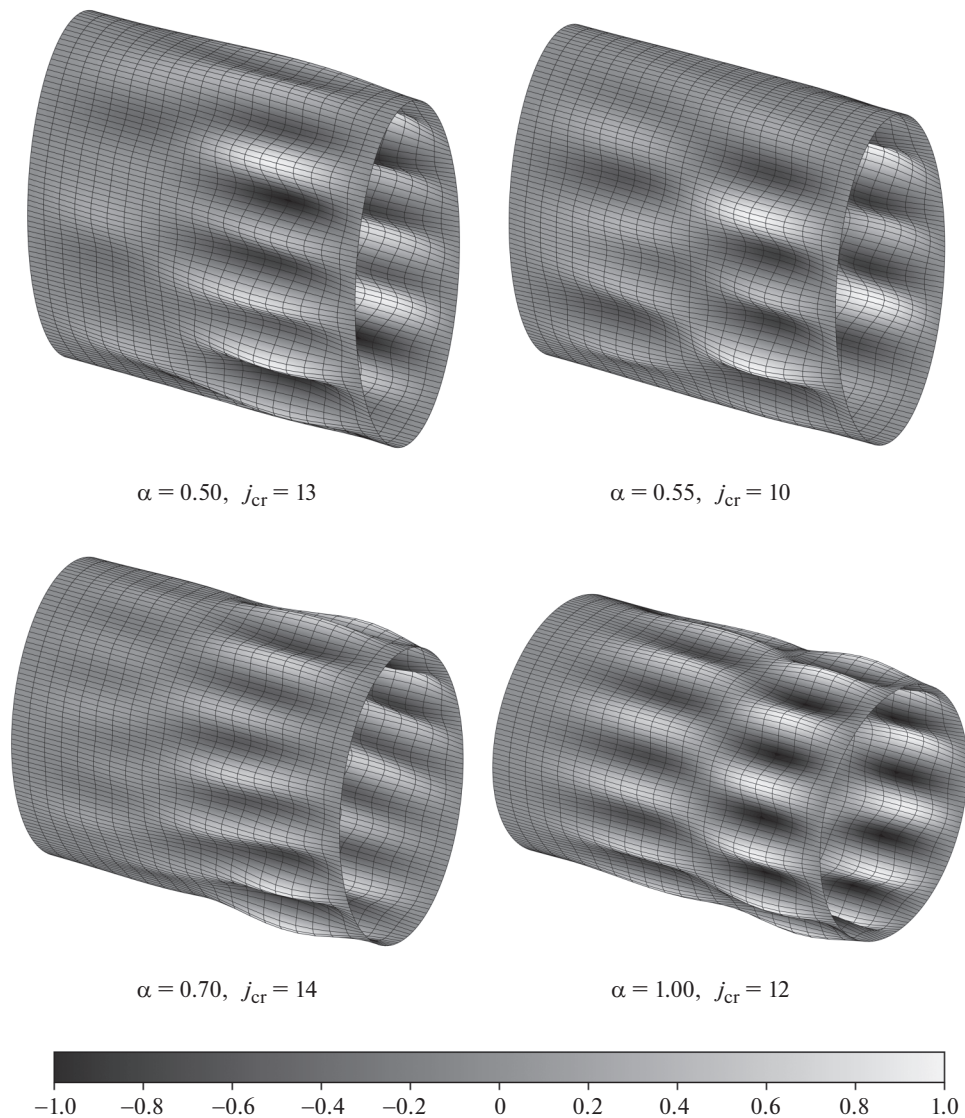


Рис. 3.

С уменьшением толщины консольно закрепленной эллиптической оболочки повышение границы флаттера относительно круговой конфигурации наблюдается в меньшей степени. В отличие от случая $R/h = 515$, при отношении $R/h = 1000$ существует два небольших участка стабилизации, разделенных пологим провалом критического давления.

4. Заключение. Аэроупругая устойчивость цилиндрических оболочек с эллиптическим поперечным сечением, обтекаемых снаружи сверхзвуковым потоком газа, исследована в трехмерной постановке с помощью изложенной математической модели и ее численной реализации на основе метода конечных элементов. С использованием разработанной программы проанализировано влияние кинематических граничных

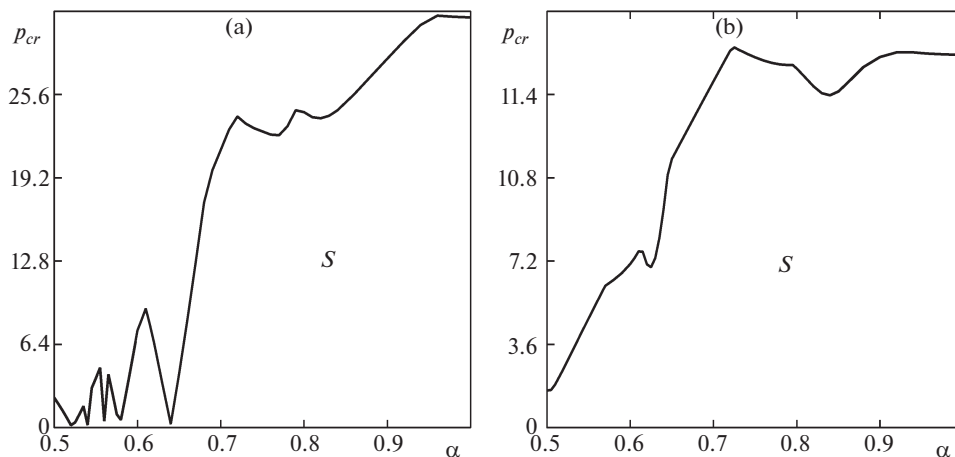


Рис. 4

условий, геометрических размеров и параметра эллиптичности на критические характеристики потери устойчивости в виде флаттера. Продемонстрировано, что в случае консольного закрепления существуют такие отношения полуосей эллипса, которые обеспечивают более высокие границы аэроупругой устойчивости по сравнению с аналогичной круговой конфигурацией. Указанная особенность допускает возможность внесения незначительных изменений в оболочечную конструкцию, приводящих к повышению ее эксплуатационных характеристик.

Работа выполнена в рамках государственного задания; номер гос. регистрации темы АААА-А19-119012290100-8.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек // Итоги науки и техники. Т. 11: Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНТИ, 1978. С. 67–122.
2. Bismarck-Nasr M.N. Finite element analysis of aeroelasticity of plates and shells // Appl. Mech. Rev. 1992. V. 45. № 12. P. 461–482.
3. Bismarck-Nasr M.N. Finite elements in aeroelasticity of plates and shells. Pt. 2 // Appl. Mech. Rev. 1996. V. 49. № 10. P. S17–S24.
4. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. М.: Наука, 2006. 247 с.
5. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей // ПММ. 1956. Т. 20. № 6. С. 733–755.
6. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V., Matveenko V.P. Aeroelastic stability of heated functionally graded cylindrical shells containing fluid // Mech. Adv. Mater. Struct. 2017. V. 24. № 16. P. 1391–1400.
7. Lin H., Cao D., Shao C. An admissible function for vibration and flutter studies of FG cylindrical shells with arbitrary edge conditions using characteristic orthogonal polynomials // Compos. Struct. 2018. V. 185. P. 748–763.
8. Mahmoudkhani S. Aerothermoelastic analysis of imperfect FG cylindrical shells in supersonic flow // Compos. Struct. 2019. V. 225. 111160.
9. Li X., Li Y.H., Xie T.F. Vibration characteristics of a rotating composite laminated cylindrical shell in subsonic air flow and hygrothermal environment // Int. J. Mech. Sci. 2019. V. 150. P. 356–368.
10. Бочкарёв С.А., Лекомцев С.В. Устойчивость функционально-градиентных круговых цилиндрических оболочек при комбинированном нагружении // Механика композитных материалов. 2019. Т. 55. № 3. С. 501–518.

11. *Muc A., Flis J., Augustyn M.* Optimal design of plated/shell structures under flutter constraints-A literature review // *Materials*. 2019. V. 12. № 24. 4215.
12. *Soldatos K.P.* Mechanics of cylindrical shells with non-circular cross section: A survey // *Appl. Mech. Rev.* 1999. V. 52. P. 237–274.
13. Динамическая неустойчивость обтекателей ракет-носителей в полете / *М.В. Чернобрышко* [и др.] // *Проблемы машиностроения*. 2014. Т. 7. № 2. С. 9–16.
14. *Шандаров Л.Г.* Флаттер цилиндрической оболочки эллиптического поперечного сечения // *МТТ*. 1968. Т. 2. № 1. С. 122–126.
15. *Kozarov M., Vodenitcharova T.* Linear panel flutter of an elliptic cylindrical shell // *Arch. Appl. Mech.* 1991. V. 61. № 8. P. 505–516.
16. *Kozarov M., Vodenitcharova T.* On the linear panel flutter and divergence of an elliptic cylindrical shell // *J. Constr. Steel Res.* 1992. V. 21. № 1–3. P. 235–253.
17. *Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V., Matveenko V.P.* Natural vibrations of prestressed noncircular cylindrical shells, containing quiescent fluid // *Thin-Walled Struct.* 2015. V. 90. P. 12–22.
18. *Баме К.Ю.* Методы конечных элементов. М: Физматлит, 2010. 1024 с.
19. *Bathe K.J., Dvorkin E.N.* A formulation of general shell elements – the use of mixed interpolation of tensorial components // *Int. J. Numer. Methods Eng.* 1986. V. 22. P. 697–722.
20. *Lehoucq R.B., Sorensen D.C.* Deflation techniques for an implicitly restarted Arnoldi iteration // *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 1996. V. 17. № 4. P. 789–821.
21. *Jarlebring E., Michiels W., Meerbergen K.* A linear eigenvalue algorithm for the nonlinear eigenvalue problem // *Numer. Math.* 2012. V. 122. P. 169–195.
22. *Зенкевич О.С.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 544 с.
23. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
24. *Ворович И.И.* Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. М.: Наука, 1989. 376 с.
25. *Reddy J.N.* An introduction to nonlinear finite element analysis. New York: Oxford University Press, 2004. 488 p.
26. *Krumhaar H.* The accuracy of linear piston theory when applied to cylindrical shells // *AIAA J.* 1963. V. 1. С. 1448–1449.
27. *Voss H.M.* The effect of an external supersonic flow on the vibration characteristics of thin cylindrical shells // *J. Aerospace Sci.* 1961. V. 3. P. 945–956.
28. Hydroelastic stability of partially filled coaxial cylindrical shells / *S.A. Bochkarev* [et al.] // *Acta Mech.* 2019. V. 230. № 11. P. 3845–3860.
29. *Olson M.D., Fung Y.C.* Comparing theory and experiment for the supersonic flutter of circular cylindrical shells // *AIAA J.* 1967. V. 5. № 10. P. 1849–1856.
30. *Hasheminejad S.M., Aghayi Motaaleghi M.* Supersonic flutter control of an electrorheological fluid-based smart circular cylindrical shell // *Int. J. Struct. Stab. Dynam.* 2014. V. 14. № 2. 1350064.
31. *Ganapathi M., Varadan T.K., Jijen J.* Field-consistent element applied to flutter analysis of circular cylindrical shells // *J. Sound Vib.* 1994. V. 171. № 4. P. 509–527.
32. *Sabri F., Lakis A.A.* Finite element method applied to supersonic flutter of circular cylindrical shells // *AIAA J.* 2010. V. 48. № 1. P. 73–81.
33. *Бочкарёв С.А., Лekomтцев С.В.* Аэроупругая устойчивость круговых цилиндрических оболочек, содержащих текучую жидкость // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2015. Т. 19. № 4. С. 750–767.
34. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1961. 341 с.
35. *Amabili M., Pellicano F.* Nonlinear supersonic flutter of circular cylindrical shells // *AIAA J.* V. 39. 2001. P. 564–573.