

УДК 539.37

НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ В ДИСКЕ ИЗ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОГО МАТЕРИАЛА С ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ВИДА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ СВОЙСТВАМИ

© 2020 г. Е. В. Ломакин^{a,b,*}, О. П. Щендригина^{a,**}

^aМосковский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

^bМосковский авиационный институт, Москва, Россия

*e-mail: evlomakin@yandex.ru

**e-mail: Ol.Shendrigina@mail.ru

Поступила в редакцию 28.02.2020 г.

После доработки 11.03.2020 г.

Принята к публикации 05.04.2020 г.

Проведен анализ свойств определяющих соотношений теории деформирования физически нелинейных материалов с зависящими от вида напряженного состояния свойствами. В данных соотношениях учтены две формы нелинейности, одна из которых связана с нелинейностью диаграмм деформирования, а другая – с изменением этих диаграмм в зависимости от условий нагружения. Исследованы распределения напряжений и деформаций во вращающемся диске из материала с чувствительными к виду напряженного состояния свойствами и проведено сравнение с результатами расчетов для материала с инвариантными к виду внешних воздействий свойствами.

Ключевые слова: теория деформирования, зависимость свойств от напряженного состояния, плоское напряженное состояние, напряжения в диске, деформации в диске

DOI: 10.31857/S0572329920040091

1. Введение. Сопротивление многих конструкционных материалов зависит от вида внешних воздействий. Наиболее заметно эта зависимость проявляется в материалах с неоднородной структурой, содержащих различного рода включения, поры, армирующие элементы, микротрещины и другие неоднородности структуры, поведение которых зависит от условий деформирования и нагружения. Изучению влияния неоднородности структуры конструкционных материалов на их деформационные, пластические и прочностные свойства посвящены работы многих авторов [1–9]. Данные исследования имеют большое научное и практическое значение, которое определяется широким использованием материалов с неоднородной структурой в различных отраслях современного машиностроения [10–15]. Эти материалы обладают значительной объемной сжимаемостью при пластическом деформировании, упрочнением, эффектом дилатансии, взаимосвязью процессов сдвигового и объемного деформирования. Такие свойства проявляются наиболее заметно у композитных материалов, полученных на основе ткани или с трехосным плетением волокон, а также в композитах с упругой податливой матрицей. Кроме того, такими свойствами обладают чугун, керамики, алюминиевые сплавы и многие другие материалы [16–20].

Для проведения расчетов напряженно-деформированного состояния в телах, конструкциях и сооружениях предложены теории, в которых отражены некоторые из наблюдаемых в экспериментах эффектов. Во многих из предложенных теорий в качестве зависимости свойств материалов от вида напряженного состояния учитывалось различие механических свойств при одноосном растяжении, одноосном сжатии и, в некоторых случаях, сдвиге [21–27], но это только два или три частных вида напряженного состояния среди неограниченного их множества. Поэтому ограничиваться только различием характеристик для частных случаев вряд ли целесообразно, поскольку если они различны для одноосного растяжения и одноосного сжатия, то это означает, что они различаются и для других видов напряженного состояния. Это подтверждается результатами экспериментальных исследований. Поэтому для более полного описания данных эффектов необходимо вводить в определяющие соотношения параметры вида напряженного состояния. Такой подход был предложен в [28–30], и сформулированы определяющие соотношения.

В данной работе исследовано влияние зависимости деформационных свойств материалов от вида напряженного состояния на распределения напряжений и деформаций во вращающемся диске. Расчеты проведены на основе определяющих соотношений с использованием параметра вида напряженного состояния, представляющего собой отношение гидростатической компоненты напряжений к эффективному напряжению Мизеса. Проведено сравнение с результатами расчетов для материала, свойства которого не зависят от вида внешних воздействий.

2. Определяющие соотношения. Определяющие соотношения отражают общие свойства и закономерности в поведении различных материалов, которые обнаруживаются при проведении экспериментальных исследований. Эффект зависимости механических свойств материалов от вида внешних воздействий или вида напряженного состояния, которое создается в материале при нагружении, можно проиллюстрировать на основе результатов экспериментальных исследований поведения чугуна и конструкционного графита [30].

На рис. 1 приведены диаграммы зависимости между эффективным напряжением Мизеса $\sigma_0 = \sqrt{3/2 S_{ij} S_{ij}}$, где $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}$ – девиатор напряжений, $\sigma = \frac{1}{3} \sigma_{ii}$ – среднее напряжение, и эффективной деформацией $\epsilon_0 = \sqrt{2/3 e_{ij} e_{ij}}$, где $e_{ij} = \epsilon_{ij} - 1/3 \epsilon \delta_{ij}$ – девиатор деформаций, $\epsilon = \epsilon_{ii}$ – объемная деформация в случае малых деформаций, для серого чугуна СЧ 15-32. Диаграммы получены в условиях пропорционального нагружения трубчатых образцов при действии осевой нагрузки и крутящего момента. В процессе каждого испытания вид напряженного состояния не менялся, его можно характеризовать параметром ξ , представляющим собой отношение среднего напряжения к эффективному напряжению, $\xi = \sigma/\sigma_0$, названного трехосностью напряжений (stress triaxiality). Диаграмма 1 соответствует одноосному растяжению ($\xi = 1/3$), 3 – чистому сдвигу ($\xi = 0$), 6 – одноосному сжатию ($\xi = -1/3$). Диаграммы 2, 4 и 5 получены при различных соотношениях между осевой нагрузкой и крутящим моментом, им соответствуют следующие значения параметра ξ : 0.232, -0.064 , -0.126 . Наблюдается подобие диаграмм, соответствующих разным значениям параметра ξ .

На рис. 2 приведены эффективные диаграммы деформирования конструкционного графита АРВ, полученные на основе испытаний трубчатых образцов при пропорциональном изменении главных напряжений. Диаграмма 1 соответствует одноосному растяжению ($\xi = 1/3$), 2 – одноосному сжатию ($\xi = -1/3$), 3 – чистому сдвигу ($\xi = 0$), 4 – равномерному двухосному растяжению ($\xi = -2/3$). Наблюдается значительное

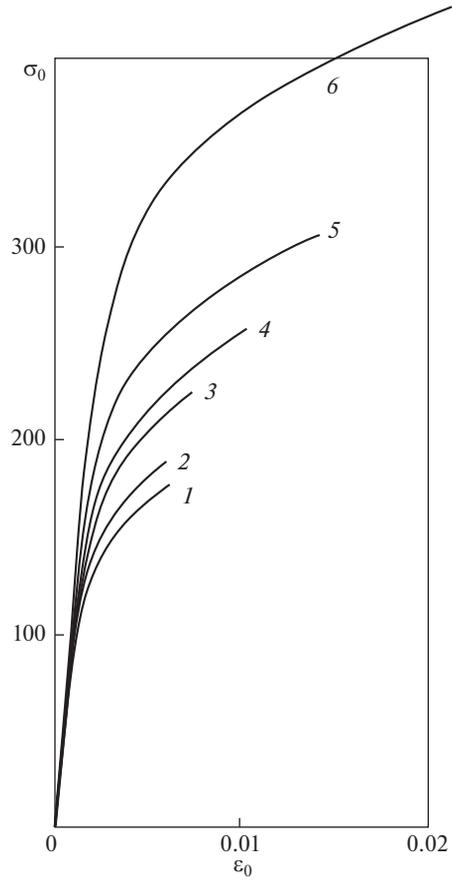


Рис. 1

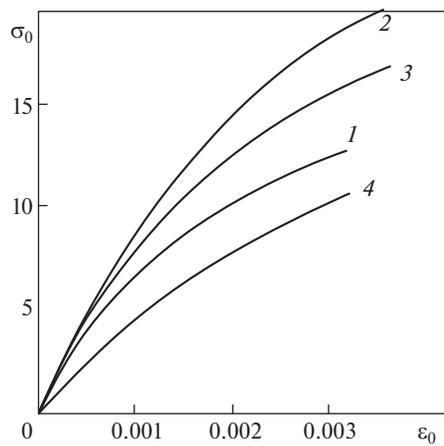


Рис. 2

расхождение диаграмм деформирования для разных условий пропорционального нагружения.

Для определения напряженно-деформированного состояния в телах, свойства которых чувствительны к виду напряженного состояния, могут быть использованы подходы нелинейной теории упругости или деформационной теории пластичности с учетом изменчивости свойств материалов. Тогда при формулировке определяющих соотношений можно использовать соответствующую потенциальную функцию и представить дополнительную работу в виде:

$$\Phi = \frac{1}{2}(A + B\xi^2)\sigma_0^2 + (1 + \alpha(\xi))g(\sigma_0) \quad (2.1)$$

Первое слагаемое (2.1) представляет линейно упругую составляющую деформации, а функция $g(\sigma_0)$ характеризует нелинейность кривых деформирования. Наиболее распространенное выражение для функции, отвечающей за нелинейность, является степенная зависимость вида $g(\sigma_0) = k\sigma_0^n/n$. Функция $\alpha(\xi)$ – это функция вида напряженного состояния, которая характеризует чувствительность деформационных характеристик к виду нагружения. При $\alpha(\xi) \equiv 0$ потенциал (2.1) и задаваемые им определяющие соотношения совпадают с уравнениями деформационной теории пластичности. Дифференцируя выражение (2.1) по напряжениям, получим связь между напряжениями и деформациями, которые имеют следующий вид:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2}[A + \lambda(\xi)k\sigma_0^{n-2}]S_{ij} + \frac{1}{3}[B + \Lambda(\xi)k\sigma_0^{n-2}]\sigma\delta_{ij} \quad (2.2)$$

$$\lambda(\xi) = 1 + \alpha(\xi) - \frac{\alpha'(\xi)\xi}{n}$$

$$\Lambda(\xi) = \frac{\alpha'(\xi)}{\xi n}$$

Из соотношений (2.2.) следует, что функции $\lambda(\xi)$ и $\Lambda(\xi)$ и их производные связаны соотношениями:

$$\lambda(\xi) + \xi^2\Lambda(\xi) = 1 + \alpha(\xi), \quad \lambda'(\xi) + \xi^2\Lambda'(\xi) = (n-2)\xi\Lambda(\xi) \quad (2.3)$$

Зная выражения для функции $\lambda(\xi)$, которая определяется на основе результатов экспериментов, из второго соотношения (2.3) можно найти функцию $\Lambda(\xi)$. Это соотношение представляет собой дифференциальное уравнение, решение которого имеет вид:

$$\Lambda(\xi) = \left(-\int \left[\frac{\lambda'(\xi)}{\xi^n} \right] d\xi + C_0 \right) \xi^{n-2} \quad (2.4)$$

Используя (2.2), можно получить выражения для эффективной деформации и объемной деформации:

$$\varepsilon_0 = [A + \lambda(\xi)k\sigma_0^{n-2}]\sigma_0, \quad \varepsilon = [B + \Lambda(\xi)k\sigma_0^{n-2}]\sigma \quad (2.5)$$

Из (2.5) можно получить выражение, связывающее эффективную деформацию и объемную деформацию:

$$\varepsilon = \frac{B + \Lambda(\xi)k\sigma_0^{n-2}}{A + \lambda(\xi)k\sigma_0^{n-2}} \xi \varepsilon_0$$

Это соотношение означает, что в рассматриваемых материалах процессы объемного и сдвигового деформирования взаимосвязаны. В условиях пропорционального на-

гружения параметр ξ постоянный, но принимает разные значения для разных видов нагружения. Функция $\lambda(\xi) = [\varepsilon_0 - A\sigma_0](k\sigma_0^{n-1})^{-1}$ характеризует расхождение диаграмм зависимости эффективного напряжения от эффективной деформации для разных условий пропорционального нагружения, определяемых значением параметра ξ . Не нарушая общности, можно в качестве базового эксперимента, по отношению к которому определяется отклонение диаграмм деформирования, выбрать чистый сдвиг, когда $\xi = 0$, и считать $\varepsilon(\xi) = 0$ и $\lambda(0) = 1$. Тогда параметры функции $g(\sigma_0)$ можно определить на основе диаграммы деформирования, полученной в условиях чистого сдвига.

Условия единственности решения задач с использованием определяющих соотношений (2.2) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{(A + B\xi^2)\sigma_0^2}{2} + \frac{1}{n}[\lambda(\xi) + \xi^2\Lambda(\xi)]k\sigma_0^n &> 0 \\ A + [(n-1)\lambda(\xi) - \xi\lambda'(\xi)]k\sigma_0^{n-2} &> 0 \\ B + [\Lambda(\xi) - \xi\Lambda'(\xi)]k\sigma_0^{n-2} - \frac{[\lambda'(\xi)k\sigma_0^{n-2}]^2}{A + [(n-1)\lambda(\xi) - \xi\lambda'(\xi)]k\sigma_0^{n-2}} &> 0 \end{aligned}$$

3. Напряженно-деформированное состояние во вращающемся диске. Рассмотрим плоский круглый диск с внешним радиусом b , вращающийся с угловой скоростью ω . На внешнем радиусе нагрузки отсутствуют. Напряженно-деформированное состояние в этом диске будет плоским с осевой симметрией. Радиальная и окружная деформации выражаются через радиальное перемещение $u_r(r)$ по известным формулам. В условиях осевой симметрии уравнение равновесия и уравнение совместности деформаций имеют вид:

$$\frac{d\sigma_{rr}(r)}{dr} + \frac{\sigma_{rr}(r) - \sigma_{\varphi\varphi}(r)}{r} + \rho\omega^2 r = 0, \quad \frac{d\varepsilon_{\varphi\varphi}(r)}{dr} + \frac{\varepsilon_{\varphi\varphi}(r) - \varepsilon_{rr}(r)}{r} = 0 \quad (3.1)$$

где ρ – это плотность материала.

Пусть диск изготовлен из материала с зависимостью свойств от вида напряженного состояния. Центр диска не перемещается, т.е. $u_r(0) = 0$. На внешнем радиусе нагрузка отсутствует, т.е. $\sigma_{rr}(b) = 0$.

Поскольку связь между напряжениями и деформациями, как это видно из соотношения (2.2), нелинейная вследствие наличия параметра ξ , то необходимо использовать численные методы для нахождения напряжений и деформаций в каждой точке диска. Нелинейность обобщенных диаграмм деформирования $\varepsilon_0 \sim \sigma_0$ хорошо описывается степенной зависимостью $g(\sigma_0)$ с показателем $n = 4$ для графита и $n = 6$ для чугуна. Для функции параметра вида напряженного состояния $\lambda(\xi)$ может быть использована аппроксимация вида:

$$\lambda(\xi) = A_0 + C_1 \operatorname{arctg} \left[\frac{\xi - \xi_0}{C_2} \right] \quad (3.2)$$

Данная аппроксимация позволяет с достаточной степенью точности описать экспериментальные зависимости. Функция $\Lambda(\xi)$ определяется из соотношения (2.4). Все константы определяются из эксперимента.

На основе эффективных диаграмм деформирования конструкционного графита АРВ, представленных на рис. 2, получены следующие значения параметров: $n = 4$, $k = 2.295 \times 10^{-7}$ (МПа)⁻³, $A = 1.357 \times 10^{-4}$ (МПа)⁻¹, $B = 1.755 \times 10^{-4}$ (МПа)⁻¹, $A_0 = 2.0924$, $C_0 = 11.56$, $C_1 = 1.3$, $C_2 = 0.43$, $\xi_0 = 0.48$. Параметры функции $g(\sigma_0)$ определя-

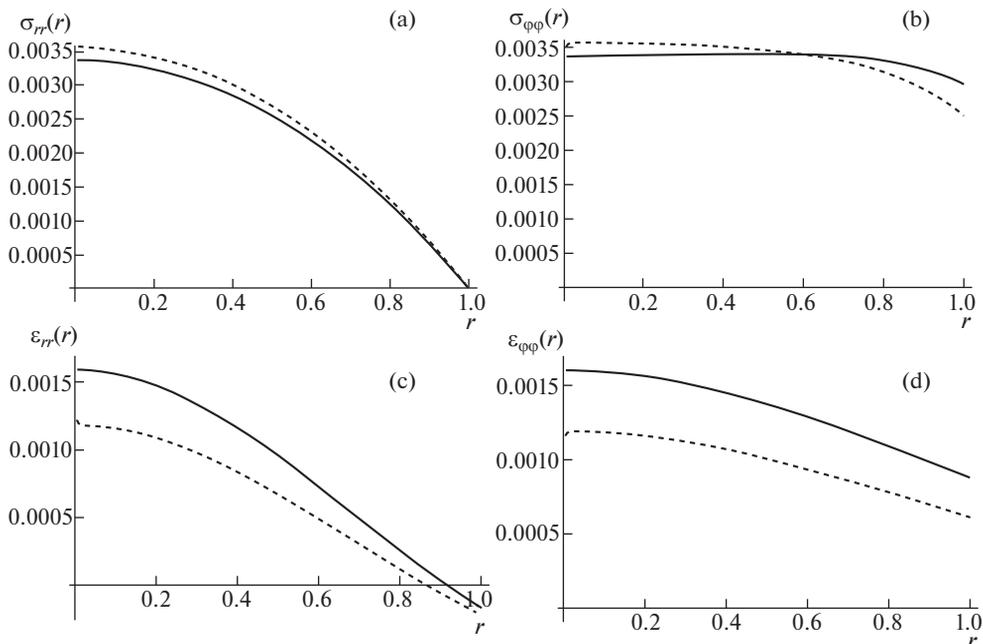


Рис. 3

лись на основе диаграммы деформирования при сдвиге, а параметры функции $\lambda(\xi)$ – по расхождению эффективных диаграмм при значении $\epsilon_0 - A\sigma_0 = 0.001$.

Используя аналогичные диаграммы деформирования для чугуна СЧ 15-32, приведенные на рис. 1, получим следующие значения параметров: $n = 6$, $k = 5.274 \times 10^{-14}$ (МПа) $^{-5}$, $A = 9.470 \times 10^{-6}$ (МПа) $^{-1}$, $B = 1.705 \times 10^{-5}$ (МПа) $^{-1}$, $A_0 = 2.9327$, $C_0 = 18.3$, $C_1 = 2.3$, $C_2 = 0.43$, $\xi_0 = 0.48$. При этом для определения параметров функции $g(\sigma_0)$ использована кривая 3, а для функции $\lambda(\xi)$ – значения напряжения σ_0 при постоянном значении $\epsilon_0 - A\sigma_0 = 0.005$.

Для проведения расчетов во всех уравнениях перейдем к безразмерным величинам, отнеся радиальную координату к внешнему радиусу диска b , а вместо напряжения введем безразмерную величину $A\sigma_{ij}$. Тогда определяющие соотношения примут вид:

$$\epsilon_{ij} = \frac{3}{2} \left[1 + \lambda(\xi) \frac{k}{A^{n-1}} \sigma_0^{n-2} \right] S_{ij} + \frac{1}{3} \left[\frac{B}{A} + \Lambda(\xi) \frac{k}{A^{n-1}} \sigma_0^{n-2} \right] \sigma \delta_{ij}, \quad (3.3)$$

где все напряжения представлены в безразмерном виде, но их обозначение сохранено.

Результаты расчетов для графита с безразмерной величиной $\rho\omega^2 = 0.01$ представлены на рис. 3,а–рис. 3,д, где сплошной линией обозначаются результаты, полученные при $C_1 \neq 0$ в функции $\lambda(\xi)$, а пунктирной – при $C_1 = 0$, т.е. для случая, когда свойства материала инвариантны к виду напряженного состояния. На рис. 3,а представлено радиальное напряжение, на рис. 3,б – окружное напряжение, на рис. 3,с представлены радиальные деформации и на рис. 3,д – окружные деформации.

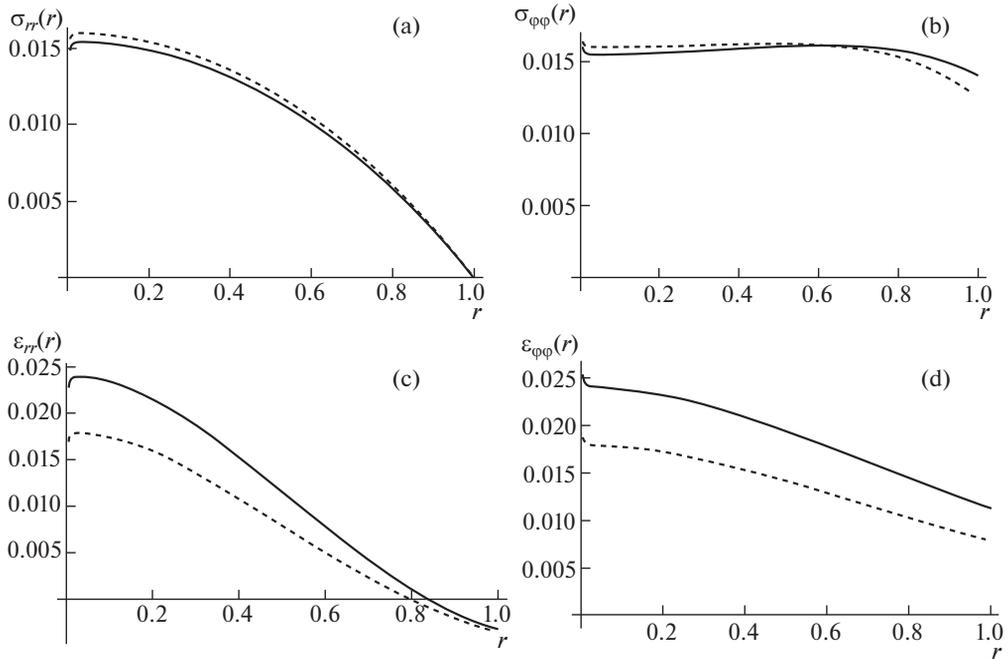


Рис. 4

Для чугуна распределения напряжений и деформаций представлены на рис. 4,а–рис. 4,д при значении безразмерной величины $\rho\omega^2 = 0.0047$. Как и для графита сплошной линией обозначаются результаты, полученные при $C_1 \neq 0$ в функции $\lambda(\xi)$, а пунктирной – при $C_1 = 0$. На рис. 4,а представлено радиальное напряжение, на рис. 4,б – окружное напряжение, на рис. 4,с представлены радиальные деформации и на рис. 4,д – окружные деформации.

Результаты расчетов свидетельствуют о том, что во вращающемся диске напряжения незначительно подвержены влиянию вида напряженного состояния по сравнению с деформациями.

4. Заключение. В работе исследованы распределения напряжений и деформаций в диске из материала с нелинейными диаграммами деформирования, зависящими от вида напряженного состояния. Проведены расчеты с использованием экспериментальных данных для серого чугуна и конструкционного графита, на основе которых можно заключить, что степень чувствительности свойств материалов к виду напряженного состояния оказывает незначительное влияние на величины напряжений в диске, но весьма существенно влияет на значения деформаций по сравнению с результатами расчетов для материала с инвариантными к виду внешних воздействий свойствами. Рассматриваемые материалы относятся к классу хрупких или полухрупких, для которых часто используются деформационные критерии прочности, поэтому данный результат имеет определенное значение.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант 20-11-20230).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Deshpande V.S., Fleck N.A.* High strain rate compressive behaviour of aluminium alloy foams // International Journal of Impact Engineering. 2000. V. 24. P. 277–298.
2. *Deshpande V.S., Fleck N.A.* Multi-axial yield behaviour of polymer foams // Acta mater. 2001. V. 49. P. 1859–1866.
3. *Sridhar I., Fleck N.A.* The multiaxial yield behaviour of an aluminium alloy foam // Journal of Materials Sciences. 2005. V. 40. P. 4005–4008.
4. *Han L.H., Elliott J.A., Benthall A.C. et al.* A modified Drucker-Prager Cap model for die compaction simulation of pharmaceutical powders // International Journal of Solids and Structures. 2008. V. 45. P. 3088–3106.
5. *Cazacu O., Stewart J.* Analytic plastic potential for porous aggregates with matrix exhibiting tension-compression asymmetry // J. Mech. Phys. Solids. 2009. V. 57. P. 325–341.
6. *Pietruszczak S., Mroz Z.* Formulation of anisotropic failure criteria incorporating a microstructure tensor // Comput. Geotech. 2000. V. 26. P. 105–112.
7. *Gao Z., Zhao J., Yao Y.* A generalized anisotropic failure criterion for geomaterials // Int. J. Solid Struct. 2010. V. 47. P. 3166–3185.
8. *Barlat F., Maeda Y., Chung K. et al.* Yield function development for aluminium alloy sheets // J. Mech. Phys. Solids. 1997. V. 45. P. 1727–1763.
9. *Soare S., Barlat F.* Convex polynomial yield functions // J. Mech. Phys. Solids. 2010. V. 58. P. 1804–1818.
10. *Lam D.C.C., Yang F., Chong A.C.M., Wang J., Tong P.* Experiments and theory in strain gradient elasticity // J. Mech. Phys. Solids. 2003. V. 51. P. 1477–1508.
11. *McFarland A.W., Colton, J.S.* Role of material microstructure in plate stiffness with relevance to microcantilever sensors // J. Micromech. Microeng. 2005. V. 15. P. 1060–1067.
12. *Sankar B.V.* An elasticity solution for functionally graded beams // Compos Sci Technol. 2001. V. 61. P. 689–696.
13. *Chakraborty A., Gopalakrishnan S., Reddy J.N.* A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials // Int J Mech Sci. 2003. V. 45. P. 519–539.
14. *Fu Y.Q., Du H.J., Zhang S.* Functionally graded TiN/TiNi shape memory alloy films // Mater Lett. 2003. V. 57. P. 2995–2999.
15. *Lee Z., Ophus C., Fischer L.M., Nelson-Fitzpatrick N., Westra K.L., Evoy S. et al.* Metallic NEMS components fabricated from nanocomposite Al–Mo films // Nanotechnology. 2006. V. 17. P. 3063–3070.
16. *Lomakin E.V., Fedulov B.N., Melnikov A.M.* Constitutive Models for Anisotropic Materials Susceptible to Loading Conditions // Mechanics and Model-Based Control of Advanced Engineering Systems, Springer-Verlag Wien. 2014. P. 209–216.
https://doi.org/10.1007/978-3-7091-1571-8_23
17. *Lomakin E.V., Fedulov B.N.* Nonlinear anisotropic elasticity for laminate composites // Meccanica. 2015. V. 50. № 6. P. 1527–1535.
18. *Liu S., Qiao H.* Topology optimization of continuum structures with different tensile and compressive properties in bridge layout design // Struct Multidiscip Optim. 2011. 43. P. 369–380.
19. *Cai K., Luo Z.J., Qin Q.H.* Topology optimization of bi-modulus structures using the concept of bone remodeling // Eng Comput. 2014. 31. P. 1361–1378.
20. *Lomakin E.V., Tretyakov M.P.* Fracture properties of graphite materials and analysis of crack growth under bending conditions // Meccanica, 2016. V. 51. № 10. P. 2353–2364.
21. *Medri G.* A Nonlinear Elastic Model for Isotropic Materials with Different Behavior in Tension and Compression // Transactions of the ASME – Journal of Engineering Materials and Technology. 1982. V. 104. P. 26–28.
22. *Амбарцумян С.А.* Разномодульная теория упругости. М.: Наука, 1982. 317 с.

23. *Jones R.M.* Buckling of circular cylindrical shells with different moduli in tension and compression // *AIAA J.* 1971. V. 9. P. 53–61.
24. *Jones R.M.* Buckling of stiffened multilayered circular cylindrical shells with different orthotropic moduli in tension and compression // *AIAA J.* 1971. V. 9. P. 917–923.
25. *Patel B.P., Khan K., Nath Y.* A new constitutive model for bimodular laminated structures: Application to free vibrations of conical/cylindrical panels // *Composite Structures.* 2014. V. 110. P. 183–191.
26. *Ye Z.M., Yu H.R., Yao W.J.* A new elasticity and finite element formulation for different Young's modulus when tension and compression loading // *J. Shanghai Univ.* 2001. V. 5. P. 89–92.
27. *Vijayakumar K., Rao K.P.* Stress–strain relation for composites with different stiffnesses in tension and compression – a new model // *Int. J. Comput. Mech.* 1987. V. 1. P. 167–175.
28. *Lomakin E.V.* Difference in the modules of composite materials // *Mech. Compos. Mater.* 1981. V. 17. № 1. P. 18–24.
29. *Lomakin E.V.* Constitutive relations of deformation theory for dilatant media // *Mech. Solids.* 1991. V. 26. № 6. P. 66–75.
30. *Belyakova T.A., Lomakin E.V.* Elastoplastic deformation of a dilatant medium subjected to a plane stress state near a crack tip // *Mech. Solids.* 2004. V. 39. № 1. P. 81–87.