ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2020, № 5, с. 161–164

УДК 539.374

КИНЕМАТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ ВДОЛЬ ХАРАКТЕРИСТИК В СЖИМАЕМЫХ ТЕЧЕНИЯХ НА ГРАНЯХ ПРОИЗВОЛЬНОГО КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОГО УСЛОВИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ

Ю. Н. Радаев*,**

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
**e-mail: radayev@ipmnet.ru*
***e-mail: y.radayev@gmail.com*

Поступила в редакцию 15.01.2020 г.
После доработки 13.02.2020 г.
Принята к публикации 16.03.2020 г.

В работе рассматриваются течения идеально пластических сжимаемых сред для напряженных состояний, соответствующих граням кусочно-линейного условия текучести. Подобные течения наблюдаются, в частности, в неплотно связанных средах Кулона–Мора, находящихся в состоянии плоской деформации. Предполагается, что промежуточное главное нормальное напряжение не оказывает никакого влияния на текучесть или переход в предельное состояние. В этих условиях система дифференциальных уравнений кинематики будет принадлежать к гиперболическому аналитическому типу, элементы характеристических линий будут мгновенно нерастяжимыми, ортогональные проекции вектора приращения перемещения на характеристики будут связаны дифференциальными соотношениями с операторами дифференцирования вдоль характеристических направлений.

Ключевые слова: кусочно-линейное условие пластичности, среда Кулона–Мора, сжимаемость, течение, главное напряжение, асимптотические директоры, сопряженные директоры, гиперболичность, характеристика

DOI: 10.31857/S0572329920040169

1. Общее кусочно-линейное условие пластичности представим в форме линейного уравнения, связывающего главные нормальные напряжения σ_1, σ_2, σ_3 симметричного тензора напряжений s:

$$a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 - a_3\sigma_3 = b \tag{1.1}$$

где a_1, a_2, a_3, b – определяющие постоянные.

Существенное упрощение соотношений теорий пластичности может быть достигнуто специальной нумерацией осей главного триэдра тензора напряжений s: занумеруем главные оси так, чтобы для актуального напряженного состояния соответствующие главные нормальные напряжения σ_1, σ_2, σ_3 расположились бы в порядке убывания

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \tag{1.2}$$

Промежуточное главное нормальное напряжение играет особую роль в теориях пластичности [1–6]. Часто его влиянием на текучесть металлов и деформацию неплотно связанных сред можно пренебречь. Поэтому будем полагать, что $a_2 = 0$. Уравнение (1.1) разделим на a_1 и введем обозначения

$$\bar{a} = \frac{a_3}{a_1}, \quad \bar{b} = \frac{b}{a_1}$$

после чего используемое далее кусочно-линейное условие текучести приведем к виду

$$\sigma_1 - \bar{a}\sigma_3 = \bar{b} \tag{1.3}$$

Среда Кулона–Мора – один из вариантов кусочно-линейного условия текучести, который прекрасно моделирует механическое поведение сухих песков, грунтов, гранулированных сред, т.е. рыхлых материалов с зернистой, пористой или гранулированной структурой [4]. В терминах главных напряжений σ_1, σ_2, σ_3 критерий текучести Кулона–Мора для сыпучих сред с внутренним трением и сцеплением формулируется в следующем виде [7, 8]:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = c\cos\gamma - \sin\gamma\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \tag{1.4}$$

где c, γ – определяющие постоянные. Критерий Кулона–Мора (1.4) можно также привести к следующему виду, по форме эквивалентному (1.3):

$$\sigma_1 - a\sigma_3 = 2k \tag{1.5}$$

Здесь материальные постоянные a и k связаны с коэффициентом сцепления c и углом внутреннего трения γ следующими соотношениями:

$$a = \frac{1 - \sin\gamma}{1 + \sin\gamma}, \quad k = \frac{c\cos\gamma}{1 + \sin\gamma}$$

2. В кинематике идеально пластических тел удобно оперировать с приращениями вектора перемещения du и тензора деформации de. Ориентируем единичные базисные векторы $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ вдоль главных осей тензора напряжений (и тензора de).

Приращение вектора перемещений du можно представить в виде разложения по векторам локального ортонормированного базиса $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$

$$d\mathbf{u} = \mathbf{l}du_{\langle 1\rangle} + \mathbf{m}du_{\langle 2\rangle} + \mathbf{n}du_{\langle 3\rangle} \tag{2.1}$$

Спектральное представление приращения тензора деформации de примем в форме

$$de = l \otimes l(d\varepsilon_1) + m \otimes m(d\varepsilon_2) + n \otimes n(d\varepsilon_3) \tag{2.2}$$

где l, m, n – ортонормированный базис из собственных векторов, общих как для тензора напряжений s, так и для приращения тензора деформации de; $d\varepsilon_1$, $d\varepsilon_2$, $d\varepsilon_3$ – главные приращения (пластической) деформации (собственные значения тензора de).

Введем далее особую нумерацию осей главного триэдра так, чтобы наряду с (1.2) выполнялись неравенства

$$d\varepsilon_1 \geq d\varepsilon_2 \geq d\varepsilon_3 \tag{2.3}$$

В силу ассоциированного закона пластического течения

$$d\varepsilon_1 = d\lambda, \quad d\varepsilon_2 = 0, \quad d\varepsilon_3 = -\bar{a}d\lambda \quad (d\lambda \geq 0) \tag{2.4}$$

системы упорядоченных главных напряжений и главных приращений деформации оказываются согласованными при наличии определяющего ограничения

$$\bar{a} \geq 0.$$

Понятие об асимптотических директорах инкремента тензора деформации de и его представление в терминах асимптотических директоров $``l$, $``n$ рассматриваются в статьях [7, 8], а также в более ранней публикации [9]. В частности, диадное представление инкремента тензора деформации de имеет вид

$$de = I(d\varepsilon_2) + (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3)\mathrm{sym}(``l \otimes ``n) \tag{2.5}$$

Угол между асимптотическими директорами $\ddot{l}$, $\ddot{n}$ вычисляется с помощью кинематического параметра Лоде

$$\cos\ddot{\iota} = -\nu \tag{2.6}$$

где

$$\nu = \frac{2d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3}{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3} \tag{2.7}$$

Течение на грани кусочно-линейного условия пластичности подчиняется кинематическому ограничению $d\varepsilon_2 = 0$, следующему из ассоциированного закона течения.

В обозначениях теории поля система дифференциальных уравнений кинематики относительно физических компонент приращения вектора перемещений $du_{\langle 1\rangle}$, $du_{\langle 3\rangle}$ имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}(-\kappa_1 + n\cdot\nabla)du_{\langle 1\rangle} + (-\kappa_3 + l\cdot\nabla)du_{\langle 3\rangle} = 0\\ \sin^2\frac{\ddot{\iota}}{2}((l\cdot\nabla)du_{\langle 1\rangle} + \kappa_1 du_{\langle 3\rangle}) + \cos^2\frac{\ddot{\iota}}{2}((n\cdot\nabla)du_{\langle 3\rangle} + \kappa_3 du_{\langle 1\rangle}) = 0\end{gathered} \tag{2.8}$$

она принадлежит к гиперболическому типу; характеристические направления совпадают с направлениями сопряженных директоров $\ddot{l}$, $\ddot{n}$.

Сопряженные директоры указывают направления в плоскости, ортогональной второй главной оси тензора de, которые ортогональны направлениям асимптотических директоров $\ddot{l}$, $\ddot{n}$. Директор $\ddot{l}$ ортогонален асимптотическому директору $\ddot{n}$, а директор $\ddot{n}$ ортогонален $\ddot{l}$.

3. Для мгновенных удлинений элементов характеристических линий находим

$$\begin{gathered}\ddot{l}\cdot(d\mathbf{e})\cdot\ddot{l} = 0\\ \ddot{n}\cdot(d\mathbf{e})\cdot\ddot{n} = 0\end{gathered} \tag{3.1}$$

т.е. в процессе течения линейные элементы, перпендикулярные направлениям асимптотических директоров $\ddot{l}$, $\ddot{n}$, не претерпевают мгновенных удлинений, т.е. материальные волокна, ориентированные вдоль директоров $\ddot{l}$, $\ddot{n}$, мгновенно не удлиняются и не укорачиваются.

Прежде всего вместо физических компонент $du_{\langle 1\rangle}$, $du_{\langle 3\rangle}$ приращения вектора перемещения du относительно базиса l, n введем его ортогональные проекции на сопряженные направления $\ddot{l}$, $\ddot{n}$: $du_{\langle\bar{1}\rangle}$, $du_{\langle\bar{3}\rangle}$.

Операторы дифференцирования вдоль изостатических d_1, d_3 и сопряженных направлений $\bar{d}_1$, $\bar{d}_3$ связаны между собой формулами [10]

$$\begin{gathered}d_1 = \frac{1}{2\sin\frac{\ddot{\iota}}{2}}(\bar{d}_1 + \bar{d}_3)\\ d_3 = \frac{1}{2\cos\frac{\ddot{\iota}}{2}}(\bar{d}_3 - \bar{d}_1)\end{gathered} \tag{3.2}$$

Дифференциальные соотношения вдоль характеристических линий (ср. с [11])

$$\begin{gathered}\bar{d}_1 du_{\langle\bar{1}\rangle} - \frac{\cos\ddot{\iota}\,du_{\langle\bar{1}\rangle} + du_{\langle\bar{3}\rangle}}{\sin\ddot{\iota}}\bar{d}_1\left(\theta - \frac{\ddot{\iota}}{2}\right) = 0\\ \bar{d}_3 du_{\langle\bar{3}\rangle} + \frac{du_{\langle\bar{1}\rangle} + \cos\ddot{\iota}\,du_{\langle\bar{3}\rangle}}{\sin\ddot{\iota}}\bar{d}_3\left(\theta + \frac{\ddot{\iota}}{2}\right) = 0\end{gathered} \tag{3.3}$$

где θ – угол между некоторым фиксированным направлением в плоскости течения и собственным вектором l.

Для кусочно-линейного условия текучести угол "ι будет постоянным. После ряда преобразований соотношения кинематики течения (3.3) приобретают следующую окончательную форму:

$$
\begin{aligned}
&\bar{d}_1 du_{\langle\bar{1}\rangle} - (\underset{1}{\bar{a}}\, du_{\langle\bar{1}\rangle} + \underset{3}{\bar{a}}\, du_{\langle\bar{3}\rangle})\bar{d}_1\theta = 0\\
&\bar{d}_3 du_{\langle\bar{3}\rangle} + (\underset{3}{\bar{a}}\, du_{\langle\bar{1}\rangle} + \underset{1}{\bar{a}}\, du_{\langle\bar{3}\rangle})\bar{d}_3\theta = 0
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

где

$$
\underset{1}{\bar{a}} = \frac{1-\bar{a}}{2\sqrt{\bar{a}}},\quad \underset{3}{\bar{a}} = \frac{1+\bar{a}}{2\sqrt{\bar{a}}}
$$

Любопытно отметить, что определяющее ограничение

$$
\bar{a} \geq 0
$$

наряду с неравенством необратимости, никак не ограничивают знак скорости дилатации, т.е. в процессе течения среда может как разрыхляться, так и необратимо сжиматься (в самом точном смысле этого слова).

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00844 “Моделирование термомеханических процессов в сложных средах с помощью принципа термомеханической ортогональности”).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ивлев Д.Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.
2. *Надаи А.* Пластичность. Механика пластического состояния вещества. М., Л.: ОНТИ, 1936. 280 с.
3. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1954. 648 с.
4. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 2. М.: Мир, 1969. 864 с.
5. *Радаев Ю.Н.* Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2004. 147 с.
6. *Радаев Ю.Н.* Пространственная задача математической теории пластичности. 2-е изд. перераб. и доп. Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2006. 240 с.
7. *Радаев Ю.Н.* Мгновенно-нерастяжимые директоры в кинематике трехмерных течений сред Кулона– Мора // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18. Вып. 4. С. 467–483.
8. *Радаев Ю.Н.* К теории неплотно связанных сред Кулона–Мора и обобщенных пластических тел Прандтля // Вестник Чувашского гос. пед. университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. Т. 4 (38). С. 3–24.
9. *Радаев Ю.Н.* Асимптотические оси тензоров напряжений и приращения деформации в механике сжимаемых континуумов // Изв. РАН. Мех. тверд тела. 2013. Т. 5. С. 77–85.
10. *Радаев Ю.Н.* Об одной гиперболической модели плоских необратимо сжимаемых течений сред Кулона– Мора и пластических тел Прандтля // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева Серия: Механика предельного состояния. 2019. Т. 4 (42). С. 56–68.
11. *Радаев Ю.Н.* О кинематических соотношениях вдоль мгновенно нерастяжимых линий в течениях сжимаемых сред // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева Серия: Механика предельного состояния. 2019. Т. 4 (42). С. 84–91.