ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2020, № 5, с. 138–150

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОБЛЕМ ДОЛГОВЕЧНОСТИ ОРТОТРОПНЫХ ПОЛИГОНАЛЬНЫХ ПЛАСТИН ПРИ ШИРОКОПОЛОСНОМ АКУСТИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТОВ ИЗЛУЧЕНИЯ

© 2020 г. С. Л. Денисов[a],*, В. Ф. Копьев[a], А. Л. Медведский[a],, Н. Н. Остриков[a]**

[a] *Центральный аэрогидродинамический институт им. Н.Е. Жуковского, Жуковский, Россия*

**e-mail: stanislav.denisov@tsagi.ru*

***e-mail: aleksandr.medvedskiy@tsagi.ru*

Поступила в редакцию 11.01.2020 г.
После доработки 18.01.2020 г.
Принята к публикации 25.01.2020 г.

В работе рассматриваются задачи расчета долговечности ортотропных полигональных пластин, описываемых в рамках теории Кирхгофа и подвергающихся акустическому воздействию с широким спектром с учетом эффектов переизлучения звука. Предложен гибридный численно-аналитический метод решения задачи, основанный на определении собственных форм и частот колебаний пластины с помощью метода конечных элементов (МКЭ) с последующим расчетом моментов спектральной плотности среднеквадратичных напряжений с использованием квадратур Гаусса 5-го порядка. В работе выполнен расчет долговечности полигональной ортотропной стеклопластиковой пластины с помощью четырех различных методов (метод пересечений, метод Ковалевски, метод Болотина и метод Райхера) при диффузном распределении звукового поля по поверхности пластины и случайном широкополосном акустическом воздействии.

Ключевые слова: долговечность, акустическое нагружение, спектральная плотность обобщенных сил, метод конечных элементов (МКЭ), переизлучение звука, взаимная спектральная плотность

DOI: 10.31857/S0572329920030058

Введение. Общая теория расчета долговечности изотропных пластин и оболочек, подверженных внешнему широкополосному акустическому воздействию, без учета переизлучения звука была разработана в классических работах Майлса, Пауэлла и Кларксона [1–3]. Расчеты, выполненные на основе разработанных методов, показали удовлетворительное согласование с экспериментом. Указанные работы, дополненные экспериментальными данными, послужили основой для разработки различных инженерных методик расчета отклика пластин и оболочек при широкополосном акустическом воздействии. Большинство использующихся на сегодняшний день в авиации методов оценки долговечности элементов конструкции планера самолета базируются на этих работах с учетом экспериментально определенных коэффициентов [4].

Применение композитных или конструктивно ортотропных материалов в элементах конструкции летательных аппаратов приводит к необходимости доработки существующих расчетных моделей, поскольку их механические и физические свойства демонстрируют высокую чувствительность к таким факторам, как структура действующего акустического поля, звукоизлучательная способность, условия закрепления и т.д.

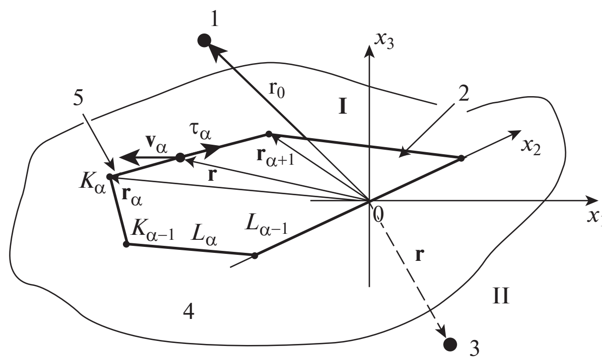

Рис. 1

В работе разработан гибридный численно-аналитический метод расчета долговечности ортотропных полигональных пластин, подвергающихся широкополосному акустическому воздействию. В качестве основного объекта исследования рассматривается полигональная ортотропная пластина неканонической формы, которая расположена в бесконечном, акустически жестком экране. Источником акустического воздействия является шум, формирующий на поверхности пластины стационарное в статистическом смысле распределение звукового поля.

1. Постановка задачи. Рассматривается тонкая полигональная ортотропная пластина неканонической формы, которая расположена в бесконечном, акустически жестком экране. Предполагается, что пластина в прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ с ортонормированным базисом $\mathbf{e}_i, i = 1,2,3$ описывается теорией Кирхгофа [5], при этом плоскость $x_3 = 0$ разделяет акустическую среду Ω плотностью ρ_0 и скоростью звука c_0 на верхнее (I) и нижнее (II) полупространства.

В качестве источника акустических возмущений в среде Ω рассматривается сторонний источник звука мощностью q, который, в общем случае, может иметь как детерминированную, так и случайную природу, а также характеризоваться как тональным, полигармоническим или широкополосным спектром. В данной работе рассматриваются статистически стационарные источники шума, имеющие широкий частотный спектр и для которых на поверхности пластины определены их характеристики, такие как спектр мощности и функция взаимной спектральной плотности [6].

Полигональная пластина занимает область $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}$, ограниченную прямыми L_α, которые задаются координатами узлов $K_\alpha(x_1^\alpha, x_2^\alpha)$ в плоскости Ox_1x_2 и $\mathbf{v}_\alpha$ – единичный вектор, нормальный к границе пластины, а $\boldsymbol{\tau}_\alpha$ – единичный вектор, касательный к границе пластины (рис. 1, где цифрами обозначены: 1 – источник звука q, 2 – упругая пластина D, 3 – точка наблюдения, 4 – акустически жесткий экран и 5 – контур пластины Г). Тогда постановка задачи в частотном представлении имеет следующий вид [7]:

– уравнения движения пластины:

$$-\rho h\omega^2 w - i\beta w + \mathrm{L}[w] = p^I - p^{II} \tag{1.1}$$

– уравнения движения акустической среды:

$$\begin{gathered}\Delta\varphi^I + k_0^2\varphi^I = -q(\mathbf{r},\mathbf{r}_0,\omega), \quad x_3 > 0 \\ \mathbf{r} = x_i\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{r}_0 = x_{0i}\mathbf{e}_i\end{gathered} \tag{1.2}$$

$$\Delta\varphi^{II} + k_0^2\varphi^{II} = 0, \quad x_3 < 0 \tag{1.3}$$

$$p^{I,II} = i\omega\rho_0\varphi^{I,II} \tag{1.4}$$

– условия непротекания:

$$\left.\frac{\partial\varphi^I}{\partial x_3}\right|_{x_1,x_2\in D} = 0, \quad \left.\frac{\partial\varphi^{II}}{\partial x_3}\right|_{x_1,x_2\in D} = 0 \tag{1.5}$$

– условия излучения Зоммерфельда:

$$\frac{\partial\varphi^{I,II}}{\partial|\mathbf{r}|} - ik_0\varphi^{I,II} = o\left(\frac{1}{|\mathbf{r}|}\right), \quad |\mathbf{r}| \to \infty \tag{1.6}$$

– краевые условия на границе $\Gamma = \bigcup\limits_{\alpha=1} L_\alpha$ формулируются в операторном виде:

$$\mathbf{B}[w]\|_{\Gamma} = 0, \quad \mathbf{B} = (B_1, B_2)^{\mathrm{T}} \tag{1.7}$$

где оператор $\mathbf{B}$ на прямой L_α определяется следующим образом:

– шарнирное опирание:

$$\begin{gathered} B_1 = 1, \quad B_2 = \mathbf{v}_\alpha\mathbf{M}\mathbf{v}_\alpha^{\mathbf{T}}, \quad \mathbf{M} = (M_{ij})_{2\times2}, \quad \mathbf{v}_\alpha = (\nu_1^\alpha, \nu_2^\alpha) \\ M_{11} = -\left(D_{11}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + D_{12}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right), \quad M_{22} = -\left(D_{21}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + D_{22}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right) \\ M_{12} = M_{21} = -2D_{66}\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} \end{gathered} \tag{1.8}$$

– жесткое защемление:

$$\begin{gathered} B_1 = 1, \quad B_2 = \mathbf{v}_\alpha\Theta, \quad \Theta = (\theta_1, \theta_2)^{\mathbf{T}} \\ \theta_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \theta_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} \end{gathered} \tag{1.9}$$

– свободное ребро панели:

$$\begin{gathered} B_1 = \mathbf{v}_\alpha\mathbf{M}\mathbf{v}_\alpha^{\mathbf{T}}, \quad B_2 = (\mathbf{Q} + \mathbf{D})\,\mathbf{v}_\alpha^{\mathbf{T}} \\ \mathbf{D} = (\partial M_1, \partial M_2), \quad \partial M_k = \frac{\partial M}{\partial x_k}, \quad M = \boldsymbol{\tau}_\alpha\mathbf{M}\mathbf{v}_\alpha^{\mathbf{T}} \end{gathered} \tag{1.10}$$

где D_{ij} – жесткостные параметры ортотропной пластины. Здесь и далее введены следующие безразмерные параметры: w – нормальное перемещение срединной поверхности пластины, h – толщина пластины, β – постоянная, описывающая диссипацию энергии в пластине, ρ – плотность материала пластины, p^I и p^I – давление в верхнем и нижнем полупространствах соответственно, $\mathrm{L}[w]$ – линейный дифференциальный оператор [5, 7], M_{ij} – текущие изменения изгибающих моментов, ρ_0 – плотность акустической среды, $k_0 = \omega/c_0$ – волновое число падающей волны, φ^I и φ^{II} – акустические потенциалы верхнего и нижнего полупространства соответственно, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки наблюдения, $\mathbf{r}_0$ – радиус-вектор стороннего источника, q – мощность стороннего источника. Отметим также, что для ортотропной пластины Кирхгофа справедливы известные кинематические и физические соотношения [5].

Представим давления в верхнем p^I и нижнем p^{II} полупространствах в следующем виде:

$$p^I = p_{\mathrm{INC}} + (p_{\mathrm{REF}} - p_{\mathrm{RAD}}), \quad p^{II} = p_{\mathrm{RAD}} \tag{1.11}$$

где p_{INC} — звуковое давление падающей полны, p^I_{REF} — звуковое давление в волне, отраженной от абсолютно жесткого экрана без пластины, а p_{RAD} — волна излученная пластиной, причем знак минус обусловлен передачей энергии падающей волны колебаниям пластины.

Выражение для акустического потенциала звукового поля, излучаемого пластиной, представимо в виде [8, 9]:

$$\begin{gathered}\varphi(\omega, \mathbf{r}) = -\frac{i\omega}{2\pi}\iint_D w(\xi)\, g(\xi, \mathbf{r}) d\xi \\ g(\xi, \mathbf{r}) = z^{-1}(\xi, \mathbf{r}) e^{ik_0 z(\xi, \mathbf{r})}, \quad z(\xi, \mathbf{r}) = \sqrt{(\xi_k - x_k)(\xi_k - x_k)} \\ \xi = \xi_i \mathbf{e}_i, \quad \xi_3 = 0\end{gathered} \tag{1.12}$$

Тогда с учетом (1.4), (1.11) и (1.12) выражение для разности давлений в правой части уравнения (1.1) примет вид:

$$\begin{gathered}p^I(\omega, \mathbf{x}) - p^{II}(\omega, \mathbf{x}) = 2i\omega\rho_0\varphi^+_{\text{ПАД}} + \pi^{-1}\rho_0\omega^2\iint_D w(\xi)\, g_0(\xi\mathbf{x})\, d\boldsymbol{\xi} \\ g_0(\xi, \mathbf{x}) = g(\xi, \mathbf{r})\big|_{x_3=0}, \quad \mathbf{x} = x_i\mathbf{e}_i, \quad x_3 = 0\end{gathered} \tag{1.13}$$

где учтен эффект удвоения давления при отражении звука от акустически абсолютно жесткой поверхности.

Тогда уравнение движения пластины (1.1) с учетом выражений (1.4) и (1.13) примет вид:

$$-\rho h\omega^2 w - i\beta w + \mathrm{L}[w] - \pi^{-1}\rho_0\omega^2\iint_D w(\xi)\, g_0(\xi, \mathbf{x}) d\xi = 2p_{INC}(\omega, \mathbf{x}) \tag{1.14}$$

Выражение (1.14) представляет собой интегро-дифференциальное уравнение относительно Фурье-образа прогиба пластины $w(\mathbf{x})$ при произвольном виде действующей акустической нагрузки $p_{INC}(\omega, x)$, распределенной по поверхности пластины.

2. Долговечность ортотропной пластины. Расчет долговечности пластины в данной работе проводится с помощью четырех различных методов: метода пересечений [10], метода Болотина [11], метода Ковалевски [10, 12] и метода, основанного на гипотезе спектрального суммирования (метод Райхера [12]). Ниже представлены основные расчетные выражения для этих методов:

— метод пересечений:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{2\pi A_{\alpha\beta}}{\sqrt{M^2_{\alpha\beta}/M^0_{\alpha\beta}}(2M^0_{\alpha\beta})^{m_{\alpha\beta}/2}\Gamma\left(m_{\alpha\beta}/2 + 1\right)} \tag{2.1}$$

— метод Болотина:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{2\pi A_{\alpha\beta}}{\sqrt{M^4_{\alpha\beta}/M^2_{\alpha\beta}}(2M^0_{\alpha\beta})^{m_{\alpha\beta}/2}\Gamma\left(m_{\alpha\beta}/2 + 1\right)} \tag{2.2}$$

— метод Ковалевски:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{2\pi A_{\alpha\beta}}{\left(\sqrt{(M^2_{\alpha\beta})^2/(M^0_{\alpha\beta}M^4_{\alpha\beta})}\right)^{m_{\alpha\beta}}\sqrt{M^4_{\alpha\beta}/M^2_{\alpha\beta}}(2M^0_{\alpha\beta})^{m_{\alpha\beta}/2}\Gamma(m_{\alpha\beta}/2 + 1)} \tag{2.3}$$

– метод Райхера:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{2\pi A_{\alpha\beta}}{\left[\int\limits_0^\infty S_\sigma(\omega)\omega^{2/m_{\alpha\beta}} \Big/ M_{\alpha\beta}^0 \, d\omega\right]^{m_{\alpha\beta}/2} (2M_{\alpha\beta}^0)^{m_{\alpha\beta}/2} \Gamma\left(m_{\alpha\beta}/2+1\right)} \tag{2.4}$$

Здесь $A_{\alpha\beta}$ и $m_{\alpha\beta}$ – постоянные, определяемые усталостной кривой Велера для рассматриваемых компонент напряжений [11], $\Gamma\left(m_{\alpha\beta}/2+1\right)$ – гамма-функция, $M_k^{\alpha\beta}$ – моменты спектральной плотности κ-го порядка, определяемые следующим образом [10–12]:

$$M_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega^k S_{\alpha\beta}^\sigma(\omega,\mathbf{x},\mathbf{y}) \, d\omega \tag{2.5}$$

где функция $S_{\alpha\beta}^\sigma(\omega,\mathbf{x},\mathbf{y})$ – взаимная спектральная плотность среднеквадратичных напряжений, определяемая для стационарных и эргодических процессов с помощью соотношения [6, 13] (здесь и далее, знак * обозначает комплексное сопряжение):

$$S_{\alpha\beta}^\sigma(\omega,\mathbf{x},\mathbf{y}) = \lim_{T\to\infty} \frac{\sigma_{\alpha\beta}(\omega,\mathbf{x})\,\sigma_{\alpha\beta}^*(\omega,\mathbf{y})}{2\pi T} \tag{2.6}$$

3. Объемная функция влияния для ортотропной пластины. Построим объемную функцию влияния $G(\omega,\mathbf{x},\xi)$ для ортотропной пластины, а затем на ее основе получим соотношения для моментов спектральной плотности $M_{\alpha\beta}^k$, используемых при расчете долговечности пластины на основе выражений (2.1) – (2.5).

Краевая задача для определения $G(\omega,\mathbf{x},\xi)$ имеет следующий вид [14]:

$$\begin{gathered} \mathrm{L}[G] - (\rho h\omega^2 - i\omega\beta)G = \delta(\mathbf{x}-\xi)\,\delta(\omega-\eta) \\ \delta(\mathbf{x}-\xi) = \delta(x_1-\xi_1)\,\delta(x_2-\xi_2) \end{gathered} \tag{3.1}$$

$$\mathbf{B}[G]\|_\Gamma = 0 \tag{3.2}$$

где $\delta(\bullet)$ – дельта-функция Дирака.

Будем искать фундаментальное решение $G(\omega,\mathbf{x},\xi)$ в виде ряда по собственным функциям $w_n(\mathbf{x})$ упругого оператора задачи $\mathrm{L}[w]$ при заданных граничных условиях (1.7), предполагая, что система собственных функций является полной, а спектр оператора невырожденным. Тогда фундаментальное решение $G(\omega,\mathbf{x},\xi)$ представимо в виде:

$$G(\omega,\mathbf{x}\xi) = \sum_{n=1}^\infty a_n(\omega,\xi) w_n(\mathbf{x}) \tag{3.3}$$

Подставим разложение (3.3) в выражение (3.1) и, умножив скалярно обе части уравнения (3.1) на собственную функцию $w_m(\xi)$, получим следующее выражение:

$$a_m(\omega,\xi)(-\rho h\omega^2 - i\omega\beta + \lambda_m) - \rho h\sum_{n=1}^\infty a_n(\omega,\xi) Z_{mn} = w_m(\xi)\Big/\|w_m\|^2 \tag{3.4}$$

$$Z_{mn} = \frac{\rho_0\omega^2}{\pi\rho h\|w_m\|^2} \iint\limits_D \iint\limits_D w_m(\mathbf{x}) w_n(\xi) g_0(\xi,\mathbf{x}) \, d\xi \, d\mathbf{x} \tag{3.5}$$

где учтено, что$\mathrm{L}[w_n] = \lambda_n w_n$, λ_n – собственное значение оператора $\mathrm{L}[w]$.

Величина Z_{mn} в (3.4) является характеристическим импедансом излучения пластины и описывает эффективность преобразования энергии упругих колебаний пластины в звуковое излучение [7–9]. При этом величины Z_{mm} являются собственными импедансами излучения для m-й формы колебаний, а величины Z_{mn} представляют собой импеданс взаимодействия между различными формами колебаний пластины.

Рассмотрим случай, когда импедансы излучения намного превосходят импедансы взаимодействия, т.е. $Z_{mm} \gg Z_{mn}$ (применимость такого условия обсуждается в [8, 9]). Тогда система линейных уравнений (3.4) становится диагональной и выражение для коэффициентов $a_m(\omega, \xi)$ принимает вид:

$$a_m(\omega, \xi) = \frac{w_m(\xi)}{\rho h \cdot \|w_m\|^2 \left(H(\omega, \Omega_m) - Z_{mm}\right)}$$
$$H(\omega, \Omega_m) = (-\omega^2 - i\omega\delta + \Omega_m^2) \tag{3.6}$$

где $\Omega_m^2 = \lambda_m / (\rho h)$ – квадрат собственной частоты колебаний пластины, $\delta = \beta/(\rho h)$ – величина, описывающая механическую диссипацию энергии при колебаниях пластины.

Тогда для фундаментального решения (3.3) получим окончательное выражение:

$$G(\omega, \mathbf{x}, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n(\mathbf{x}) w_n(\xi)}{\rho h \cdot \|w_n\|^2 \left(H(\omega, \Omega_m) - Z_{mm}\right)} \tag{3.7}$$

Если фундаментальное решение $G(\omega, \mathbf{x}, \xi)$ известно, то решение задачи (1.1)–(1.7) имеет вид:

$$w(\omega, \mathbf{x}) = \iint_D p(\omega, \xi) G_w(\omega, \mathbf{x}, \xi) d\xi = \frac{1}{\rho h} \iint_D p(\omega, \xi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n(\mathbf{x}) w_n(\xi)}{\left(H(\omega, \Omega_m) - Z_{mm}\right) \|w_n\|^2} d\xi \tag{3.8}$$

С использованием кинематических и физических соотношений для ортотропной пластины [5] получим следующие интегральные представления для компонент тензора напряжений σ_{ij}:

$$\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{x}) = \iint_D P(\omega, \xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_{ij,n}(\mathbf{x}, \xi)}{\left(H(\omega, \Omega_m) - Z_{mm}\right)} d\xi$$
$$G_{ij,n}(\mathbf{x}, \xi) = \frac{w_n(\xi)}{\rho h \cdot \|w_n\|^2} \cdot \partial_x^{(ij)} [w_n(\mathbf{x})], \quad i, j \in \{1, 2\} \tag{3.9}$$

где дифференциальные операторы $\partial_x^{(ij)}$ имеют вид:

$$\partial_x^{(11)} [f] = \pm \frac{6}{h^2} \left(D_{11} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + D_{12} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \right), \quad \partial_x^{(22)} [f] = \pm \frac{6}{h^2} \left(D_{12} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + D_{22} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \right)$$
$$\partial_x^{(12)} [f] = \pm \frac{6}{h^2} \left(2D_{66} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \tag{3.10}$$

Учет излучения звука приводит к сдвигу собственной частоты колебаний пластины, а также к изменению диссипации энергии излучения по сравнению со случаем, когда излучение не рассматривается. Как видно из соотношений (3.8) и (3.9) сдвиг частоты и изменение диссипации определяется знаками действительной и мнимой части импеданса излучения и зависит от частоты звукового поля ω. В рассмотренном приближении $Z_{mm} \gg Z_{mn}$, выражения (3.9) и (3.10) позволяют полностью определить напряженно-деформированное состояние полигональной ортотропной пластины при произвольном акустическом воздействии. Тогда, предполагая акустическое нагружение стационарным [6, 7] и используя определение для функции взаимной спектральной плотности среднеквадратичных напряжений в виде (2.6), получим:

$$
\begin{aligned}
S^{\sigma}_{\alpha\beta}(\omega,\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \lim_{T\to\infty}\frac{\sigma_{\alpha\beta}(\omega,\mathbf{x})\,\sigma^{*}_{\alpha\beta}(\omega,\mathbf{y})}{2\pi T} = \\
&= \iint_D\iint_D \lim_{T\to\infty}\frac{P(\omega,\xi)P^{*}(\omega,\boldsymbol{\eta})}{2\pi T}G_{\alpha\beta}(\omega,\mathbf{x},\xi G^{*}_{\alpha\beta}(\omega,\mathbf{y},\boldsymbol{\eta})d\xi d\boldsymbol{\eta} = \\
&= \iint_D\iint_D S^{P}(\omega,\xi,\boldsymbol{\eta})G_{\alpha\beta}(\omega,\mathbf{x},\xi)G^{*}_{\alpha\beta}(\omega,\mathbf{y},\boldsymbol{\eta})d\xi d\boldsymbol{\eta}
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

где $S^{\sigma}_{\alpha\beta}(\omega,\mathbf{x},\mathbf{y})$ – функция взаимной спектральной плотности среднеквадратичных напряжений в пластине, а $S^{P}(\omega,\xi,\boldsymbol{\eta})$ – функция взаимной спектральной плотности звукового давления, описывающая распределение энергии звукового поля по спектру, а также пространственное распределение звукового поля по поверхности пластины. Отметим, что в выражении (3.11) произведение комплексно сопряженных функций $G_{\alpha\beta}(\omega,\mathbf{x},\xi)G^{*}_{\alpha\beta}(\omega,\mathbf{y},\boldsymbol{\eta})$ является объемной функцией влияния ортотропной пластины, позволяющей определить спектральную плотность напряжений в пластине при заданной функции взаимной спектральной плотности звукового давления $S^{P}(\omega,\xi,\boldsymbol{\eta})$.

Используя выражения (3.9) и (3.10) представим (3.11) в эквивалентном виде, более удобном для дальнейшего анализа:

$$
\begin{aligned}
S^{\sigma}_{\alpha\beta}(\omega,\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \iint_D\iint_D S^{P}(\omega,\xi,\boldsymbol{\eta})G_{\alpha\beta}(\omega,\mathbf{x};\xi)G^{*}_{\alpha\beta}(\omega,\mathbf{y};\boldsymbol{\eta})d\xi d\boldsymbol{\eta} = \\
&= \iint_D\iint_D S^{P}(\omega,\xi,\boldsymbol{\eta})\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{G_{\alpha\beta,n}(\mathbf{x},\xi)}{\left(H(\omega,\Omega_n)-Z_{nn}\right)}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{G^{*}_{\alpha\beta,m}(\mathbf{y},\boldsymbol{\eta})}{\left(H(\omega,\Omega_m)-Z_{mm}\right)^{*}}\right]d\xi d\boldsymbol{\eta}
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Изменив порядок суммирования и интегрирования в (3.12) и приведем его к виду:

$$
S^{\sigma}_{\alpha\beta}(\omega,\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{G_{\alpha\beta,n}(\mathbf{x})\cdot G_{\alpha\beta,m}(\mathbf{y})\cdot J^{2}_{nm}(\omega)}{\left(H(\omega,\Omega_n)-Z_{nn}\right)\cdot\left(H(\omega,\Omega_m)-Z_{mm}\right)^{*}}
\tag{3.13}
$$

где $J^{2}_{nm}(\omega)$ является спектральной плотностью обобщенных сил:

$$
J^{2}_{nm}(\omega) = \frac{1}{\left(\rho h\cdot\|w_n\|^{2}\right)^{2}}\iint_D\iint_D S^{P}(\omega,\xi,\boldsymbol{\eta})w_n(\xi)w_m(\boldsymbol{\eta})d\xi d\boldsymbol{\eta}
\tag{3.14}
$$

Из выражения (3.14) следует, что спектральная плотность обобщенных сил зависит от номера моды и частоты, но не зависит от координат пластины и импедансов излучения. Физический смысл спектральной плотности обобщенных сил состоит в том, что она характеризует эффективность преобразования энергии акустической волны в упругие колебания пластины.

Из выражений (3.13) и (3.14) получим следующее соотношение для моментов спектральной плотности $M^{k}_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y})$, удобное для практического использования:

$$
\begin{aligned}
M^{k}_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\omega^{k}\left[\iint_D\iint_D S^{P}(\omega,\xi,\boldsymbol{\eta}G_{\alpha\beta}(\omega,\mathbf{x};\xi)G^{*}_{\alpha\beta}(\omega,\mathbf{y};\boldsymbol{\eta})d\xi d\boldsymbol{\eta}\right]d\omega = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}G_{\alpha\beta,n}(\mathbf{x})G_{\alpha\beta,m}(\mathbf{y})\cdot I^{k}_{nm}
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

где в рассмотрение введен частотный интеграл I^k_{nm}, имеющий вид:

$$I^k_{nm} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^k J^2_{nm}(\omega)}{(H(\omega,\Omega_n) - Z_{nn}) \cdot (H(\omega,\Omega_m) - Z_{mm})^*} d\omega \tag{3.16}$$

Выражения (3.14)–(3.16), с учетом выражения (3.5), решают задачу определения напряженно-деформированного состояния и долговечности упругой ортотропной пластины на акустическое воздействие с широким спектром с учетом переизлучения звука. Именно эти выражения будут использоваться далее для построения гибридного численно-аналитического метода.

4. Гибридный численно-аналитический метод расчета долговечности. Выражение для моментов спектральной плотности (3.15) зависит от собственных значений λ_n и собственных функций $w_n(\mathbf{x})$. При произвольной геометрии пластины и граничных условий на краях вида (1.7)–(1.10) аналитические выражения в замкнутом виде для λ_n и $w_n(\mathbf{x})$ получить достаточно сложно. В этом случае эффективным методом расчета собственных частот и форм колебаний пластины является метод конечных элементов (МКЭ) [15].

Далее, представим область D, занимаемую пластиной, в виде объединения N треугольных областей K_l: $D = \bigcup_{l=1}^{N} K_l$ и предположим, что собственные функции w_n аппроксимируются на каждой треугольной области K_l следующим образом:

$$w^l_n(\mathbf{x}^l) = N_k(\mathbf{x}^l) q^l_{kn}, \quad k = 1...M \tag{4.1}$$

где q^l_{kn} – компоненты вектора-столбца обобщенных узловых перемещений l-го элемента, соответствующего n-й моде колебаний, $N_k(\mathbf{x}^l)$- функции формы для прогиба элемента, M – число степеней свободы конечного элементаK_l.

Тогда с использованием (4.1) получение выражений для вычисления импеданса излучения (3.5), спектральной плотности обобщенных сил (3.14) и нормы собственных функций $\|w_m\|^2$ не вызывает затруднений. Для квадратур Гаусса 5-го порядка [15, 16] получим следующие расчетные выражения:

$$Z_{mn} = \frac{\rho_0 \omega^2}{\pi \rho h \|w_m\|^2 \|w_n\|^2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sum_{p=1}^{7} \sum_{r=1}^{7} \alpha_p \alpha_r N_k(\mathbf{x}^i_p) N_k(\xi^j_r) q^i_{kn} q^j_{km} g_0(\xi^j_r, \mathbf{x}^i_p) \Delta s_i \Delta s_j \tag{4.2}$$

$$J^2_{mn}(\omega) = \frac{1}{(\rho h)^2 \|w_m\|^2 \|w_n\|^2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sum_{p=1}^{7} \sum_{r=1}^{7} \alpha_p \alpha_r N_k(\mathbf{x}^i_p) N_k(\xi^j_r) q^j_{km} q^i_{kn} S^P(\omega, \mathbf{x}^i_p, \xi^j_r) \Delta s_i \Delta s_j \tag{4.3}$$

$$\|w_n\|^2 = \sum_{l=1}^{N} \alpha_p [N_n(\mathbf{x}^l_p) q^l_n]^2 \Delta s_l \tag{4.4}$$

где Δs_i и Δs_j – площади элементов K_i и K_j соответственно, α_p, α_r – коэффициенты квадратур Гаусса, $\mathbf{x}^i_p$ и ξ^j_r – координаты точек интегрирования в элементах K_i и K_j соответственно, $S^P(\omega, \mathbf{x}^i_p, \xi^j_r)$ – значения функции взаимной спектральной плотности в узлах элементов K_i и K_j.

Вычисление частотного интеграла (3.15) проводится по конечному интервалу частот $[-\Omega_\infty, \Omega_\infty]$ с использованием квадратурных формул Симпсона [16], что приводит следующему выражению:

$$\tilde{I}^k_{nm} = \frac{h}{3}\sum_{j=1}^{2\mathrm{N}} \frac{\beta_j \cdot \omega_j^k \cdot S(\omega_j) \cdot J^2_{nm}(\omega_j)}{\left(H(\omega_j,\Omega_n) - Z_{nn}(\omega_j)\right)\cdot\left(H(\omega_j,\Omega_m) - Z_{mm}(\omega_j)\right)^*}$$
$$\omega_j = \omega_0 + jh, \quad h = (\omega_{2\mathrm{N}} - \omega_0)/(2\mathrm{N})\,2, \quad \omega_{2N} = \Omega_\infty, \quad \omega_0 = -\Omega_\infty \tag{4.5}$$
$$\beta_0 = \beta_{2\mathrm{N}} = 1, \quad \beta_j = \begin{cases} 2, & j = 2n \\ 4, & j = 2n+1 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}$$

где N – число интервалов, на которые разбивается расчетная область, а Ω_∞ – граничная частота рассматриваемого диапазона частот.

Для вычисления моментов спектральной плотности $M^k_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ с помощью выражения (3.15) необходимо построить конечно-элементную аппроксимацию для функций $G_{ij,n}(\mathbf{x},\xi)$ с помощью дифференциальных операторов $\partial_x^{(ij)}[w_n(\mathbf{x})]$ в (3.10). Для этого с помощью (4.1) запишем выражения для операторов (3.10) в отдельном элементе K_l в виде:

$$\begin{bmatrix} \partial_x^{(11)} \\ \partial_x^{(22)} \\ \partial_x^{(12)} \end{bmatrix} = \pm\frac{6}{h^2}\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2D_{66} \end{bmatrix} \cdot \left[\frac{\partial^2 N_k(\mathbf{x}^l)}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 N_k(\mathbf{x}^l)}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 N_k(\mathbf{x}^l)}{\partial x_1\,\partial x_2}\right]^{\mathrm{T}} q^l_{kn} \tag{4.6}$$

Входящие в выражение (4.6) вторые производные от функции формы определяют распределение напряжений в отдельном конечном элементе K_l для n-й собственной функции. Суммирование по всем элементам $l = 1...N$ позволяет получить распределение напряжений во всей пластине для каждой собственной функции $w_n(\mathbf{x})$. Из выражения (4.6) следует, что распределение напряжений в рассматриваемой пластине явно зависит от точности аппроксимации второй производной для рассматриваемого конечного элемента, поэтому в данной работе для расчета прогибов $w_n(\mathbf{x})$ использовались треугольные BCIZ – элементы [15], а для расчета среднеквадратичных напряжений треугольные DKT – элементы [17]. При расчете также учитывалось, что спектральная плотность обобщенных сил имеет наибольшее значение при $m = n$ [1–3], и расчет долговечности проводится в точке $\mathbf{x}$, где напряжения достигают максимальных значений.

Таким образом, выражения (4.2)–(4.5) позволяют вычислить частотный интеграл (3.16), а выражение (4.6) момент спектральной плотности k-порядка (3.15), на основе которых проводится расчет долговечности по различным методикам (2.1)–(2.4).

Верификация рассмотренного гибридного численно-аналитического метода проводилась для допускающего точное решение случая прямоугольной выполненной из стеклопластика ортотропной шарнирно-опертой по периметру пластины размером 500 × 100 мм толщиной 1 мм. Расчеты, выполненные в [7, 18] для полностью коррелированного поля, дельта-коррелированного поля, поля с конечными масштабами корреляции и диффузного полей, показали, что для сеток, состоящих из 800, 840 и 1600 элементов, точность расчетов напряженно-деформированного состояния в точке максимальных напряжений составляет не ниже 5%, а точность расчета долговечности – не ниже 10% для всех рассмотренных типов распределений звукового поля, конечно-элементных сеток и методик расчета долговечности.

5. Долговечность ортотропной полигональной пластины. Далее представлены результаты расчета спектральной плотности среднеквадратичных напряжений и долговеч-

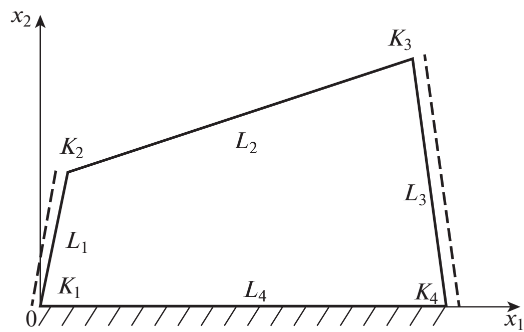

Рис. 2

ности для полигональной пластины неканонической формы, подвергающихся воздействию диффузного звукового поля с широким спектром, для которого функция взаимной спектральной плотности звукового давления $S^P(\omega,\xi,\boldsymbol{\eta})$ имеет вид [7, 18]:

$$
\begin{gathered}
S^P(\omega,\xi,\boldsymbol{\eta}) = S^P(\omega)\cdot F(\omega,\xi,\boldsymbol{\eta}) \\
S^P(\omega) = \Phi_0\left(\omega/\omega^*\right)^2\exp[-\left(\omega/\omega^*\right)^2] \\
F(\omega,\xi,\boldsymbol{\eta}) = \frac{\sin\left(k\left(\xi_1-\eta_1\right)\right)}{k\left(\xi_1-\eta_1\right)}\cdot\frac{\sin\left(k\left(\xi_2-\eta_2\right)\right)}{k\left(\xi_2-\eta_2\right)} \\
k = \omega/c_0\,,\quad \Phi_0 = \frac{4}{\omega^*\sqrt{\pi}}p_0^2\cdot 10^{SPL/10}
\end{gathered}
\tag{5.1}
$$

где $S^P(\omega)$ – спектр мощности звукового поля, ω^* – характеристическая частота, на которой достигается максимум, SPL – суммарный уровень шума в дБ, $F(\omega,\xi,\boldsymbol{\eta})$ – функция, определяющая пространственную структуру диффузного звукового поля на поверхности пластины [7, 14], и p_0 опорное давление, равное 20 мкПа.

Геометрия пластины в плане представлена на рис. 2, координаты вершин пластины имели следующие значения: $K_1(0.0,\ 0.0)$, $K_2(0.03,\ 0.1)$, $K_3(0.48,\ 0.2)$, $K_4(0.5,\ 0.0)$, края L_1 и L_3 предполагались шарнирно-опертыми, край L_2 – свободный, а край L_4 – защемленный. Пластина была выполнена из стеклопластика толщиной 4 мм, и при дискретизации была разбита на 3500 конечных элементов (1836 узлов).

Расчеты проводились для характеристической частоты $\omega^* = 10\omega_0$, где ω_0 первая собственная частота колебаний пластины, частотный диапазон располагался от 10 Гц до 1 кГц, а суммарный уровень шума предполагался равным 140 дБ. При расчете рассматривалось 11 форм колебаний пластины, а постоянная конструкционного демпфирования принималась равной $\delta = 0.017\cdot\omega_{11}$. Механические и усталостные характеристики рассматриваемого материала были следующими [19]: $E_{11} = 5620$ МПа; $E_{22} = 4590$ МПа; $\mu_{11} = 0.22$; $G_{12} = 2330$ МПа; $\rho = 1860$ кг/м^3; $m_{11} = 7.042$; $10^\gamma = 47.635$ ($\gamma = A_{\text{Veler}}^{11}$); $m_{11} = 7.042$; $10^\theta = 47.325$ ($\theta = A_{\text{Veler}}^{22}$) и $\omega_0 = 379.8186$ с$^{-1}$.

На рис. 3 и 4 представлен выраженный в секундах расчет долговечности пластины T_{11} и T_{22} вдоль защемленного края L_4 при $x_2 = 0.01$ мм, выполненный с помощью четырех методик для компонент напряжений $\langle\sigma_{11}\rangle$ и $\langle\sigma_{22}\rangle$ соответственно. Из рис. 3 и 4 следует, что для обеих компонент напряжений максимальное значение долговечности

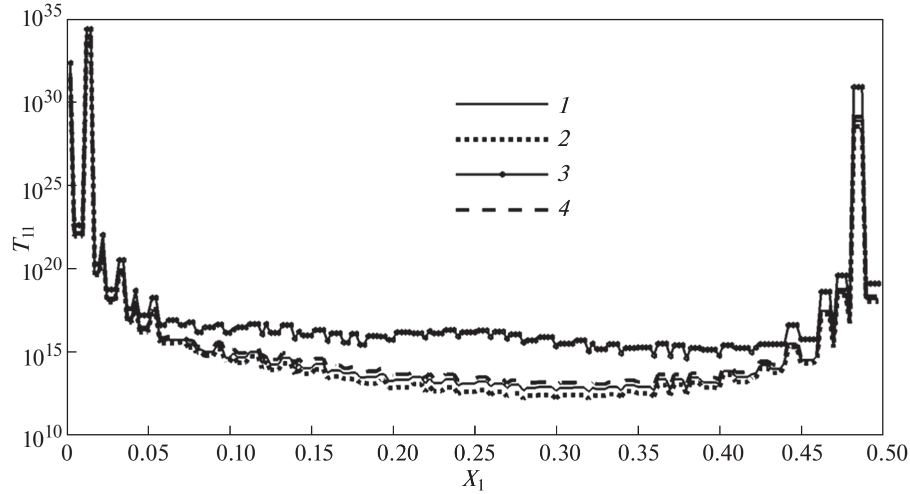

Рис. 3

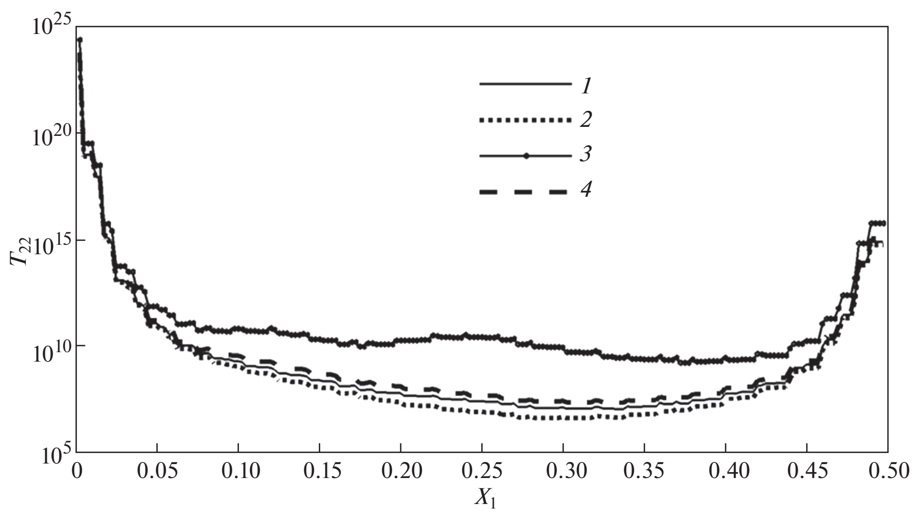

Рис. 4

наблюдается для расчета, выполненного с помощью метода Ковалевски (кривая *3*), а минимальное – с помощью метода Болотина (кривая *2*). Расчеты, выполненные с помощью метода Райхера (кривая *4*) и метода пересечений (кривая *1*), носят близкие значения. На шарнирно-опертых краях пластины L_1 и L_3 долговечность имеет максимальные значения, что обусловлено минимальными значениями изгибающих моментов, и, как следствие, напряжений [7, 8].

На рис. 5 представлено сравнение выраженной в секундах долговечности T_{22} в точке максимальных напряжений $K_{MAX}\,(0.3, 0.0)$ с учетом и без учета переизлучения звука

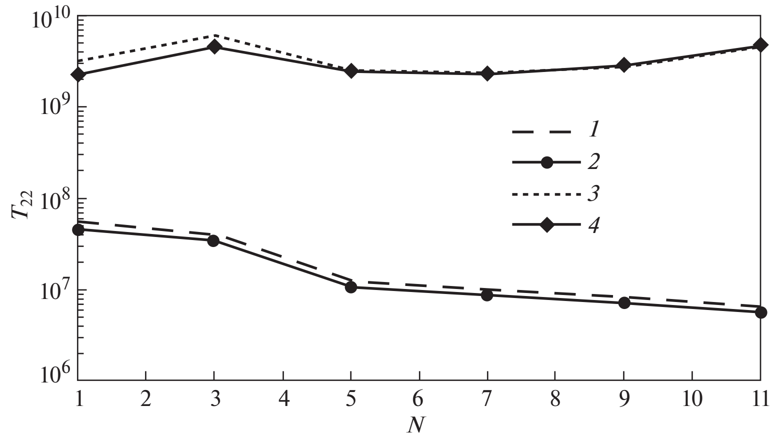

Рис. 5

в зависимости от числа учитываемых форм колебаний для методик Болотина и Ковалевски.

Кривые *1* и *2* на рис. 5 соответствует методике Болотина для случаев без учета переизлучения и с учетом переизлучения звука соответственно, а кривые *3* и *4* соответствуют методике Ковалевски также для случаев без учета переизлучения и с учетом переизлучения звука соответственно. Как следует из графиков, для метода Болотина увеличение числа рассматриваемых форм колебаний приводит, как и ожидалось, к уменьшению долговечности примерно на порядок. Однако для методики Ковалевски наблюдается иная картина – увеличение числа рассматриваемых форм колебаний пластины приводит к увеличению долговечности, начиная с 7 формы. Это приводит к тому, что при учете 1 формы колебаний разница между вычисленными значениями долговечности для методик Болотина и Ковалевски составляла два порядка, а при учете 9 форм колебаний уже 3 порядка. Отметим, что для метода пересечений и метода Райхера зависимость долговечности от числа учитываемых мод имеет вид, аналогичный методике Болотина.

Заключение. Расчет долговечности ортотропной полигональной пластины с комбинированными условиями закрепления, выполненный с помощью четырех различных методов для диффузного распределения звукового поля продемонстрировал, что увеличение числа учитываемых форм колебаний пластины приводит к уменьшению долговечности, как и учет переизлучения звука пластиной.

Использование различных методик расчета долговечности позволяют установить минимальные и максимальные значения долговечности пластины, причем минимальные значения долговечности имеют место для метода Болотина, а максимальные – для метода Ковалевски.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (код проекта № 18-08-01153 А).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Miles J.W.* On Structural Fatigue Under Random Loading // Journal of the Aeronautical Sciences. 1954. V. 21. №. 11. P. 753–762.

2. *Powell A.* On the Fatigue Failure of Structure due to the Vibration Excited by Random Pressure Fields // Journal Acoustic Society of America. 1958. V. 30. P. 1130–1135.

3. *Clarkson B.L.* The design of Structures to Resist Jet Noise Fatigue // Journal Royal Aeronautic Society. 1962. V. 66. No. 622. P. 603–616.
4. *Ballentine J.R. et al.* Refinement of Sonic Fatigue Structural Design Criteria // Jan. 1968. AFFDL-TR-67-156, Air Force Dynamics Laboratory, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio. P. 232.
5. *Бажанов В.Л., Гольденблат И.И., Копнов В.А., Поспелов А.Д., Синюков А.М.* Пластинки и оболочки из стеклопластиков. М.: "Высшая школа", 1970. 408 с.
6. *Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И.* Введение в статистическую радиофизику. Часть II. Случайные поля. М.: Наука, 1978. 463 с.
7. *Медведский А.Л., Копьев В.Ф., Остриков Н.Н., Денисов С.Л.* Влияния акустического излучения крупномасштабных когерентных структур типа волн неустойчивости на отклик и долговечность полигональных ортотропных пластин // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Уфа, 2019. С. 225–232.
8. *Плахов Д.Д.* Прохождение акустической волны сквозь многослойную пластину, подкрепленную ребрами жесткости // Акустический журнал, 1967. Т. 13. № 4. С. 597–603.
9. *Шендеров Е.Л.* Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 348 с.
10. *Lee Yung-Li, Pan Jwo, Hathaway R.B., Barkley M.E.* Fatigue Testing and Analysis (Theory and Practice), ELSEVIER, 2005. P.402.
11. *Болотин В.В.* Случайные колебания упругих систем. М.: Наука. 1979. 335 с.
12. *Райхер В.Л.* Гипотеза спектрального суммирования и ее применение для определения усталостной долговечности при действии случайных нагрузок // Труды ЦАГИ. 1969. Вып. 1134. 40 с.
13. *Мунин А.Г., Квитка В.Е.* Авиационная акустика. М.: Машиностроение, 1973. 437 с.
14. *Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В.* Волны в сплошных средах. М.: Физматлит, 2004. 472 с.
15. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The Finite Element Method. Vol. 2: Solid Mechanics. Fifth edition published by Butterworth/Heinemann, 2000. P. 478.
16. *Мэтьюз Д.Г., Финк К.Д.* Численные методы. Использование Matlab. Третье издание. Издательский дом "Вильямс", 2001. 713 с.
17. *Белкин А.Е., Гаврюшин С.С.* Расчет пластин методом конечных элементов: Учеб. пособ. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 232 с.
18. *Денисов С.Л., Медведский А.Л.* Разработка и верификация численно-аналитического метода расчета отклика пластин на широкополосное акустическое воздействие // Электронный журнал "Труды МАИ". 2016. Вып. 91, www.mai.ru/science/trudy
19. *Моваггар А.Н., Львов Г.И.* Экспериментальное исследование усталостной прочности стекловолоконного композита СТЭФ-1 // Проблемы прочности, 2012. № 2. С. 145–155.