ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2020, № 2, с. 142–146

УДК 539.311

КРУЧЕНИЕ С КРУГОВЫМ СДВИГОМ МАТЕРИАЛА МУНИ–РИВЛИНА

© 2020 г. Г. М. Севастьянов

Хабаровский федеральный исследовательский центр ДВО РАН, Комсомольск-на-Амуре, Россия

e-mail: akela.86@mail.ru

Поступила в редакцию 30.05.2018 г.
После доработки 30.08.2019 г.
Принята к публикации 08.10.2019 г.

Рассматривается осесимметричное кручение слоя несжимаемого материала Муни–Ривлина, заключенного между двумя жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями. Полагается, что торцы цилиндра закреплены от осевых смещений, а сечения, ортогональные оси симметрии, не искривляются при деформировании. В таком случае движение материальных точек происходит по дугам окружностей с угловой скоростью, которая в общем случае может зависеть как от осевой, так и от радиальной координаты. В замкнутой форме получен интеграл уравнения равновесия, частным случаем которого является известное решение Ривлина. Как и для классического решения, тензор напряжений оказывается функцией только радиальной координаты, а угол кручения материальных точек – линейной функцией осевой координаты. Показано, что кручение, симметричное относительно плоскости, ортогональной оси вращения, может быть реализовано только в рамках решения Ривлина. Найденное в работе напряженное состояние может существовать при наличии трения на цилиндрических поверхностях. Рассмотрена начально-краевая задача, описываемая полученным точным решением.

Ключевые слова: кручение, сдвиг, материал Муни–Ривлина, нелинейная упругость, точное решение, полый цилиндр

DOI: 10.31857/S0572329920020129

В цилиндрических телах могут быть реализованы три типа осесимметричных сдвиговых деформаций: кручение, антиплоский (продольный) сдвиг и азимутальный (круговой) сдвиг. Любая их комбинация представляет собой изохорную деформацию. Из этих трех типов сдвига только простое кручение может быть реализовано в любом нелинейно-упругом несжимаемом материале [1]. Соответствующее универсальное решение получено Ривлином [2].

Кручение является одной из наиболее изученных задач механики деформируемого твердого тела [3]. Так, в теории упруго-пластических задач с конечными деформациями задача о кручении представляет собой редкий пример, когда удается получить точное решение [4, 5]. Отметим также публикацию [6], где рассматривается кручение, отличное от простого (случай нелинейной зависимости угла кручения от осевой координаты), для некоторых специальных видов функции упругой энергии.

Из трех возможных вариантов совместного действия двух сдвигов наибольшее внимание исследователей получил так называемый “винтовой сдвиг” (антиплоская деформация с азимутальным сдвигом). Упомянем здесь работы [7–9]. В работе [7] рассмотрен винтовой сдвиг материала с невыпуклой функцией энергии деформации, в работе [8] решена та же задача для различных обобщений неогукова материала с упрочнением, в работе [9] проведено сравнение поведения материалов с линейным и нелинейным откликом на чистый сдвиг.

Остальные две комбинации сдвигов изучены гораздо меньше. Можно лишь утверждать, что для материала Муни—Ривлина комбинация кручения с антиплоским сдвигом не может быть реализована в статике. Наложение азимутального сдвига на простое кручение рассматривается в настоящей работе, по всей видимости, впервые.

1. Определяющие уравнения. Будем пренебрегать массовыми силами и рассматривать квазистатический процесс деформирования, для которого

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \tag{1.1}$$

здесь ∇ — оператор Гамильтона, $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор действительных напряжений Коши, для которого примем потенциальное соотношение

$$\boldsymbol{\sigma} = -P\mathbf{1} - 2\frac{\partial W}{\partial \mathbf{g}}\mathbf{g} \tag{1.2}$$

здесь P — функция добавочного давления, $\mathbf{1}$ — единичный тензор.
Энергию упругого деформирования W нелинейно-упругой несжимаемой изотропной среды зададим в форме двухконстантного потенциала Муни—Ривлина [10, 11]

$$W = c_1\left(I_2(\mathbf{g}) - 3\right) + c_2\left(I_1(\mathbf{g}) - 3\right) \tag{1.3}$$

где эйлеров тензор $\mathbf{g} = (\mathbf{1} - \nabla \otimes \mathbf{u})(\mathbf{1} - \nabla \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{T}}$ — мера деформаций Альманси, $I_1(\mathbf{g}) = \mathrm{tr}(\mathbf{g})$, $2I_2(\mathbf{g}) = \mathrm{tr}^2(\mathbf{g}) - \mathrm{tr}(\mathbf{g}^2)$ — линейный и квадратичный инварианты $\mathbf{g}$, $c_1, c_2 \geq 0$ — константы материала, $\mathbf{u}$ — вектор перемещений в актуальной конфигурации.

Будем рассматривать слой материала, заключенный между жесткими цилиндрическими поверхностями, который испытывает вращение вокруг оси симметрии. Введем цилиндрическую систему координат с тройкой единичных базисных векторов $\mathbf{e_r}$, $\mathbf{e_\varphi}$, $\mathbf{e_z}$, начало которой лежит на оси вращения. При кручении цилиндров произвольного профиля происходит искривление и депланация изначально плоских сечений. Кручение стержня кругового профиля вокруг оси, совпадающей с осью симметрии, является единственным для изотропных материалов случаем, когда такого искривления не происходит. Торцы цилиндра закреплены от осевых смещений, тогда связь координат (r, φ, z) материальных точек в актуальной конфигурации с координатами (R, θ, Z) этих же точек в отсчетной конфигурации задается соотношениями

$$r = R, \quad \varphi = \theta + \Psi(r, z, t), \quad z = Z \tag{1.4}$$

Здесь t — время или иной параметр нагружения. Частный случай $\Psi(r, z, t) = B(t)z$ соответствует простому кручению.

Тогда вектор перемещений имеет вид $\mathbf{u} = r(1 - \cos\Psi)\mathbf{e_r} + r\sin\Psi\mathbf{e_\varphi}$, а компоненты тензора меры деформаций Альманси имеют следующее представление

$$\begin{gathered}
g_{rr} = 1 + \left(r\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right)^2, \quad g_{\varphi\varphi} = 1, \quad g_{zz} = 1 + \left(r\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2 \\
g_{r\varphi} = -r\frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad g_{\varphi z} = -r\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad g_{rz} = r^2\frac{\partial \Psi}{\partial r}\frac{\partial \Psi}{\partial z}
\end{gathered} \tag{1.5}$$

Обозначим $p = 2c_1 - 2c_2 - P - 2c_1 I_2(\mathbf{g})$, тогда из (1.2) и (1.3) следует

$$\boldsymbol{\sigma} = (p - 2c_1 + 2c_2)\mathbf{1} + 2c_1\mathbf{g}^{-1} - 2c_2\mathbf{g}.$$

Компоненты тензора Коши с учетом (1.5) принимают вид

$$\sigma_{rr} = p - 2c_2\left(r\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)^2, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = p + 2c_1\left(r\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)^2 + 2c_1\left(r\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2$$
$$\sigma_{zz} = p - 2c_2\left(r\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2, \quad \sigma_{r\varphi} = 2(c_1 + c_2)r\frac{\partial\Psi}{\partial r} \tag{1.6}$$
$$\sigma_{\varphi z} = 2(c_1 + c_2)r\frac{\partial\Psi}{\partial z}, \quad \sigma_{rz} = -2c_2 r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\frac{\partial\Psi}{\partial z}$$

Уравнение (1.1) с учетом (1.4) приводит к системе

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z} = 0 \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial r} + 2\frac{\sigma_{r\varphi}}{r} + \frac{\partial\sigma_{\varphi z}}{\partial z} = 0 \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \tag{1.9}$$

Из уравнения (1.8) с учетом (1.6) следует

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} = -\frac{3}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} \tag{1.10}$$

С учетом выражения (1.10) уравнение (1.9) интегрируется относительно неизвестной функции добавочного давления:

$$p = \Phi + c_2 r^2\left(\left(\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2\right) \tag{1.11}$$

здесь $\Phi = \Phi(r,t)$ – произвольная функция.

Уравнение (1.7) с учетом выражения $\partial p/\partial r$, полученного из (1.11), принимает вид

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} = 2r\left(\left(\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)^2(c_1 + 2c_2) + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2(c_1 - c_2)\right) + 2c_2 r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right)$$

а с учетом (1.10):

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} = 2r(c_1 - c_2)\left(\left(\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2\right) \tag{1.12}$$

Тогда из (1.11) и (1.12) следует

$$p = \Phi + \frac{1}{2}\frac{c_2}{c_1 - c_2}r\frac{\partial\Phi}{\partial r}$$

и $\partial p/\partial z = 0$, напряженное состояние одномерное, зависит только от радиальной координаты. Отметим, что этим же свойством обладают все универсальные решения нелинейной теории упругости [11].

Нелинейное дифференциальное уравнение (1.12) относительно $\Psi(r,z,t)$ имеет точное решение [12]

$$\Psi = A \pm Bz \pm \int\left(\frac{1}{2(c_1 - c_2)}\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} - B^2\right)^{1/2} dr \tag{1.13}$$

где $A = A(t)$, $B = B(t) \geq 0$ – константы интегрирования, выбор знаков независим и произволен.

Уравнение (1.10) с учетом (1.13) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции $\Phi(r,t)$, в которое время t входит как параметр. Его решение есть

$$\Phi = \Phi_0 + (c_1 - c_2)\left((Br)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{C}{r}\right)^4\right)$$

где $C = C(t)$ – константа интегрирования.

Тогда решением уравнения равновесия (1.1) являются функции

$$p = \Phi_0 + c_1(Br)^2 + \frac{3c_2 - c_1}{2}\left(\frac{C}{r}\right)^4$$
$$\Psi = A \pm Bz \mp \frac{1}{2}\left(\frac{C}{r}\right)^2 \tag{1.14}$$

При $C(t) = 0$ (1.14) совпадает с универсальным решением Ривлина.

2. Краевая задача. Отметим некоторые особенности полученного решения. При $C(t) \neq 0$ скрутка Ψ не может быть тождественна нулю на каком-либо сечении $z = \mathrm{const}$. В этом случае кручение, симметричное относительно плоскости, ортогональной оси z, недоступно для рассмотрения с помощью решения (1.14). Далее, касательное напряжение $\sigma_{r\varphi} = 2(c_1 + c_2)r\,\partial\Psi/\partial r = \pm 2(c_1 + c_2)(C/r)^2$ отлично от нуля и сохраняет знак при $r \in [r_0, r_1]$, r_0, r_1 – внутренний и внешний радиусы цилиндра. Таким образом, случай свободных цилиндрических поверхностей также исключен.

Описываемая решением (1.14) краевая задача может быть поставлена в следующем виде. Пусть полый цилиндр из эластомера жестко закреплен по ободу $z = 0$, $r = r_1$. На внутренней поверхности цилиндра задан контакт в виде закона сухого трения с неподвижным сердечником, коэффициент трения скольжения на этой контактной поверхности равен k_0. Внешняя цилиндрическая поверхность контактирует с оболочкой, жестко связанной с ободом $z = h$, $r = r_1$, здесь h – высота цилиндра. Коэффициент трения скольжения в этой паре равен k_1. Пусть оболочке сообщен поворот в положительном направлении отсчета угла φ на величину α относительно начального состояния. Тогда $\partial\Psi/\partial z > 0$, $\partial\Psi/\partial r > 0$ и знаки в (1.14) должны быть выбраны так, что $\Psi = A + Bz - (C/r)^2/2$. При этом константы интегрирования должны удовлетворять условиям $A = (C/r_1)^2/2$, $B = \alpha/h$.

Условия сухого трения на контактных поверхностях $\sigma_{r\varphi}(r_0) = -k_0\sigma_{rr}(r_0)$ и $\sigma_{r\varphi}(r_1) = -k_1\sigma_{rr}(r_1)$ приводят к идентификации оставшихся констант:

$$\Phi_0 = \frac{c_1 + c_2}{2}\left(\frac{C}{r_0}\right)^4 - 2\frac{c_1 + c_2}{k_0}\left(\frac{C}{r_0}\right)^2 - c_1\left(\frac{\alpha}{h}\right)^2 r_0^2 \tag{2.1}$$

$$C^2 = \lambda \geq 0, \quad \lambda^2 - 4\lambda\frac{k_1 r_1^2 - k_0 r_0^2}{r_1^4 - r_0^4}\frac{r_0^2 r_1^2}{k_0 k_1} + 2\frac{c_1}{c_1 + c_2}\left(\frac{\alpha}{h}\right)^2\frac{r_0^4 r_1^4}{r_1^2 + r_0^2} = 0 \tag{2.2}$$

Отметим, что согласно (2.2) указанное решение будет существовать вплоть до предельного угла поворота $\alpha_{\max}$, который определяется равенством

$$\alpha_{\max} = \frac{k_1 r_1^2 - k_0 r_0^2}{k_0 k_1 (r_1^2 - r_0^2)} \left(\frac{2h^2}{r_1^2 + r_0^2} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{c_2}{c_1} \right)^{1/2}.$$

Другим ограничением, обеспечивающим существование решения, является соотношение $\left(r_1/r_0\right)^2 \geq k_0/k_1$. Согласно (1.14), (2.1), (2.2) в начальном состоянии ($\alpha = 0$) тело свободно от напряжений.

Работа выполнена в рамках государственного задания ХФИЦ ДВО РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ericksen J.L.* Deformations possible in every isotropic, incompressible, perfectly elastic body // ZAMP. 1954. V. 5 (6). P. 466–489.
2. *Rivlin R.S.* Large elastic deformations of isotropic materials. VI. Further results in the theory of torsion, shear and flexure // Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. 1949. V. 242 (845). P. 173–195.
3. *Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л.* Кручение упругих тел. М.: Физматлит, 1963. 686 с.
4. *Арутюнян Н.Х., Радаев Ю.Н.* Упругопластическое кручение цилиндрического стержня при конечных деформациях // ПММ. 1989. Т. 53 (6). С. 1014–1022.
5. *Севастьянов Г.М., Буренин А.А.* О больших деформациях при кручении несжимаемого упругопластического цилиндра // Докл. АН. 2018. Т. 482 (3). С. 285–287.
6. *Warne D.A., Warne P.G.* Torsion in nonlinearly elastic incompressible circular cylinders // Int. J. Non-Linear Mech. 2016. V. 86. P. 158–166.
7. *Fosdick R.L., MacSithigh G.* Helical shear of an elastic, circular tube with a non-convex stored energy // In: The Breadth and Depth of Continuum Mechanics: A Collection of Papers Dedicated to J.L. Ericksen on His Sixtieth Birthday. Springer, Berlin, Heidelberg. 1986. P. 31–53.
8. *Horgan C.O., Saccomandi G.* Helical shear for hardening generalized neo-Hookean elastic materials // Math. & Mech. Sol. 2003. V. 8 (5). P. 539–559.
9. *Жуков Б.А.* Нелинейное взаимодействие конечного продольного сдвига и конечного кручения втулки из резиноподобного материала // Изв. РАН. МТТ. 2015. № 3. С. 127–135.
10. *Mooney M.* A theory of large elastic deformation // J. Appl. Phys. 1940. V. 11. P. 582–592.
11. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
12. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of nonlinear partial differential equations. Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton–London, 2012. 1840 p.