ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2020, № 5, с. 107–119

УДК 539.3, 539.8

МОДЕЛЬ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УПРУГО-ДИФФУЗИОННЫХ КОЛЕБАНИЙ ШАРНИРНО ОПЕРТОЙ БАЛКИ ТИМОШЕНКО

© 2020 г. А. В. Вестяк[a], А. В. Земсков[a,b,*]

[a] *Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия*

[b] *НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

**e-mail: azemskov1975@mail.ru*

Поступила в редакцию 11.12.2019 г.
После доработки 12.02.2020 г.
Принята к публикации 03.03.2020 г.

Исследуются нестационарные колебания шарнирно опертой балки Тимошенко с учетом массопереноса, находящейся под действием распределенной поперечной нагрузки. Для постановки задачи используется модель балки Тимошенко, полученная с помощью принципа Даламбера из уравнений упругой диффузии для сплошной среды. Для решения полученной задачи применяется интегральное преобразование Лапласа по времени и разложение в ряды Фурье. Путем перехода к классической задаче о нестационарных колебаниях упругой балки проанализировано влияние массопереноса на поле перемещений внутри балки.

Ключевые слова: упругая диффузия, балка Тимошенко, нестационарные колебания, интегральные преобразования

DOI: 10.31857/S0572329920030174

Введение. Примерно с середины 20-го столетия значительное внимание в научной литературе уделяется процессам деформации упругих тел при взаимном влиянии полей различной физической природы, в том числе с учетом диффузии. Несмотря на большие математические трудности, связанные с решением соответствующих начально-краевых задач, существует множество научных работ, посвященных этой тематике. Применительно к задачам механодиффузии с возможным учетом температурных и электромагнитных факторов здесь можно отметить публикации [1–10], где рассматриваются связанные задачи в основном для канонических областей: пространства, полупространства или слоя.

При этом следует отметить, что реальные элементы конструкций имеют, как правило, конечные размеры и моделируются с помощью стержней, пластин или оболочек. Публикаций, посвященных изучению механодиффузионных процессов в телах с указанной геометрией крайне мало. В качестве наиболее известных на сегодняшний день можно указать работы [11–13], где рассматривается постановка контактной задачи термоупругой диффузии для слоистой оболочки и исследуется влияние диффузионных процессов на несущую способность пологой трансверсально-изотропной оболочки в случае статических нагрузок. В статьях [14, 15] рассматриваются квазистатические контактные задачи для стержня с упругим полупространством, а в [16, 17] обсуждаются вопросы, связанные с постановкой задачи механодиффузии для пластины. Вопросы, связанные с построением аналитических решений указанных задач в нестационарной постановке, на сегодняшний день не рассматриваются.

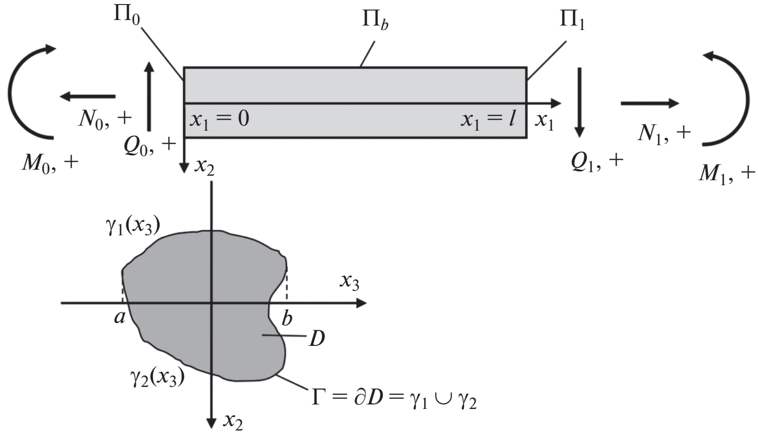

Рис. 1

В данной работе исследуются нестационарные механодиффузионные колебания балки Тимошенко. Модель колебаний балки строится на основе вариационных принципов с использованием известных уравнений упругой диффузии для сплошных сред [1–10, 18–21]. Предлагается аналитический метод решения данной задачи, основанный на использовании интегрального преобразования Лапласа и разложений в ряды по собственным функциям упругодиффузионного оператора.

1. Постановка задачи. Рассматривается задача о нестационарных колебаниях балки Тимошенко с учетом явлений массопереноса. В общем случае балка находится под действием растягивающих усилий, изгибающих моментов и перерезывающих сил, заданных на ее концах. Схема приложенных усилий, ориентация координатных осей и геометрия балки изображены на рис 1.

Для постановки задачи используем упругодиффузионную модель сплошной среды, записанную в декартовой системе координат ($(x_1, x_2, x_3) \in G \subset \Re^3$, $\partial G = \Pi_\sigma \cup \Pi_J$)

$$\ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i, \quad \left(1 + \tau_q \frac{\partial}{\partial \tau}\right)\left(\frac{\partial \eta^{(q)}}{\partial \tau} + \frac{\partial J_i^{(q)}}{\partial x_i} - Y^{(q)}\right) = 0 \quad \left(q = \overline{1, N}\right)$$
$$\sigma_{ij}\nu_j\big|_{\Pi_\sigma} = P_i, \quad \left(J_i^{(q)} + \tau_q \frac{\partial J_i^{(q)}}{\partial \tau}\right)\bigg|_{\Pi_J} = I_i^{(q)}, \quad u_i\big|_{\tau=0} = \frac{\partial u_i}{\partial \tau}\bigg|_{\tau=0} = \eta^{(q)}\big|_{\tau=0} = \frac{\partial \eta^{(q)}}{\partial \tau}\bigg|_{\tau=0} = 0 \tag{1.1}$$

где σ_{ij} и $J_i^{(q)}$ – компоненты тензора напряжений и вектора диффузионного потока, которые определяются следующим образом [18–21]:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \sum_{q=1}^{N} \alpha_{ij}^{(q)} \eta^{(q)},$$
$$J_i^{(q)} + \tau_q \frac{\partial J_i^{(q)}}{\partial \tau} = -\sum_{t=1}^{N} D_{ij}^{(q)} g^{(qt)} \frac{\partial \eta^{(t)}}{\partial x_j} + \Lambda_{ijkl}^{(q)} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} \quad (q = 1 \div N) \tag{1.2}$$

Здесь все величины являются безразмерными и для них приняты следующие обозначения

$$
\begin{gathered}
x_i = \frac{x_i^*}{l}, \quad u_i = \frac{u_i^*}{l}, \quad \tau = \frac{Ct}{l}, \quad C_{ijkl} = \frac{C_{ijkl}^*}{C_{1111}^*}, \quad C^2 = \frac{C_{1111}^*}{\rho}, \quad \alpha_{ij}^{(q)} = \frac{\alpha_{ij}^{*(q)}}{C_{1111}^*} \\
D_{ij}^{(q)} = \frac{D_{ij}^{*(q)}}{Cl}, \quad \Lambda_{ijkl}^{(q)} = \frac{m^{(q)} D_{ij}^{*(q)} \alpha_{kl}^{*(q)} n_0^{(q)}}{\rho R T_0 C l}, \quad F_i = \frac{\rho l F_i^*}{C_{1111}^*}, \quad Y^{(q)} = \frac{l Y^{*(q)}}{C}, \quad \tau_q = \frac{C\tau^{(q)}}{l}
\end{gathered} \tag{1.3}
$$

где t — время; x_i^* — прямоугольные декартовы координаты; u_i^* — компоненты вектора перемещений; l — длина балки; $\eta^{(q)} = n^{(q)} - n_0^{(q)}$ — приращение концентрации q-й компоненты вещества в составе N — компонентной среды; $n^{(q)}$ и $n_0^{(q)}$ — актуальная и начальная концентрации q-го вещества; C_{ijkl}^* — компоненты тензора упругих постоянных; ρ — плотность; $\alpha_{ij}^{*(q)}$ — коэффициенты, характеризующие объемное изменение среды за счет диффузии; $D_{ij}^{*(q)}$ — коэффициенты самодиффузии; R — универсальная газовая постоянная; T_0 — температура среды; $m^{(q)}$ — молярная масса q-го вещества, P_i, $I_i^{(q)}$ — поверхностные возмущения, F_i^*, $Y_i^{*(q)}$ — объемные возмущения; ν_i — компоненты вектора нормали к поверхности балки; $\tau^{(q)}$ — время релаксации диффузионных потоков.

Уравнения упругодиффузионных колебаний балки получаем на основе вариационного принципа Даламбера. Используя начально-краевую задачу (1.1), имеем [18–20]

$$
\begin{gathered}
\int_G \left(\ddot{u}_i - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - F_i \right) \delta u_i dG + \sum_{q=1}^{N} \int_G \left(1 + \tau_q \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left(\frac{\partial \eta^{(q)}}{\partial \tau} + \frac{\partial J_i^{(q)}}{\partial x_i} - Y^{(q)} \right) \delta \eta^{(q)} dG + \\
+ \iint_{\Pi_\sigma} \left(\sigma_{ij} \nu_j - P_i \right) \delta u_i dS + \sum_{q=1}^{N} \iint_{\Pi_J} \left(J_i^{(q)} - I_i^{(q)} \right) \nu_i \delta \eta^{(q)} dS = 0
\end{gathered} \tag{1.4}
$$

Здесь δu_i — виртуальные перемещения, $\delta\eta^{(q)}$ — виртуальные приращения концентраций.

Далее, для построения уравнений изгиба балки в плоскости Ox_1x_2 принимаем, что:

— материал является изотропным (λ и μ — коэффициенты Ламе, δ_{ij} — символ Кронекера)

$$
C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu \left(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \right), \quad \Lambda_{\alpha\alpha\beta\beta}^{(q)} = \Lambda_q, \quad \alpha_{\alpha\alpha}^{(q)} = \alpha_q, \quad D_{\alpha\alpha}^{(q)} = D_q \tag{1.5}
$$

— прогибы балки малы и сечения, перпендикулярные к оси балки до деформации, остаются плоскими и после деформации (гипотеза плоских сечений). Тогда, линеаризуя искомые величины по переменной x_2, получаем [18–21]

$$
\begin{gathered}
u_1(x_1, x_2, \tau) = u(x_1, \tau) + x_2 \chi(x_1, \tau), \quad u_2(x_1, x_2, \tau) = v(x_1, \tau) + x_2 \psi(x_1, \tau) \\
\eta^{(q)}(x_1, x_2, \tau) = N_q(x_1, \tau) + x_2 H_q(x_1, \tau)
\end{gathered} \tag{1.6}
$$

— деформации в поперечном направлении отсутствуют. Тогда $\psi(x_1, \tau) \equiv 0$ и соотношения (1.6) записываются так

$$
\begin{gathered}
u_1(x_1, x_2, \tau) = u(x_1, \tau) - x_2 \chi(x_1, \tau), \quad u_2(x_1, x_2, \tau) = v(x_1, \tau) \\
\eta^{(q)}(x_1, x_2, \tau) = N_q(x_1, \tau) + x_2 H_q(x_1, \tau)
\end{gathered} \tag{1.7}
$$

С учетом (1.5) и (1.7), компоненты тензора напряжений и вектора диффузионного потока (1.2) будут иметь вид [20] (здесь штрих обозначает производную по переменной x_1, точка – производную по времени τ)

$$\sigma_{11} = (u' - x_2\chi') - \sum_{q=1}^{N} \alpha_q \left(N_q + x_2 H_q\right), \quad \sigma_{22} = \lambda \left(u' - x_2\chi'\right) - \sum_{q=1}^{N} \alpha_q \left(N_q + x_2 H_q\right)$$

$$\sigma_{12} = \mu \left(v' - \chi\right), \quad J_1^{(q)} + \tau_q \dot{J}_1^{(q)} = -D_q(N_q' + x_2 H_q') + \Lambda_q \left(u'' - x_2\chi''\right) \tag{1.8}$$

$$J_2^{(q)} + \tau_q \dot{J}_2^{(q)} = -D_q H_q - \Lambda_q \chi' \quad (q = 1 \div N)$$

Подставляя (1.7) и (1.8) в (1.4) и используя необходимое условие стационарности функционалов, получаем модель нестационарного плоского изгиба упругодиффузионной балки Тимошенко, которая состоит из двух задач:

– задача об одноосном растяжении-сжатии стержня с учетом диффузии

$$\ddot{u}(x_1,\tau) - u''(x_1,\tau) + \sum_{q=1}^{N} \alpha_q N_q'(x_1,\tau) - n(x_1,\tau) = 0$$

$$\dot{N}_q(x_1,\tau) + \tau_q \ddot{N}_q(x_1,\tau) - D_q N_q''(x_1,\tau) + \Lambda_q u'''(x_1,\tau) - y^{(q)}(x_1,\tau) = 0$$

$$\left[u'(x_1,\tau) - \sum_{q=1}^{N} \alpha_q N_q(x_1,\tau)\right]\Bigg|_{x_1=0} = \frac{N_0(\tau)}{F}, \quad \left[u'(x_1,\tau) - \sum_{q=1}^{N} \alpha_q N_q(x_1,\tau)\right]\Bigg|_{x_1=1} = \frac{N_1(\tau)}{F}$$

$$\left[\Lambda_q u''(x_1,\tau) - D_q N_q'(x_1,\tau)\right]\Big|_{x_1=0} = \frac{\Gamma_0^{(q)}(\tau)}{F}, \quad \left[\Lambda_q u''(x_1,\tau) - D_q N_q'(x_1,\tau)\right]\Big|_{x_1=1} = \frac{\Gamma_1^{(q)}(\tau)}{F}$$

– задача относительно прогибов балки с учетом диффузии

$$\ddot{v}(x_1,\tau) - \mu\left[v''(x_1,\tau) - \chi'(x_1,\tau)\right] - \frac{q(x_1,\tau)}{F} = 0$$

$$\ddot{\chi}(x_1,\tau) - \chi''(x_1,\tau) - \eta\mu\left[v'(x_1,\tau) - \chi(x_1,\tau)\right] - \sum_{q=1}^{N} \alpha_q H_q'(x_1,\tau) - \frac{m(x_1,\tau)}{J_3} = 0 \tag{1.9}$$

$$\dot{H}_q(x_1,\tau) + \tau_q \ddot{H}_q(x_1,\tau) - D_q H_q''(x_1,\tau) - \Lambda_q \chi'''(x_1,\tau) - \frac{z^{(q)}(x_1,\tau)}{J_3} = 0$$

$$\left[v'(x_1,\tau) - \chi(x_1,\tau)\right]\Big|_{x_1=0} = \frac{Q_0(\tau)}{\mu F}, \quad \left[v'(x_1,\tau) - \chi(x_1,\tau)\right]\Big|_{x_1=1} = \frac{Q_1(\tau)}{\mu F}$$

$$\left[\chi'(x_1,\tau) + \sum_{q=1}^{N} \alpha_q H_q(x_1,\tau)\right]\Bigg|_{x_1=0} = -\frac{M_0(\tau)}{J_3}$$

$$\left[\chi'(x_1,\tau) + \sum_{q=1}^{N} \alpha_q H_q(x_1,\tau)\right]\Bigg|_{x_1=1} = -\frac{M_1(\tau)}{J_3} \tag{1.10}$$

$$\left[\Lambda_q \chi''(x_1,\tau) + D_q H_q'(x_1,\tau)\right]\Big|_{x_1=0} = -\frac{\Omega_0^{(q)}(\tau)}{J_3}$$

$$\left[\Lambda_q \chi''(x_1,\tau) + D_q H_q'(x_1,\tau)\right]\Big|_{x_1=1} = -\frac{\Omega_1^{(q)}(\tau)}{J_3}$$

где F – площадь сечения, J_3 – момент инерции поперечного сечения балки относительно оси Ox_3, $\eta = F/J_3$, n – распределенная погонная продольная нагрузка, m – распределенный погонный момент, q — распределенная погонная поперечная нагрузка, остальные силовые факторы определяются следующим образом

$$\begin{Bmatrix} y^{(q)}(x_1,\tau) \\ z^{(q)}(x_1,\tau) \end{Bmatrix} = \iint_D \begin{Bmatrix} Y^{(q)} + \tau_q \dot{Y}^{(q)} \\ \left(Y^{(q)} + \tau_q \dot{Y}^{(q)}\right) x_2 \end{Bmatrix} dx_2 dx_3, \quad \begin{Bmatrix} N_0(\tau) \\ N_1(\tau) \end{Bmatrix} = \iint_D \begin{Bmatrix} P_1(0,x_2,x_3,\tau) \\ P_1(1,x_2,x_3,\tau) \end{Bmatrix} dx_2 dx_3$$

$$\begin{Bmatrix} M_0(\tau) \\ M_1(\tau) \end{Bmatrix} = \iint_D \begin{Bmatrix} P_1(0,x_2,x_3,\tau) \\ P_1(1,x_2,x_3,\tau) \end{Bmatrix} x_2 dx_2 dx_3, \quad \begin{Bmatrix} Q_0(\tau) \\ Q_1(\tau) \end{Bmatrix} = \iint_D \begin{Bmatrix} P_2(0,x_2,x_3,\tau) \\ P_2(1,x_2,x_3,\tau) \end{Bmatrix} dx_2 dx_3$$

$$\begin{Bmatrix} \Gamma_0^{(q)}(\tau) \\ \Gamma_1^{(q)}(\tau) \end{Bmatrix} = \iint_D \begin{Bmatrix} I_1^{(q)}(0,x_2,x_3,\tau) \\ I_1^{(q)}(1,x_2,x_3,\tau) \end{Bmatrix} dx_2 dx_3, \quad \begin{Bmatrix} \Omega_0^{(q)}(\tau) \\ \Omega_1^{(q)}(\tau) \end{Bmatrix} = \iint_D \begin{Bmatrix} I_1^{(q)}(0,x_2,x_3,\tau) \\ I_1^{(q)}(1,x_2,x_3,\tau) \end{Bmatrix} x_2 dx_2 dx_3$$

В более точных моделях (для этого надо учесть слагаемые более высокого порядка малости в (1.6)) уравнения (1.9) записываются так

$$\begin{gathered} \ddot{v}(x_1,\tau) - \mu k^2 \left[v''(x_1,\tau) - \chi'(x_1,\tau)\right] - \frac{q(x_1,\tau)}{F} = 0 \\ \ddot{\chi}(x_1,\tau) - \chi''(x_1,\tau) - \eta\mu k^2 \left[v'(x_1,\tau) - \chi(x_1,\tau)\right] - \sum_{q=1}^{N} \alpha_q H'_q(x_1,\tau) - \frac{m(x_1,\tau)}{J_3} = 0 \\ \dot{H}_q(x_1,\tau) + \tau_q \ddot{H}_q(x_1,\tau) - D_q H''_q(x_1,\tau) - \Lambda_q \chi'''(x_1,\tau) - \frac{z^{(q)}(x_1,\tau)}{J_3} = 0 \end{gathered} \tag{1.11}$$

где k — коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по сечению балки.

Если касательные напряжения распределены по формуле Журавского, то для балки прямоугольного сечения высотой h и единичной толщины $k^2 = 5/6$ [22, 23].

Будем далее рассматривать задачу об изгибе шарнирно опертой балки под действием нестационарной распределенной поперечной нагрузки. Математическая постановка задачи включает в себя уравнения (1.11) и граничные условия (1.10), в которых полагаем

$$M_0(\tau) = M_1(\tau) = 0$$

Для получения замкнутой постановки задачи используем дополнительно следующие кинематические граничные условия

$$v(x_1,\tau)\big|_{x_1=0} = 0, \quad v(x_1,\tau)\big|_{x_1=1} = 0 \quad H_q(x_1,\tau)\big|_{x_1=0} = 0, \quad H_q(x_1,\tau)\big|_{x_1=1} = 0 \tag{1.12}$$

Начальные условия полагаем нулевыми.

2. Метод решения. Решение задачи (1.11), (1.10), (1.12) представляем в виде ($k = 1 \div N + 1$) [20]:

$$\begin{gathered} v(x,\tau) = \sum_{k=1}^{N+2} \int_0^{\tau}\int_0^{1} G_{1k}(x,\xi,\tau-t) F_k(\xi,t)\, d\xi dt, \\ \chi(x,\tau) = \sum_{k=1}^{N+2} \int_0^{\tau}\int_0^{1} G_{2k}(x,\xi,\tau-t) F_k(\xi,t)\, d\xi dt \\ H_q(x,\tau) = \sum_{k=1}^{N+2} \int_0^{\tau}\int_0^{1} G_{q+2,k}(x,\xi,\tau-t) F_k(\xi,t)\, d\xi dt \end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь $x = x_1$, $F_k(x,\tau)$ – объемные силовые факторы, входящие в уравнения (1.11), G_{mk} – объемные функции Грина, удовлетворяющие уравнениям [20]

$$\begin{gathered}
\ddot{G}_{1k}(x,\xi,\tau) - \mu k^2[G''_{1k}(x,\xi,\tau) - G'_{2k}(x,\xi,\tau)] - \delta_{1k}\delta(x-\xi)\delta(\tau) = 0 \\
\ddot{G}_{2k}(x,\xi,\tau) - G''_{2k}(x,\xi,\tau) - \eta\mu k^2[G'_{1k}(x,\xi,\tau) - G_{2k}(x,\xi,\tau)] + \\
-\sum_{q=1}^{N}\alpha_q G'_{q+2,k}(x,\xi,\tau) - \delta_{2k}\delta(x-\xi)\delta(\tau) = 0 \\
\dot{G}_{q+2,k}(x,\xi,\tau) + \tau_q\ddot{G}_{q+2,k}(x,\xi,\tau) - D_q G''_{q+2,k}(x,\xi,\tau) - \Lambda_q G'''_{2k}(x,\xi,\tau) - \\
-\delta_{q+2,k}\delta(x-\xi)\delta(\tau) = 0
\end{gathered} \tag{2.2}$$

и следующим однородным граничным условиям

$$\begin{gathered}
G_{1k}(x,\xi,\tau)\big|_{x=0} = 0, \quad G_{1k}(x,\xi,\tau)\big|_{x=1} = 0, \quad G_{q+1,k}(x,\xi,\tau)\big|_{x=0} = 0, \quad G_{q+1,kl}(x,\xi,\tau)\big|_{x=1} = 0 \\
\left[G'_{2k}(x,\xi,\tau) + \sum_{j=1}^{N}\alpha_j G_{j+1,k}(x,\xi,\tau)\right]\Bigg|_{x=0} = 0, \quad \left[G'_{2k}(x,\xi,\tau) + \sum_{j=1}^{N}\alpha_j G_{j+1,k}(x,\xi,\tau)\right]\Bigg|_{x=1} = 0
\end{gathered} \tag{2.3}$$

Для нахождения объемных функций Грина вначале применяем преобразование Лапласа к задаче (2.2), (2.3) (верхний индекс "L" обозначает трансформанту Лапласа, s – параметр преобразования Лапласа)

$$\begin{gathered}
s^2 G^L_{1k}(x,\xi,s) - \mu k^2[G''^L_{1k}(x,\xi,s) - G'^L_{1k}(x,\xi,s)] - \delta_{1k}\delta(x-\xi) = 0 \\
s^2 G^L_{2k}(x,\xi,s) - G''^L_{2k}(x,\xi,s) - \mu\eta k^2[G'^L_{1k}(x,\xi,s) - G^L_{2k}(x,\xi,s)] + \\
-\sum_{q=1}^{N}\alpha_q G'^L_{q+2,k}(x,\xi,s) - \delta_{2k}\delta(x-\xi) = 0 \\
(s + \tau_q s^2)G^L_{q+2,k}(x,\xi,s) - D_q G''^L_{q+2,k}(x,\xi,s) - \Lambda_q G'''^L_{2k}(x,\xi,s) - \delta_{q+2,k}\delta(x-\xi) = 0 \\
G^L_{1k}(x,\xi,s)\Big|_{x=0} = 0, \quad G^L_{1k}(x,\xi,s)\Big|_{x=1} = 0, \quad G^L_{q+2,k}(x,\xi,s)\Big|_{x=0} = 0, \quad G^L_{q+2,k}(x,\xi,s)\Big|_{x=1} = 0 \\
\left[G'^L_{2k}(x,\xi,s) + \sum_{j=1}^{N}\alpha_j G^L_{j+2,k}(x,\xi,s)\right]\Bigg|_{x=0} = 0, \quad \left[G'^L_{2k}(x,\xi,s) + \sum_{j=1}^{N}\alpha_j G^L_{j+2,k}(x,\xi,s)\right]\Bigg|_{x=1} = 0
\end{gathered}$$

Затем трансформанты функций Грина $G^L_{mk}(x,\xi,s)$ представляем в виде рядов Фурье:

$$\begin{gathered}
\begin{Bmatrix} G^L_{1k}(x,\xi,s) \\ G^L_{q+2,k}(x,\xi,s) \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty}\begin{Bmatrix} G^{Ls}_{1k}(\lambda_n,\xi,s) \\ G^{Ls}_{q+2,k}(\lambda_n,\xi,s) \end{Bmatrix}\sin\lambda_n x, \quad \lambda_n = \pi n \\
G^L_{2k}(x,\xi,s) = \frac{G^{Lc}_{2k}(0,\xi,s)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}G^{Lc}_{2k}(\lambda_n,\xi,s)\cos\lambda_n x
\end{gathered}$$

В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения функций G^{Ls}_{1k}, $G^{Ls}_{q+1,k}$ и G^{Lc}_{2k} $(k = 1 \div N+2,\ q = 1 \div N)$:

$$\begin{gathered}
k_1(\lambda_n,s)G^{Ls}_{1k}(\lambda_n,s) - \mu\lambda_n k^2 G^{Lc}_{2k}(\lambda_n,s) = 2\delta_{1k}\sin\lambda_n\xi \\
-\mu\eta k^2\lambda_n G^{Ls}_{1k}(\lambda_n,s) + k_2(\lambda_n,s)G^{Lc}_{2k}(\lambda_n,s) - \lambda_n\sum_{q=1}^{N}\alpha_q G^{Ls}_{q+2,k}(\lambda_n,s) = 2\delta_{2k}\cos\lambda_n\xi \\
-\Lambda_q\lambda_n^3 G^{Lc}_{2k}(\lambda_n,s) + k_{q+2}(\lambda_n,s)G^{Ls}_{q+2,k}(\lambda_n,s) = 2\delta_{q+2,k}\sin\lambda_n\xi
\end{gathered} \tag{2.4}$$

где

$$k_1(\lambda_n, s) = s^2 + \mu k^2 \lambda_n^2, \quad k_2(\lambda_n, s) = s^2 + \lambda_n^2 + \mu\eta k^2, \quad k_{q+2}(\lambda_n, s) = s + \tau_q s^2 + D_q \lambda_n^2 \quad (2.5)$$

Решение системы (2.4) имеет вид [20] ($i = 1, 2,\ k, l = 1 \div N + 2,\ l \neq 2,\ p, q = 1 \div N$)

$$\begin{gathered}
\begin{Bmatrix} G_{il}^{Ls}(\lambda_n, \xi, s) \\ G_{q+2,1}^{Ls}(\lambda_n, \xi, s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{il}(\lambda_n, s) \\ P_{q+2,1}(\lambda_n, s) \end{Bmatrix} \frac{2\sin\lambda_n\xi}{P(\lambda_n, s)}, \quad G_{k2}^{Ls}(\lambda_n, \xi, s) = \frac{2P_{k2}(\lambda_n, s)\cos\lambda_n\xi}{P(\lambda_n, s)} \\
G_{q+2,p+2}^{Ls}(\lambda_n, s) = 2\left[\frac{\delta_{pq}}{k_{q+2}} + \frac{P_{q+2,p+2}(\lambda_n, s)}{Q_q(\lambda_n, s)}\right]\sin\lambda_n\xi, \quad G_{2k}^{Lc}(0, \xi, s) = \frac{2\delta_{2k}}{s^2}
\end{gathered} \quad (2.6)$$

где

$$\begin{gathered}
P(\lambda_n, s) = [k_1(\lambda_n, s)k_2(\lambda_n, s) - \mu^2\eta k^4\lambda_n^2]\Pi(\lambda_n, s) - \lambda_n^4 k_1(\lambda_n, s)\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\Lambda_j\Pi_j(\lambda_n, s) \\
Q_q(\lambda_n, s) = k_{q+2}(\lambda_n, s)P(\lambda_n, s) \\
P_{11}(\lambda_n, s) = k_2(\lambda_n, s)\Pi(\lambda_n, s) - \lambda_n^4\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\Lambda_j\Pi_j(\lambda_n, s) \\
P_{12}(\lambda_n, s) = \mu k^2\lambda_n\Pi(\lambda_n, s), \quad P_{1,q+2}(\lambda_n, s) = \mu k^2\lambda_n^2\alpha_q\Pi_q(\lambda_n, s) \\
P_{21}(\lambda_n, s) = \mu\eta k^2\lambda_n\Pi(\lambda_n, s) \\
P_{22}(\lambda_n, s) = k_1(\lambda_n, s)\Pi(\lambda_n, s), \quad P_{2,q+2}(\lambda_n, s) = \alpha_q\lambda_n k_1(\lambda_n, s)\Pi_q(\lambda_n, s) \\
P_{q+2,i}(\lambda_n, s) = \frac{\Lambda_q\lambda_n^3 P_{2i}(\lambda_n, s)}{k_{q+2}}, \quad P_{q+2,p+2}(\lambda_n, s) = \Lambda_q\lambda_n^3 P_{2,p+2}(\lambda_n, s) \quad (i = 1, 2) \\
\Pi(\lambda_n, s) = \prod_{j=1}^{N} k_{j+1}(\lambda_n, s), \quad \Pi_j(\lambda_n, s) = \prod_{r=1, r\neq j}^{N} k_{r+1}(\lambda_n, s)
\end{gathered} \quad (2.7)$$

Оригиналы функций Грина в (2.6) определяются следующим образом [20]

$$\begin{gathered}
\begin{Bmatrix} G_{il}^{s}(\lambda_n, \xi, \tau) \\ G_{q+2,1}^{s}(\lambda_n, \xi, \tau) \end{Bmatrix} = 2\sum_{j=1}^{2N+4}\begin{Bmatrix} A_{il}^{(j)}(\lambda_n) \\ A_{q+1,1}^{(j)}(\lambda_n) \end{Bmatrix} e^{s_j(\lambda_n)\tau}\sin\lambda_n\xi \quad (i = 1, 2,\ l = 1 \div N + 2,\ l \neq 2) \\
G_{k2}^{s}(\lambda_n, \tau) = 2\sum_{j=1}^{2N+4} A_{k2}^{(j)}(\lambda_n)e^{s_j(\lambda_n)\tau}\cos\lambda_n\xi, \quad G_{2k}^{c}(0, \xi, s) = 2\delta_{2k}\tau \quad (k = 1 \div N + 2) \\
G_{q+2,p+2}^{s}(\lambda_n, \tau) = 2\left[\delta_{pq}\sum_{i=1}^{2}\frac{e^{s_{2N+4+i}(\lambda_n)\tau}}{1 + 2\tau_q s_{2N+4+i}(\lambda_n)} + \sum_{j=1}^{2N+6} A_{q+2,p+2}^{(j)}(\lambda_n)e^{s_j(\lambda_n)\tau}\right]\sin\lambda_n\xi
\end{gathered} \quad (2.8)$$

$$A_{q+2,i}^{(j)}(\lambda_n) = \frac{P_{q+2,i}(\lambda_n, s_j)}{P'(\lambda_n, s_j)}, \quad A_{q+2,p+2}^{(j)}(\lambda_n) = \frac{P_{q+2,p+2}(\lambda_n, s_j)}{Q_q'(\lambda_n, s_j)}, \quad A_{ik}^{(j)}(\lambda_n) = \frac{P_{ik}(\lambda_n, s_j)}{P'(\lambda_n, s_j)} \quad (2.9)$$

Здесь $s_j(\lambda_n)$ $(j = 1 \div 2N + 4)$ – нули полинома $P(\lambda_n, s)$, остальные $s_j(\lambda_n)$ являются дополнительными нулями многочлена $Q_q(\lambda_n, s)$

$$s_{2N+5}(\lambda_n) = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4\tau_q D_1^{(q)}\lambda_n^2}}{2\tau_q}, \quad s_{2N+6}(\lambda_n) = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4\tau_q D_1^{(q)}\lambda_n^2}}{2\tau_q}$$

Подставляя найденные выражения для функций Грина (2.8) и (2.9) в свертки (2.1) получаем решение задачи об изгибе балки Тимошенко (1.11), (1.10), (1.12).

3. Расчетный пример. Для расчетного примера возьмем дюралюминиевый стержень длины $l = 10^{-1}$ м, прямоугольного сечения $h \times b = 0.1l \times 0.05l$. Дюралюминий рассматриваем как двухкомпонентный материал, ($N = 2$) физические характеристики которого [24] после применения процедуры обезразмеривания (1.3) следующие:

$$\begin{gathered} \lambda = 4.92 \times 10^{-1}, \quad \mu = 2.54 \times 10^{-1}, \quad \alpha_1 = 1.50 \times 10^{-4}, \quad \alpha_2 = 5.92 \times 10^{-4} \\ D_1 = 1.27 \times 10^{-16}, \quad D_2 = 5.02 \times 10^{-21}, \quad \Lambda_1 = 2.77 \times 10^{-18}, \quad \Lambda_2 = 5.50 \times 10^{-23} \end{gathered} \tag{3.1}$$

Обезразмеренные геометрические характеристики сечения равны:

$$F = 5.00 \times 10^{-3}, \quad J_3 = 4.16 \times 10^{-6}$$

В уравнениях (1.11) полагаем

$$F_1(x,\tau) = \frac{q(x,\tau)}{F} = H(x)H(\tau), \quad F_2(x,\tau) = \frac{m(x,\tau)}{J_3} = 0, \quad F_{q+2}(x,\tau) = \frac{z^{(q)}}{J_3} = 0 \tag{3.2}$$

Вычисляя свертки (2.1) с учетом равенств (2.8), получаем

$$\begin{gathered} v(x,\tau) = \int_0^\tau \int_0^1 G_{11}(x,\xi,\tau - t) F_1(\xi,t)\, d\xi dt = \\ = 2\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2N+4} [1 - (-1)^n] \frac{(e^{s_j(\lambda_n)\tau} - 1) A_{11}^{(j)}(\lambda_n)}{\lambda_n s_j(\lambda_n)} \sin \lambda_n x \\ \chi(x,\tau) = \int_0^\tau \int_0^1 G_{21}(x,\xi,\tau - t) F_1(\xi,t)\, d\xi dt = \\ = 2\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2N+4} [1 - (-1)^n] \frac{(e^{s_j(\lambda_n)\tau} - 1) A_{21}^{(j)}(\lambda_n)}{\lambda_n s_j(\lambda_n)} \cos \lambda_n x \\ H_q(x,\tau) = \int_0^\tau \int_0^1 G_{q+2,1}(x,\xi,\tau - t) F_1(\xi,t)\, d\xi dt = \\ = 2\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2N+4} [1 - (-1)^n] \frac{(e^{s_j(\lambda_n)\tau} - 1) A_{q+2,1}^{(j)}(\lambda_n)}{\lambda_n s_j(\lambda_n)} \sin \lambda_n x \end{gathered} \tag{3.3}$$

Полагая коэффициенты α_q, связывающие механическое и диффузионные поля, равными нулю, приходим к решению классической упругой задачи для балки Тимошенко. В этом случае равенства (2.7) с учетом (2.5) запишутся так

$$\begin{gathered} P(\lambda_n, s) = s^4 + (\lambda_n^2 + \mu k^2 \lambda_n^2 + \mu\eta k^2) s^2 + \mu k^2 \lambda_n^4, \quad P_{11}(\lambda_n, s) = s^2 + \lambda_n^2 + \mu\eta k^2 \\ P_{12}(\lambda_n, s) = \mu k^2 \lambda_n, \quad P_{21}(\lambda_n, s) = \mu\eta k^2 \lambda_n, \quad P_{22}(\lambda_n, s) = s^2 + \mu k^2 \lambda_n^2 \end{gathered}$$

Многочлен $P(\lambda_n, s)$ является биквадратным относительно параметра s и его нули определяются по формулам

$$s_j(\lambda_n) = \frac{-\lambda_n^2 + \mu k^2 \lambda_n^2 + \mu\eta k^2 \pm \sqrt{(\lambda_n^2 + \mu k^2 \lambda_n^2 + \mu\eta k^2)^2 - 4\mu k^2 \lambda_n^4}}{2}$$

Тогда, в соответствии с (2.9) для коэффициентов $A_{ik}^{(j)}(\lambda_n)$ получаем

$$A_{ik}^{(j)}(\lambda_n) = \left. \frac{P_{ik}(\lambda_n, s)}{2s(2s^2 + \lambda_n^2 + \mu\eta k^2 + \mu k^2 \lambda_n^2)} \right|_{s = s_j} \quad (j = \overline{1,4}) \tag{3.4}$$

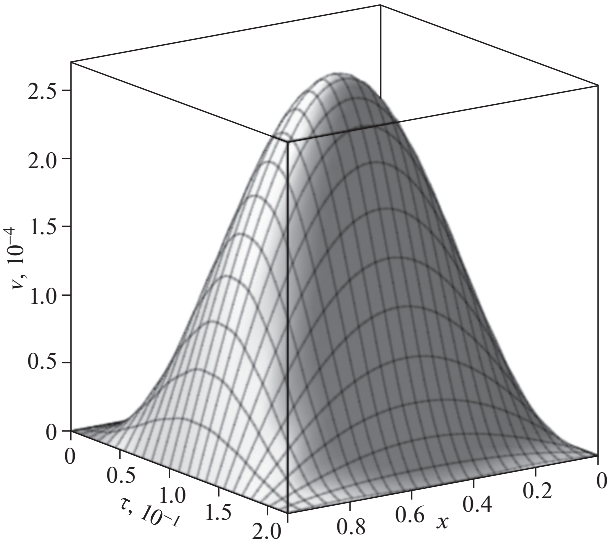

Рис. 2

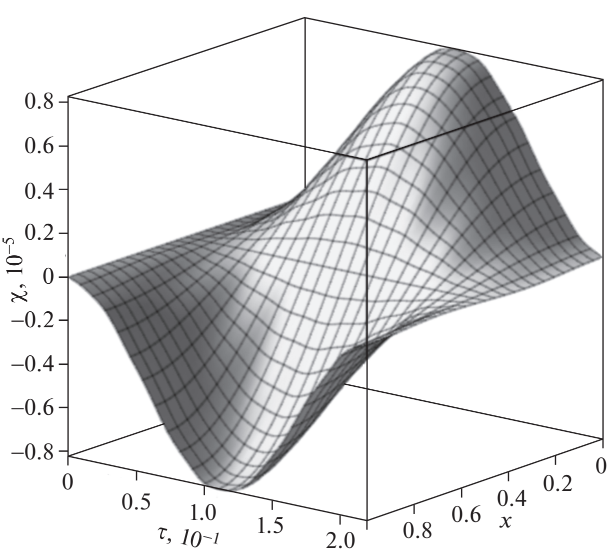

Рис. 3

Прогибы v и повороты сечений χ по-прежнему определяются с помощью формул (3.3) с учетом поправочных равенств (3.4), при $N = 0$.

Результаты вычислений продемонстрированы на рисунках 2–7. На рис. 2 изображено пространственно-временное распределение прогибов балки под действием распределенной поперечной нагрузки (3.2). На следующих рисунках показаны зависимости от времени и продольной координаты поворотов сечений (рис. 3) и приращений

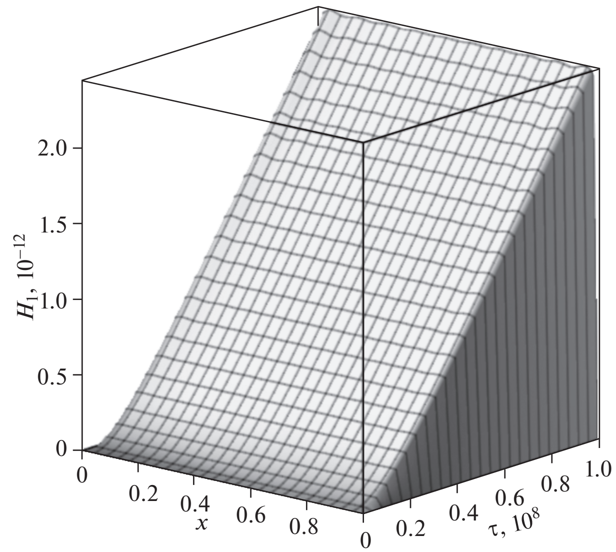

Рис. 4

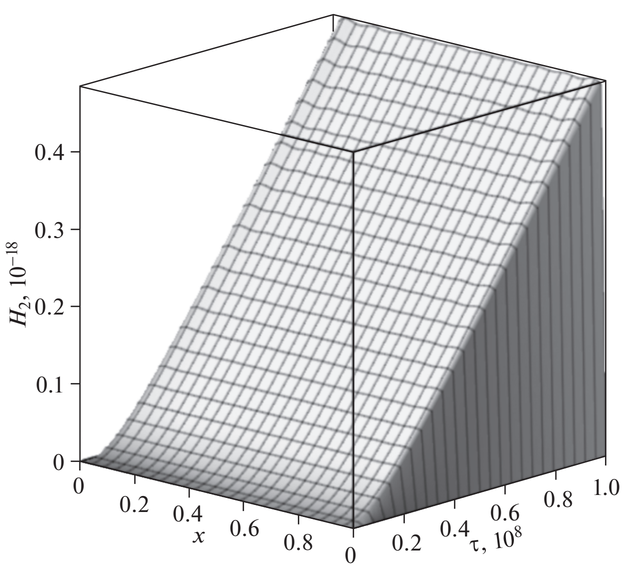

Рис. 5

концентраций первого компонента (рис. 4) и второго (рис. 5) в составе двухкомпонентной среды (3.1).

На рисунках 6 и 7 проиллюстрировано сравнение решений упругодиффузионной задачи (3.3) с решением чисто упругой задачи при $x = 0.1$. Сплошная линия на обоих рисунках соответствует решению (3.3), пунктирная – решению упругой задачи.

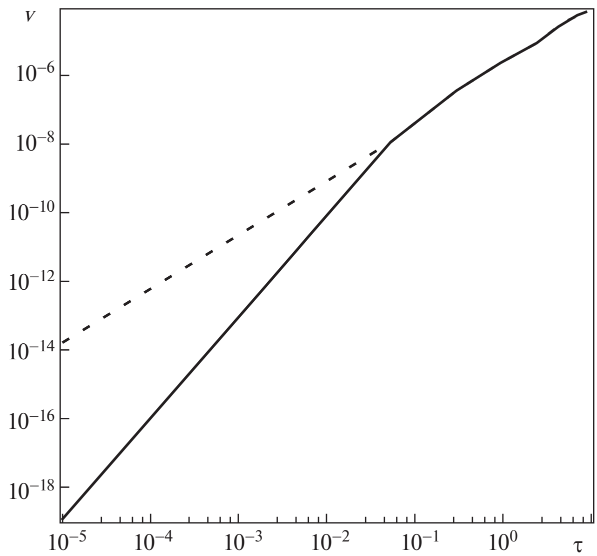

Рис. 6

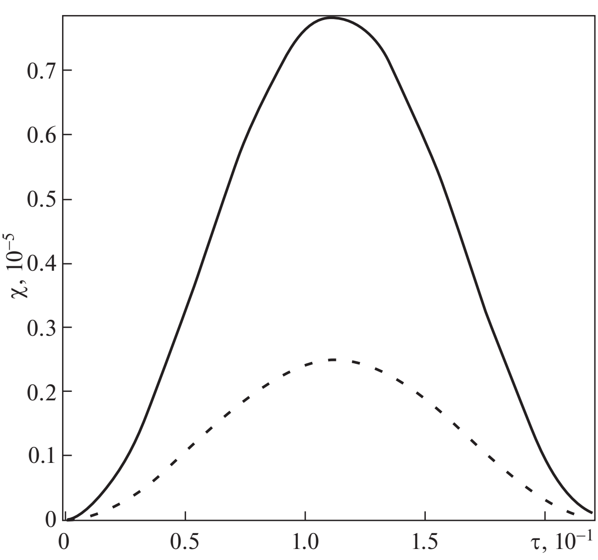

Рис. 7

На рис. 6 видно, что в рамках построенной модели упругодиффузионных колебаний балки Тимошенко массоперенос влияет на прогибы только в самые начальные моменты времени $\tau \sim 10^{-1}$. В противоположность этому, диффузионные процессы существенно влияют на повороты сечений. Продемонстрированное на рис. 7 отличие сохраняется для сколь угодно больших временных промежутков.

Заключение. Таким образом, в работе получена связанная нестационарная упругодиффузионная модель балки Тимошенко. Предложен алгоритм построения объемных функций Грина и решена задача о нестационарных упругодиффузионных колебаниях балки под действием распределенной поперечной нагрузки. На основе разработанной модели и рассмотренного примера исследовано взаимодействие механического и диффузионного полей. Сравнительный анализ показывает влияние массопереноса на поле перемещений внутри балки в сторону увеличения углов поворотов поперечных сечений при изгибе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-19-00217).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Afram A.Y., Khader S.E.* 2D Problem for a Half-Space under the Theory of Fractional Thermoelastic Diffusion // American journal of scientific and industrial research, 2014. V. 6. № 3. P. 47–57.
2. *Aouadi M.*A generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long solid cylinder // Intern. J. Mathem. and Mathem. Sci. 2006. V. 2006. P. 1–15.
3. *Atwa S.Y., Egypt Z.* Generalized Thermoelastic Diffusion With Effect of Fractional Parameter on Plane Waves Temperature-Dependent Elastic Medium // Journal of Materials and Chemical Engineering. 2013. V. 1. Is. 2. P. 55–74.
4. *Belova I.V., Murch G.E.* Thermal and diffusion-induced stresses in crystalline solids // Journal of Applied Physics. 1995. V. 77. № 1. P. 127–134.
5. *Deswal S., Kalkal K.* A two-dimensional generalized electro-magneto-thermoviscoelastic problem for a half-space with diffusion // International Journal of Thermal Sciences. 2011. V. 50. № 5. P. 749–759.
6. *Elhagary M.A.* Generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long hollow cylinder for short times // Acta Mech. 2011. V. 218. P. 205–215.
7. *Indeitsev D.A., Semenov B.N., Sterlin M.D.* The Phenomenon of Localization of Diffusion Process in a Dynamically Deformed Solid // Doklady Physics. 2012. V. 57. № 4. P. 171–173.
8. *Knyazeva A.G.* Model of medium with diffusion and internal surfaces and some applied problems // Mater. Phys. Mech. 2004. V. 7. № 1. P. 29–36.
9. *Kumar R., Chawla V.* A Study of Fundamental Solution in Orthotropic Thermodiffusive Elastic Media // International Communication in Heat and Mass Transfer. 2011. V. 38. P. 456–462.
10. *Sherief H.H., El-Maghraby N.M.* A Thick Plate Problem in the Theory of Generalized Thermoelastic Diffusion // Int. J. Thermophys. 2009. V. 30. P. 2044–2057.
11. *Раврик М.*С. Об одной вариационной формуле смешанного типа для контактных задач термодиффузийной теории деформации слоистых оболочек // Мат. мет. та фiз.-мех. поля. 1985. Т. 22. С. 40–44.
12. *Раврик М.С., Бичуя А.Л.* Осесимметричное напряженное состояние нагретой трансверсально-изотропной сферической оболочки с круговым отверстием при диффузионном насыщении // Мат. методи i фiз.-мех. поля. 1983. Вып. 17. С. 51–54.
13. *Швец Р.Н., Флячок В.М.* Вариационный подход к решению динамических задач механотермодиффузии анизотропных оболочек // Мат. физ. и нелинейн. мех. 1991. № 16. С. 39–43. Shvets R.N., Flyachok V.M. The equations of mechanothermodiffusion of anisotropic shells taking account of transverse strains // Mat. Met. Fiz.-Mekh. Polya. 1984. № 20. P. 54–61.
14. *Aouadi M., Copetti M.I.M.* Analytical and numerical results for a dynamic contact problem with two stops in thermoelastic diffusion theory // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2015. P. 1–24.
15. *Copetti M.I.M., Aouadi M.* A quasi-static contact problem in thermoviscoelastic diffusion theory // Applied Numerical Mathematics. 2016. V. 109. P. 157–183
16. *Aouadi M.* On thermoelastic diffusion thin plate theory // Appl. Math. Mech.-Engl. Ed. 2015. V. 36. № 5. P. 619–632.
17. *Aouadi M., Miranville A.* Smooth attractor for a nonlinear thermoelastic diffusion thin plate based on Gurtin–Pipkin’s model // Asymptotic Analysis. 2015. V. 95. P. 129–160

18. *Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V.* Unsteady Vibration Model of the Euler-Bernoulli Beam Taking into Account Diffusion // Journal of Physics: Conference Series. 2019. V. 1158. 042043.
19. *Tarlakovskii D.V., Zemskov A.V.* An Elastodiffusive Orthotropic Euler-Bernoulli Beam with Considering Diffusion Flux Relaxation // Math. Comput. Appl. 2019. V. 24. Is. 1. 23.
20. *Gafurov U.S., Afanasieva O.A., Zemskov A.V.* Unsteady elastic diffusion oscillations of a Timoshenko beam with considering the diffusion relaxation effects // Proceedings of the second International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics. Springer Nature Switzerland AG. 2019. P. 193–199.
21. *Davydov S.A., Zemskov A.V.* Unsteady One-dimensional Perturbations in Multicomponent Thermoelastic Layer with Cross-diffusion Effect. Journal of Physics: Conference Series. 2018. V. 1129. 012009.
22. *Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Общая теория упругих оболочек. М.: МАИ, 2018. 112 с.
23. *Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В.* Волны в сплошных средах. М.: Физматлит, 2004. 472 с.
24. Физические величины: Справочник / Бабичев А.П., Бабушкина Н.А., Братковский А.М. и др. Под общей редакцией Григорьева И.С., Мелихова И.З. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.