ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2020, № 4, с. 34–42

УДК 539.3:534.1

ФОРМАЛИЗМ КОШИ В ТЕОРИИ АКУСТИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

© 2020 г. С. В. Кузнецов[a,b,c,*]

[a] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

[b] *Московский государственный технический университет им. Баумана, Москва, Россия*

[c] *Московский государственный строительный университет, Москва, Россия*

**e-mail: kuzn-sergey@yandex.ru*

Поступила в редакцию 20.01.2020 г.
После доработки 10.02.2020 г.
Принята к публикации 11.03.2020 г.

Для описания распространения акустических поверхностных волн в анизотропном слое вводится шестимерный комплексный формализм, осуществляется построение гамильтониана, аналога диссипативной функции Рэлея, а также экспоненциальной фундаментальной матрицы. Получены дисперсионные уравнения для многослойной пластины с различными условиями на граничных поверхностях. Даны примеры применения формализма Коши для анализа дисперсии волн Лэмба.

Ключевые слова: формализм Коши, гамильтонов формализм, волна Лэмба

DOI: 10.31857/S0572329920040078

1. Введение. Ниже излагается методика исследования распространения поверхностных акустических волн в анизотропных слоистых средах с произвольной упругой анизотропией. Основной метод – шестимерный комплексный формализм, основанный на сведении уравнений движения к нормальной форме Коши, и построение фундаментальных экспоненциальных матриц. Наряду с волнами Лэмба и Рэлея–Лэмба рассматриваются и их длинноволновые аналоги, именуемые солитоноподобными волнами.

1.1. *Волны Рэлея*. В [1] разработан математический метод и на его основе получено алгебраическое уравнение для определения скорости распространения поверхностной волны (рэлеевская волна) в изотропном упругом полупространстве с однородными граничными условиями в напряжениях. В этой же работе отмечено, что ввиду локализации энергии этих волн в небольшой зоне вблизи поверхности, рассматриваемые волны могут распространяться на значительные расстояния и играть решающую роль в переносе энергии при землетрясениях. В дальнейшем метод Рэлея был обобщен на случай анизотропных полупростанств [2–4]. Для анизотропных полупространств ставилась задача поиска так называемых “запрещенных” направлений, по которым распространение рэлеевских волн оказывалось невозможным [5–7]. Однако, в [8–11] и последующих исследованиях [12–15] была сформулирована и доказана теорема существования для релеевских волн, в соответствии с которой для любого направления в любом упруго анизотропном полупространстве рэлеевская волна существует, – таким образом, надежда на обнаружение особых направлений в анизотропных материалах, непропускающих волны Рэлея, не оправдалась.

1.2. *Волны Стоунли*. В [16] методом, разработанным в [17] для анализа поверхностных волн, распространяющихся в упругом слое, контактирующем с полупространством, решена задача о поверхностной волне на границе контактирующих между собой *изотропных* упругих полупространств. В [18—20] обнаружено, что такая поверхностная волна (названная волной Стоунли) может возникать лишь при определенных условиях, накладываемых на упругие постоянные контактирующих полупространств, причем из-за технических трудностей общие аналитические выражения условий существования такой волны для контактирующих изотропных полупространств получить не удалось. Например, в [20] исследовалась зависимость отношения констант Ламе μ_1/μ_2 от отношения плотностей ρ_1/ρ_2 контактирующих полупространств в случае, когда константы Ламе двух сред удовлетворяют специальному соотношению

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = 1 \tag{1.1}$$

В [20] было обнаружено, что при выполнении (1.1) и дополнительном, часто используемом в геомеханике, условии $\rho_1/\rho_2 = 1$, волны Стоунли могут возникать лишь в случае, когда отношение μ_1/μ_2 близко к единице. В [21] исследовались вопросы существования волн Стоунли для контактирующих упруго анизотропных полупространств и соответствующая теорема существования была доказана для некоторых частных случаев упругой анизотропии.

1.3. *Волны Лява и SH волны*. Описание волн с горизонтальной поперечной поляризацией (волны Лява), распространяющихся в упругом изотропном слое, контактирующем с изотропным полупространством, дано в [17], при этом на внешней поверхности слоя, так же как и в случае волн Рэлея, ставятся однородные условия для касательных напряжений. В [17] отмечалось, что эти волны наряду с волнами Рэлея участвуют в передаче сейсмической энергии при землятресениях и, в тех местах, где они распространяются, могут происходить еще более катастрофические разрушения, чем вызванные только волнами Рэлея. В этой же работе найдено необходимое условие, при котором эти волны могут распространяться

$$c^S_{layer} < c^S_{halfspace} \tag{1.2}$$

где $c^S_\bullet$ — соответствующие скорости распространения объемных поперечных волн. Нарушение условия (1.2) приводит к невозможности распространения волн Лява, — такие среды представляют собой барьеры для волн Лява. В [22—24] рассмотрены волны Лява и имеющие ту же поляризацию SH-волны, распространяющиеся в анизотропных слое и полупространстве с различными видами упругой анизотропии и различными условиями на свободных поверхностях. В частности, в [22, 23] показано, что условиями существования волн Лява в случае контактирующих трансверсально изотропных слоя и полупространства являются условия (1.2), в этом случае $c^S_\bullet$ — скорости объемных волн с горизонтальной поперечной поляризацией. Заметим, что из (1.2) вытекает один интересный результат: если $c^S_{halfspace} = 0$, что соответствует одиночному изотропному или трансверсально изотропному слою со свободными границами, то волна с горизонтальной поперечной поляризацией, называемая в этом случае SH-волной, распространяться не может. Заметим, что в случае многослойной среды, содержащей более одного слоя, но по-прежнему без контактирующего полупространства, SH-волны уже могут распространяться [24].

1.4. *Волны Лэмба*. В случае, если контактирующее полупространство отсутствует, а на границах одниочного слоя заданы однородные условия, возникает поверхностная волна, называемая истинной (genuine) волной Лэмба. Эта волна поляризована в сагиттальной плоскости:

$$\mathbf{x} \in \Pi_s : \mathbf{x} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) = 0 \tag{1.3}$$

где $\mathbf{n}$ – волновой вектор (вектор направления распространения волны), а $\mathbf{v}$ – вектор единичной нормали к срединной или граничной. Волны Лэмба, распространяющиеся в *изотропном* упругом слое, впервые исследовались в [25]. В случае анизотропного слоя со свободными границами, известно [26], что если слой обладает упругой симметрией, характеризуемой вектором $\mathbf{q}$ и $\mathbf{q} \parallel \mathbf{n}$, то в таком слое могут распространяться истинные волны Лэмба. Если же слой не имеет упругой симметрии, или направление распространения $\mathbf{n}$ не совпадает с направлением упругой симметрии $\mathbf{q}$, возникают обобщенные волны Лэмба, имеющие пространственную поляризацию.

1.5. *Волны Рэлея–Лэмб.* Волны Рэлея–Лэмба – еще один тип волн, которые могут возникать при сейсмической активности. Эти волны, так же как и волны Лява, распространяются в системе упругий слой (слои) – полупространство, но, в отличие от волн Лява, волны Рэлея–Лэмба поляризованы в сагиттальной плоскости. Для волн Рэлея–Лэмба поляризация аналогична волнам Лэмба: если слой и контактирующее полупространство имеют общую ось упругой симметрии, совпадающую с направлением распространения волны, то волна, называемая истинной волной Рэлея–Лэмба, поляризована в сагиттальной плоскости [27–30]. В противном случае, распространяется обобщенная волна Рэлея–Лэмба, имеющая объемную поляризацию; дисперсия волн Рэлея–Лэмба и родственные задачи рассматривались также в [31–38].

1.6. *Волны Лэмба в неоднородных средах.* В [39–41] построен модифицированный формализм Коши для анализа функционально-градиентных сред с поперечной (трансверсальной) неоднородностью. Уравнения движения в изотропных функционально-градиентных средах могут быть представлены в виде

$$\nabla\left((\lambda(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x}))\operatorname{div}\mathbf{u}(\mathbf{x},t)\right) + \operatorname{div}\left(\mu(\mathbf{x})\left(\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x},t)\right)\right) = \rho(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t)$$

где λ и μ – параметры Ламе, ρ – плотность среды, $\mathbf{u}$ – поле смещений. Осуществляя дифференцирование, в [42] уравнения движения были получены в несколько ином виде, применявшемся в [39–41]:

$$\begin{gathered}(\lambda(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x}))\nabla\operatorname{div}\mathbf{u}(\mathbf{x},t) + \mu(\mathbf{x})\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x},t) + \\ + \nabla(\lambda(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x}))\operatorname{div}\mathbf{u}(\mathbf{x},t) + \nabla\mu(\mathbf{x}) \cdot (\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x},t))^T = \rho(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t)\end{gathered}$$

где верхний индекс T означает транспозицию.

1.7. *Граничные и контактные условия для волн Лэмба.* На свободных границах внешних слоев n-слойной среды могут задаваться следующие однородные условия:

а) *в напряжениях*

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = +h_1: &\quad \mathbf{t}_1 \equiv \mathbf{v} \cdot \mathbf{C}_1 \cdot\cdot \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u}_1 = 0 \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = -h_n: &\quad \mathbf{t}_n \equiv \mathbf{v} \cdot \mathbf{C}_n \cdot\cdot \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u}_n = 0\end{aligned} \tag{1.4}$$

б) *в перемещениях*

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = +h_1: &\quad \mathbf{u}_1 = 0 \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = -h_n: &\quad \mathbf{u}_n = 0\end{aligned} \tag{1.5}$$

г) *смешанные условия*

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = +h_1: &\quad \mathbf{t}_1 \equiv \mathbf{v} \cdot \mathbf{C}_1 \cdot\cdot \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u}_1 = 0 \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = -h_n: &\quad \mathbf{u}_n = 0\end{aligned} \tag{1.6}$$

где $\mathbf{C}_k$ – соответствующие тензоры упругости, $\mathbf{u}_k$ – поля перемещений в соответствующих слоях, $2h_k$ – толщины соответствующих слоев.

На контактных поверхностях между k и $k+1$ слоями задаются условия идеального механического контакта

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_k\big|_{\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}=-h_k} &= \mathbf{t}_{k+1}\big|_{\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}=+h_{k+1}} \\ \mathbf{u}_k\big|_{\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}=-h_k} &= \mathbf{u}_{k+1}\big|_{\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}=+h_{k+1}} \end{aligned} \tag{1.7}$$

1.8. *Постановка проблемы и методы исследования*. Ниже, для среды, состоящей из нескольких анизотропных слоев, определяются условия, обеспечивающие невозможность распространения обобщенных волн Лэмба в каком-либо направлении. Для решения этой задачи применяется комбинированный метод, состоящий в построении фундаментальных экспоненциальных матриц, описывающих распространение волн Лэмба в одиночном слое, и модифицированный метод передаточных матриц (модифицированный метод Томсона–Хаскелла), использующийся для описания распространения волн в слоистых средах.

Для двухслойной среды, состоящей из анизотропных слоев, имеющих общую ось упругой симметрии, условия нераспространения истинных волн Лэмба в направлении этой оси упругой симметрии выписаны аналитически.

2. Основные соотношения. Ниже считается, что все слои однородны и линейно гиперупруги. Уравнения движения для упругой однородной анизотропной среды могут быть записаны в виде

$$\mathbf{A}(\partial_x,\partial_t)\mathbf{u} \equiv \operatorname{div}_x\mathbf{C}\cdot\cdot\nabla_x\mathbf{u} - \rho\ddot{\mathbf{u}} = 0 \tag{2.1}$$

где тензор упругости $\mathbf{C}$ предполагается положительно определенным:

$$\begin{gathered} (\mathbf{A}\cdot\cdot\mathbf{C}\cdot\cdot\mathbf{A}) \equiv \sum_{i,j,m,n} A_{ij}C^{ijmn}A_{mn} > 0, \\ \underset{\mathbf{A}\in\operatorname{sym}(R^3\otimes R^3),\mathbf{A}\neq 0}{\forall\mathbf{A}} \qquad \operatorname{sym}\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{A}^t) \end{gathered} \tag{2.2}$$

Замечание 2.1. В случае изотропной упругой среды условие положительной определенности (2.2) эквивалентно

$$\mu > 0, \quad \lambda > -\frac{2}{3}\mu$$

где λ и μ – константы Ламе.

Следуя подходу [30, 35], рассмотрим представление для волны Лэмба, распространяющейся в слое с произвольной упругой анизотропией, в виде:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) \equiv \mathbf{f}(x'')e^{ir(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}-ct)} \tag{2.3}$$

где r – волновое число; $\mathbf{n}$ – волновой вектор (единичной длины), задающий направление распространения волны; c – фазовая скорость; $x'' = ir(\mathbf{v}\cdot\mathbf{x})$ – безразмерная мнимая переменная; $\mathbf{f}$ – неизвестная векторная функция, определяющая изменение амплитуды на волновом фронте. Подставляя выражение (2.3) в уравнение (2.1), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции $\mathbf{f}$. Это уравнение известно как уравнение Кристоффеля для волны Лэмба

$$-r^2(\mathbf{A}\partial_{x''}^2 + \mathbf{B}\partial_{x''} + \mathbf{D})\cdot\mathbf{f} = 0 \tag{2.4}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{v}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{n} + \mathbf{n}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{v}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{n} - \rho c^2\mathbf{I} \tag{2.5}$$

В (2.5) $\mathbf{I}$ – единичная диагональная 3×3-матрица. Для последующего анализа редуцируем уравнение (2.4) к матричному ОДУ первого порядка, введя вспомогательную функцию

$$\mathbf{w} = \partial_{x''}\mathbf{f} \tag{2.6}$$

С учетом этой функции уравнение (2.4) примет вид

$$\partial_{x''}\begin{pmatrix}\mathbf{f}\\ \mathbf{w}\end{pmatrix} = \mathbf{G}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{f}\\ \mathbf{w}\end{pmatrix} \tag{2.7}$$

где якобиан **G** представляет собой матрицу шестого порядка:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{I}\\ -\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{D} & -\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}\end{pmatrix} \tag{2.8}$$

причем

$$\det(\mathbf{G}) = \det(\mathbf{D})\cdot\det{}^{-1}(\mathbf{A}) \tag{2.9}$$

В правой части (2.8) **0** – нулевая 3 × 3-матрица. С помощью якобиана (2.8) общее решение уравнения (2.7) можно представить в виде:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{f}\\ \mathbf{w}\end{pmatrix}_0 = e^{ir(\mathbf{x}\cdot\mathbf{v})\mathbf{G}}\cdot\vec{C} \tag{2.10}$$

где $\vec{C}$ – шестимерный и, вообще говоря, комплексный вектор, определяемый с точностью до скалярного множителя из граничных или контактных условий. С учетом (2.10) решение уравнения движения (2.1) для поверхностной волны в слое может быть представлено в виде

$$\begin{pmatrix}\mathbf{u}(\mathbf{x},t)\\ \mathbf{z}(\mathbf{x},t)\end{pmatrix} = (e^{ir(\mathbf{x}\cdot\mathbf{v})\mathbf{G}}\cdot\vec{C})e^{ir(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}-ct)} \tag{2.11}$$

В левой части (2.10) $\mathbf{z}(\mathbf{x},t) = \mathbf{w}(x'')e^{ir(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}-ct)}$.

Замечания 2.2. а) Представление (2.10) остается справедливым и в случае неполупростого вырождения матрицы **G**, т.е. при наличии жордановых блоков в канонической нормальной форме матрицы **G**, см. [30, 35, 37].

б) В теории поверхностных волн уравнения движения в форме уравнения второго порядка (2.4) весьма часто сводят к системе уравнений первого порядка. При этом в зависимости от выбора вспомогательной функции **w**, различают несколько эквивалентных представлений уравнений движения (2.4) в форме системы шести обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Из этих представлений наиболее широко применяется представление (формализм) Штро (Stroh) [4, 37, 38], в котором вспомогательная функция **w** принимается в виде

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}\cdot\partial_{x''}\mathbf{f} + \mathbf{F}\cdot\mathbf{f} \tag{2.12}$$

где **A** – матрица, определенная в (2.5), а **F** определяется следующим выражением

$$\mathbf{F} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{n} \tag{2.13}$$

В случае представления (2.12) функция **w** с точностью до множителя $ir\,e^{ir(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}-ct)}$ совпадает с усилиями на плоскостях $\mathbf{v}\cdot\mathbf{x} = \mathrm{const}$.

3. Метод передаточных матриц. Контактные граничные условия (1.7) на граничных плоскостях k-го слоя могут быть выражены через соответствующий шестимерный вектор коэффициентов $\vec{C}_k$ по формулам (2.10)–(2.12):

$$\mathbf{M}_k^{\pm}\cdot\vec{C}_k = \begin{pmatrix}\mathbf{u}_k(\pm h_k)\\ \mathbf{t}_k(\pm h_k)\end{pmatrix} \tag{3.1}$$

где

$$\mathbf{M}_k^{\pm} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \pm\mathbf{F}_k & \pm\mathbf{A}_k \end{pmatrix} \cdot e^{\pm ir\mathbf{G}_k h_k} \tag{3.2}$$

Знаки $\pm$ перед матрицами $\mathbf{F}_k$ и $\mathbf{A}_k$ в правой части (3.2) отвечают ориентации внешней нормали к соответственно “верхней” и “нижней” граничным плоскостям k-го слоя.

Следуя [31, 32], будем называть $\mathbf{M}_k^{\pm}$ передаточными матрицами. При любых $r > 0$ и любых гиперупругих средах, удовлетворяющих условию (2.2), передаточные матрицы (3.2) невырождены:

$$\det(\mathbf{M}_k^{\pm}) \neq 0 \tag{3.3}$$

Поскольку $e^{\pm ir\mathbf{G}_k h_k} \neq 0$, для доказательства (3.3) достаточно установить невырожденность следующей матрицы

$$\det\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \pm\mathbf{F}_k & \pm\mathbf{A}_k \end{pmatrix} = \det\left(\pm\mathbf{A}_k\right) \neq 0 \tag{3.4}$$

неравенство в (3.4) вытекает из выражения (2.5) для акустического тензора $\mathbf{A}_k$, невырожденного в силу условий (2.2).

Комбинация передаточных матриц (3.2) позволяет выразить усилия и перемещения на “нижней” граничной плоскости n-го слоя, через граничные условия на “верхней” поверхности первого слоя:

$$\mathbf{N} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1(+h_1) \\ \mathbf{t}_1(+h_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_n(-h_n) \\ \mathbf{t}_n(-h_n) \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

где $\mathbf{N}$ – результирующая передаточная матрица, представляющая собой композицию передаточных матриц $\mathbf{M}_k^{\pm}$:

$$\mathbf{N} = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{M}_k^{-} \cdot (\mathbf{M}_k^{+})^{-1} \tag{3.6}$$

Из (3.3), (3.6) вытекает

$$\det\left(\mathbf{N}\right) \neq 0 \tag{3.7}$$

Результирующая передаточная матрица $\mathbf{N}$ может быть представлена в виде блочной матрицы

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 \\ \mathbf{N}_3 & \mathbf{N}_4 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

где $\mathbf{N}_p$, $p = 1,\ldots,4$ квадратные 3×3-матрицы.

С учетом (3.8) условия (3.5) приобретают вид

$$\begin{pmatrix} \mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{u}_1(+h_1) + \mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{t}_1(+h_1) \\ \mathbf{N}_3 \cdot \mathbf{u}_1(+h_1) + \mathbf{N}_4 \cdot \mathbf{t}_1(+h_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_n(-h_n) \\ \mathbf{t}_n(-h_n) \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

4. Общие условия существования (обобщенных) волн Лэмба. В этом разделе приводятся дисперсионные соотношения для пластин с различными условиями закрепления.

4.1. *Пластина со свободными внешними граничными поверхностями.* В этом случае усилия на внешних поверхностях равны нулю, тогда уравнение (3.9) трансформируется к виду

$$\begin{pmatrix} \mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{u}_1(+h_1) \\ \mathbf{N}_3 \cdot \mathbf{u}_1(+h_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_n(-h_n) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

Из (4.1) получаем условие существования для волны Лэмба

$$\det(\mathbf{N}_3) = 0 \tag{4.2}$$

Действительно, если при каком-либо r матрица $\mathbf{N}_3$ вырожденная, то однородные условия в напряжениях на “нижней” поверхности слоя удовлетворяются при $\mathbf{u}_1(+h_1) \neq 0$ и $\mathbf{u}_1(+h_1) \in \ker(\mathbf{N}_3)$, но это означает, что существует обобщенная волна Лэмба.

4.2. *Пластина с защемленными внешними граничными поверхностями.* В этом случае перемещения на внешних поверхностях равны нулю и уравнение (3.9) приобретает вид

$$\begin{pmatrix} \mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{t}_1(+h_1) \\ \mathbf{N}_4 \cdot \mathbf{t}_1(+h_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{t}_n(-h_n) \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

Из (4.3) получаем условие существования:

$$\det(\mathbf{N}_2) = 0 \tag{4.4}$$

4.3. *Пластина со смешанными условиями* (1.6) *на внешних граничных поверхностях.* В этом случае усилия на “верхней” поверхности равны нулю, а на “нижней” поверхности равны нулю перемещения и уравнение (3.9) приобретает вид

$$\begin{pmatrix} \mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{u}_1(+h_1) \\ \mathbf{N}_3 \cdot \mathbf{u}_1(+h_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{t}_n(-h_n) \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

По аналогии с предыдущим, из (4.5) получаем следующее условие существования:

$$\det(\mathbf{N}_1) = 0 \tag{4.6}$$

5. Заключительные замечания. Приведен обзор и анализ исследований по применению шестимерного комплексного формализма Коши для описания распространения акустических поверхностных волн в анизотропном упругом слое с анизотропией общего вида.

Показано, что в основе формализма Коши лежит сведение гиперболических уравнений второго порядка к системе шести (гиперболических) уравнений первого порядка. Далее, осуществляется построение гамильтониана, являющегося аналогом диссипативной функции Рэлея. На последнем этапе в формализме Коши осуществляется построение экспоненциальной фундаментальной матрицы. Таким образом, удается получить дисперсионные уравнения как для гомогенного анизотропного слоя, так и для стратифицированной пластины с различными условиями на граничных поверхностях.

В статье отмечены обобщения формализма Коши для получения дисперсионных соотношений волн Лэмба в функционально-градиентных средах с непрерывной трансверсальной неоднородностью; см. [39–41]. Поверхностные акустические волны в стержнях рассмотрены в [43, 44].

Благодарность. Автор благодарит Российский фонд фундаментальных исследований (гранты 20-08-00419, 18-58-41001 и 19-01-00100) за частичную финансовую поддержку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Strutt J.W.* (Lord Rayleigh) On wave propagating along the plane surface of an elastic solid // Proc. London Math. Soc. 1885. V. 17. P. 4–11.
2. *Synge J.L.* Elastic waves in anisotropic media // J. Math. Phys. 1956. V. 35. P. 323–334.
3. *Stoneley R.* The propagation of surface elastic waves in a cubic crystal // Proc. Roy. Soc. 1955. A232. P. 447–458.
4. *Stroh A.N.* Steady state problems in anisotropic elasticity // J. Math. Phys. 1962. V. 41. P. 77–103.
5. *Lim T.C., Farnell G.W.* Search for forbidden directions of elastic surface-wave propagation in anisotropic crystals // J. Appl. Phys. 1968. V. 39. P. 4319–4325.
6. *Lim T.C., Farnell G.W.* Character of pseudo surface waves on anisotropic crystals // J. Acoust. Soc. Amer. 1969. V. 45. P. 845–851.
7. *Farnell G.W.* Properties of elastic surface waves // Phys. Acoust. 1970. V. 6. P. 109–166.
8. *Barnett D.M., Lothe J.* Synthesis of the sextic and the integral formalism for dislocations. Green's functions. and surface waves in anisotropic elastic solids // Phys. Norv. 1973. V. 7. P. 13–19.
9. *Barnett D.M., Lothe J.* Consideration of the existence of surface wave (Rayleigh wave) solutions in anisotropic elastic crystals. J. Phys. Ser. F. 1974. 4. P. 671–678.
10. *Barnett D.M., Lothe J.* An image force theorem for dislocations in anisotropic bicrystals // J. Phys. Ser. F. 1974. V. 4. P. 1618–1635.
11. *Lothe J., Barnett D.M.* On the existence of surface wave solutions for anisotropic elastic half-spaces with free surface // J. Appl. Phys. 1976. V. 47. P. 428–433.
12. *Chadwick P., Smith G.D.* Foundations of the theory of surface waves in anisotropic elastic materials // Adv. Appl. Mech. 1977. V. 17. P. 303–376.
13. *Chadwick P., Jarvis D.A.* Surface waves in a prestressed elastic body // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1979. V. 366. P. 517–536.
14. *Chadwick P., Ting T.C.T.* On the structure and invariance of the Barnett-Lothe tensors // Quart. Appl. Math. 1987. V. 45. P. 419–427.
15. *Gunderson S.A., Barnett D.M., Lothe J.* Rayleigh wave existence theory: a supplementary remark // Wave Motion. 1987. V. 9. P. 319–321.
16. *Stoneley R.* Elastic waves at the surface of separation of two solids // Proceedings of the Royal Society (London) 1924. V. A106. P. 416–428.
17. *Love A.E.H.* Some Problems of Geodynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 1911. P. 165–178.
18. *Sezawa K., Kanai K.* The range of possible existence of Stoneley waves and some related problems // Bull. Earthquake Research Inst. (Tokyo). 1939. V. 17. P. 1–8.
19. *Cagniard L.* Reflexion et refraction des ondes seismique progressive (These). Paris: Gauthier-Villars & Cie, 1939.
20. *Scholte J.G.* The range of existence of Rayleigh and Stoneley waves // Monthly Notices Roy. Astron. Soc.: Geogphys. Suppl. 1947. V. 5. P. 120–126.
21. *Chadwick P., Borejko P.* Existence and uniqueness of Stoneley waves // Geophys. J. Int. 1994. V. 118. P. 279–284.
22. *Sengupta P.R., Nath S.* Surface waves in fiber-reinforced anisotropic elastic media // Sadhana. 2001. V. 26. P. 363–370.
23. *Кузнецов С.В.* Волны Лява в моноклинных средах // ПММ. 2006. Т. 70. № 1. С. 141–154.
24. *Kuznetsov S.V.* SH-waves in laminated plates // Quarterly of Applied Mathematics. 2006. V. 64. P. 153–165.
25. *Lamb H.* On waves in an elastic plate // Proc. Roy. Soc. 1917. V. A93. P. 114–128.
26. *Liu G.R., Tani J., Watanabe K., Ohyoshi T.* Lamb wave propagation in anisotropic laminates // J. Appl. Mech. 1990. V. 57. P. 923–929.
27. *Lin W., Keer L.M.* A study of Lamb waves in anisotropic plates // J. Acoust. Soc. Amer. 1992. V. 92. P. 888–894.
28. *Guo N., Cawley P.* Lamb wave propagation in composite laminates and its relationship with acousto-ultrasonics // NDT & E Int. 1993. V. 26. P. 75–84.
29. *Chimenti D.E.* Lamb waves in microstructured plates // Ultrasonics. 1994. V. 32. P. 255–260.

30. *Kuznetsov S.V.* Subsonic Lamb waves in anisotropic plates // Quart. Appl. Math. 2002. V. 60. P. 577–587.
31. *Thomson W.T.* Transmission of elastic waves through a stratified solid medium // J. Appl. Phys. 1950. V. 21. № 2. P. 89–93.
32. *Haskell N.A.* Dispersion of surface waves on multilayered media // Bull. Seismol. Soc. America. 1953. V. 43. № 1. P. 17–34.
33. *Knopoff L.* A matrix method for elastic wave problems // Bull. Seismol. Soc. America. 1964. V. 54. № 1. P. 431–438.
34. *Mal A.K., Knopoff L.* A Differential equation for surface waves in layers with varying thickness // J. Math. Anal. Appl. 1968. V. 21. № 2. P. 431–441.
35. *Kuznetsov S.V.* Surface waves of non-Rayleigh type // Quart. Appl. Math. 2003. V. 61. № 3. P. 575–582.
36. *Meier C.D.* Matrix Analysis and Applied Linear Algebra. SIAM. 2002.
37. *Ting T.C.T.* Anisotropic elasticity: theory and applications. N.Y.: Oxford University Press, 1996.
38. *Ting T.C.T.* A modified Lekhnitskii formalism a la Stroh for anisotropic elasticity and classifications of the 6X6 matrix N // Proc. Roy. Soc. London. 1999. V. A455. P. 69–89.
39. *Kuznetsov S.V.* Lamb waves in functionally graded plates with transverse inhomogeneity // Acta Mechanica. 2018. V. 229. P. 4131–4139.
40. *Kuznetsov S.V.* Cauchy formalism for Lamb waves in functionally graded plates // JVC/Journal of Vibration and Control. 2019. V. 25(6). P. 1227–1232.
41. *Kuznetsov S.V.* Abnormal dispersion of flexural Lamb waves in functionally graded plates // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 2019. V. 70(89). P. 1–10.
42. *Gurtin M.E.* The Linear Theory of Elasticity. In: Handbuch der Physik. V. VIa/2. Berlin: Springer-Verlag, 1976. P. 1–296.
43. *Мокряков В.В.* Максимумы напряжений в продольных волнах Похгаммера–Кри // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 5. С. 86–103.
44. *Ilyashenko A.V.* Pochhammer-Cree Longitudinal Waves: Anomalous Polarization // Mechanics of Solids. 2019. V. 54. P. 598–606.