ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2020, № 2, с. 147–158

УДК 62-50

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПОСТОЯННОГО УПРАВЛЕНИЯ С УПРЕЖДЕНИЕМ И ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В ЗАДАЧЕ ЗАЩИТЫ ОБЪЕКТА ОТ УДАРА НА ПОДВИЖНОМ ОСНОВАНИИ

© 2020 г. В. А. Корнеев

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
e-mail: korneev@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 22.08.2019 г.
После доработки 04.09.2019 г.
Принята к публикации 10.09.2019 г.

Рассмотрена задача о построении гарантирующего момента начала заданного управления для противоударного изолятора, защищающего объект на подвижном основании от ударов, которым может подвергаться основание. Начальный момент управления может как опережать момент начала возмущения (упреждение), так и отставать от него (запаздывание). Предполагается, что форма ударного воздействия неизвестна, но его длительность задана и ускорение основания описывается знакопостоянной функцией времени с заданным интегралом. В качестве ограниченного по величине управления, действующего между основанием и защищаемым объектом, было взято постоянное управление заданной длительности, полученное ранее для мгновенного удара для задачи без упреждения. Минимизируемым критерием качества выбрано максимальное смещение объекта относительно основания. Проведено сравнение по значению критерия качества предлагаемой оптимизации по моменту начала управления с другими способами управления, в частности, с оптимальным решением с одним переключением.

Ключевые слова: противоударная изоляция, оптимальное управление, гарантирующее упреждающее управление, запаздывание, наихудшие возмущения

DOI: 10.31857/S0572329920020087

Введение. Работа посвящена рассмотрению наиболее простого метода управления противоударным изолятором с наихудшими возмущениями. Рассматривается система с одной степенью свободы, состоящая из основания (базы) и расположенного на ней защищаемого объекта. Воздействие на основание характеризуется заданием ее ускорения и описывается функцией времени. Основание и защищаемый объект движутся вдоль одной прямой линии, и управляющая сила, создаваемая изолирующим устройством между основанием и объектом, ограничена по величине. В работах [1–3] ставилась задача о минимизации максимума модуля смещения объекта относительно основания при заданном возмущении. Основы теории оптимальной противоударной изоляции развивались в [4–7]. Возможности изоляции объекта, расположенного на подвижном основании, от кратковременных ударных воздействий с помощью активного изолятора с управлением без упреждения изучались в [8]. В [8] получена максимально возможная длительность возмущения ниже которой оптимально постоянное максимально возможное управление заданной длительности. При этом длительность управления определяется из условия остановки защищаемого объекта после действия возмущения и управления. Для некоторых конкретных возмущений оптимальные

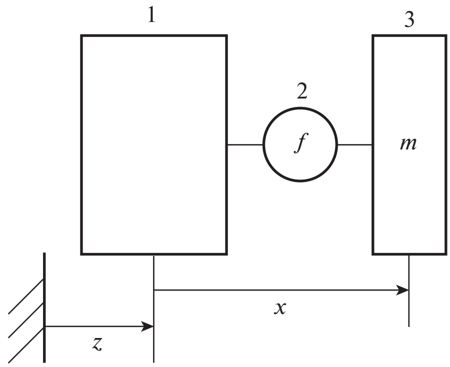

Рис. 1

упреждающие управления были построены численно или аналитически в [9]. Для задач с заданной длительностью возмущений и фиксированным управлением в [9] было также доказано, что наихудшие возмущения представляют собой дельта-функции, действующие либо в начальный момент возмущения либо в конечный. В [10, 11] построено упреждающее управление с оптимизацией момента упреждения для наихудших возмущений на основе управления, полученного для дельта-возмущений (мгновенных ударов) и получено соответствующее значение функционала. В этих работах также построено гарантирующее упреждающее управление с одним переключением, позволяющее вычислять минимальную оценку максимальной величины смещения объекта относительно основания для целого класса возмущений. В данной работе показано, что введение упреждения и запаздывания для постоянного максимального управления заданной длительности, полученного в качестве оптимального для мгновенных ударов без упреждения, и использование этого управления с дальнейшей оптимизацией по моменту упреждения и величине запаздывания приводит к значительному уменьшению значения критерия качества по сравнению с задачей без упреждения. Проведено сравнение этого управления по критерию качества с оптимальным решением. Показано также, что введение упреждения и запаздывания для управления заданной длительности, полученного в качестве оптимального для мгновенных ударов с упреждением, и использование этого управления с дальнейшей оптимизацией по моменту упреждения и величине запаздывания приводит к меньшему значению критерия качества, чем использование постоянного управления с запаздыванием и упреждением. Выбор для изучения простых законов управления, не зависящих от длительности возмущения, обусловлен тем, что такие способы управления легче реализовать на практике, когда закон управления задан и выбирается только момент его начала действия в зависимости от длительности возмущения.

1. Механическая система. Пусть механическая система (рис. 1) состоит из основания 1 и объекта 3, соединенного с основанием посредством противоударного изолятора 2 – устройства, генерирующего управляющую силу f между основанием и объектом и предназначенного для защиты объекта при ударном воздействии на основание. Движения основания и объекта предполагаются поступательными вдоль одной прямой. Обозначим: z – смещение основания относительно неподвижной (инерциальной) системы отсчета, x – смещение объекта относительно основания, m – масса объекта. Ударное воздействие на основание моделируется его ускорением $\ddot{z}$, функцией времени, некоторые характеристики которой предполагаются известными.

Движение объекта относительно основания описывается уравнением

$$\ddot{x} + u = v(t), \quad u = -\frac{f}{m}, \quad v = -\ddot{z} \tag{1.1}$$

Далее полагаем, что сила f удовлетворяет ограничению $|f| \le F_0$, где F_0 – заданная величина, тогда величина u удовлетворяет неравенству

$$|u| \le u_0, \quad u_0 = \frac{F_0}{m}$$

Предполагается, что в начальный момент времени $t = 0$ основание и объект покоятся в положениях, отвечающих нулевым значениям координат x и z:

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad z(0) = 0, \quad \dot{z}(0) = 0 \tag{1.2}$$

В качестве допустимых управлений будем рассматривать кусочно-непрерывные функции $u(t)$, удовлетворяющие ограничению $|u(t)| \le u_0$.

2. Внешние возмущения. Предполагается, что возмущение $v(t)$ имеет вид

$$v(t) = V(t - t_0), \quad t_0 \ge 0 \tag{2.1}$$

где кусочно-непрерывная функция $V(\xi)$ определена для всех вещественных ξ, причем $V(\xi) \equiv 0$ для $\xi < 0$, а $t_0 \ge 0$ – некоторый момент времени, который может быть задан или подлежать определению. Таким образом, возмущение V начинает действовать на основание спустя время t_0 после включения системы противоударной изоляции (упреждающее управление).

Будем предполагать, что возбуждение 1) действует только в одном направлении и не меняет знака ($V(t) \ge 0$), 2) имеет конечную длительность T ($V(t) \equiv 0$, если $t > T$) и 3) только на одном интервале, $t_1 < t < t_2$, величина абсолютного ускорения $V(t)$ основания превышает верхнюю границу u_0 абсолютного ускорения защищаемого объекта:

$$V(t) < u_0, \quad 0 \le t < t_1 \quad \text{и} \quad t_2 < t \le T$$
$$V(t) > u_0, \quad t_1 < t < t_2$$

Один или оба из интервалов $0 \le t < t_1$ и $t_2 < t \le T$ могут быть пустыми, если $V(0) > u_0$ или $V(T) > u_0$. В случае, когда $V(t) \le u_0$ для $0 \le t \le T$ оптимальное управление определяется тождеством $u(t) \equiv V(t)$ и обеспечивает тождественно равное нулю смещение объекта по отношению к основанию. Базовыми характеристиками ударного воздействия являются его длительность T и интеграл

$$v_0 = \int_0^T V(t)dt \tag{2.2}$$

характеризующий величину скорости, приобретенной (или потерянной) основанием в результате удара. В дальнейшем параметры T и v_0 считаются известными. Класс описанных возмущений обозначим V_*.

3. Критерий качества. Будем считать, что возмущение $V(\xi)$ неизвестно, но известно множество $\Omega \subset V_*$, которому могут принадлежать возможные возмущения. Качество изоляции при заданных управлении $u(t)$ и времени упреждения t_0 будем оценивать функционалом J, характеризующим максимальную величину смещения объекта относительно основания при наихудшем возмущении:

$$J(u, t_0) = \max_{V \in \Omega} \max_{t \in [0,\infty)} |x(t; u, V, t_0)| \tag{3.1}$$

где $x(t; u, V, t_0)$ – решение уравнения (1.1) с начальными условиями (1.2) для заданных $u(t)$, $V(\xi)$ и t_0. Величину J желательно минимизировать выбором оптимального закона управления и времени упреждения.

4. Лемма о наихудшем возмущении. Вычисление функционала (3.1) предполагает определение наихудшего возмущения $V \in \Omega \subset V_*$, которое максимизирует максимум модуля отклонения защищаемого объекта относительно основания ($\max_t |x(t; u, V, t_0)|$) при заданных $u(t)$ и t_0.

Лемма [9]. Среди возмущений $V \in V_*$ наихудшее возмущение есть либо $V(\xi) = v_0\delta(\xi)$, либо $V(\xi) = v_0\delta(\xi - T)$. Иными словами, наихудшее возмущение есть мгновенный удар интенсивности v_0, подаваемый в начальный или в конечный момент допустимого интервала возмущения.

Согласно этой лемме, для нахождения наихудшего возмущения при заданных $u(t)$ и t_0 надо решить дифференциальное уравнение (1.1) с начальными условиями (1.2) при $v(t) = v_0\delta(t - t_0)$ и $v(t) = v_0\delta(t - t_0 - T)$, для каждого из решений вычислить соответственно $\max_t |x(t; u, V, t_0)|$, $\max_t |x(t; u, V, T)|$, сравнить получившиеся величины и выбрать возмущение, отвечающее большему значению.

Введем безразмерные переменные

$$x' = \frac{u_0}{v_0^2}x, \quad t' = \frac{u_0}{v_0}t, \quad t_0' = \frac{u_0}{v_0}t_0, \quad T' = \frac{u_0}{v_0}T, \quad \tau' = \frac{u_0}{v_0}\tau$$

$$v'(t') = \frac{1}{v_0}v\left(\frac{v_0}{u_0}t'\right), \quad u' = \frac{u}{u_0}, \quad J' = \frac{u_0}{v_0^2}J$$

Далее будем использовать безразмерные переменные, опуская штрихи. В безразмерных единицах параметры u_0 и v_0 равны единице.

5. Задачи оптимизации. Поскольку условия информированности управляющей стороны о внешнем возмущении и множества допустимых законов управления U могут быть различными, то и задачи оптимального управления должны быть сформулированы по-разному.

Задача 1. Для системы (1.1) с начальными условиями (1.2) найти допустимое управление u_* и время упреждения t_0^*, которые минимизируют величину (3.1):

$$J(u_*, t_0^*) = \min_{u \in U,\, t_0} J(u, t_0)$$

где U – множество законов управления $u(t)$, среди которых ищется оптимум.

Это задача о гарантирующем оптимальном упреждающем управлении противоударным изолятором, защищающим объект от ударных воздействий из множества Ω. Она обобщает задачу, рассмотренную в [1–3] для заданного возмущения в отсутствие упреждения управления.

Задача 2. Для системы (1.1) при начальных условиях (1.2) и заданном возмущении (2.1) найти кусочно-непрерывное управление $u(t)$, удовлетворяющее ограничению

$$|u(t)| \le u_0, \quad t \in [0, \infty) \tag{5.1}$$

и время упреждения t_0, которые минимизируют максимальную величину смещения объекта относительно основания (функционал J):

$$J(u, V, t_0) = \max_{t \in [0, \infty)} |x(t; u, V, t_0)| \to \min_{u, t_0} \tag{5.2}$$

Эту задачу можно трактовать как задачу 1, в которой множество допустимых возмущений Ω состоит из одного элемента.

Множество допустимых законов управления может представлять собой параметрическое семейство управлений $u_s(t) \in U_s$, зависящих от параметра $s, s \in S$.

Задача 3. Для заданного класса допустимых управлений $u_s(t) \in U_s$ найти время упреждения t_0^* и значение параметра s^*, минимизирующие величину (3.1):

$$J(u_{s*}, t_0^*) = \min_{t_0, s} J(u_s, t_0)$$

Решение задачи 3 дает возможность улучшать качество противоударной защиты путем изменения времени упреждения и параметра при заданном семействе законов управления $u_s(t)$, которое, например, может быть построено на основе оптимального управления для некоторого возмущения $V \in \Omega$ и представлено аналитическими выражениями.

6. Параметрическая оптимизация. В данной работе рассматриваются четыре параметрических множества допустимых законов управления: U_τ — класс управлений с одним переключением, U_c — класс управлений с запаздыванием, основанный на оптимальном управлении для мгновенного удара с упреждением, U_d — класс постоянных управлений заданной длительности с запаздыванием, основанный на оптимальном управлении для мгновенного удара без упреждения, U_0 — класс постоянных управлений заданной длительности без запаздывания, состоящий из одного элемента u_{0d} — оптимального управления для мгновенного удара без упреждения, определяемого далее.

Решение задачи 3 для класса управлений U_τ. Класс управлений U_τ описывается в размерных переменных параметрическим семейством допустимых релейных управлений $u_\tau(t)$ с переключением с $-u_0$ на u_0 в момент времени τ и с u_0 на 0 в момент времени $v_0/u_0 + 2\tau$, т.е. примем $U_\tau = \{u_\tau\}$, где

$$u_\tau(t) = \begin{cases} -u_0, & 0 \le t < \tau, \\ +u_0, & \tau \le t \le T_c, \\ 0, & t > T_c, \end{cases} \quad T_c = \frac{v_0}{u_0} + 2\tau \tag{6.1}$$

Для управлений вида (6.1) имеем

$$\int_0^t u(s)ds = v_0, \quad t \ge T_c \tag{6.2}$$

Длина отрезков управления в (6.1) выбрана из условия $\dot{x} \to 0$ при $t \to +\infty$, что приводит к конечному смещению объекта относительно основания.

В безразмерных переменных соотношения (6.1), (6.2) приобретают вид

$$u_\tau(t) = \begin{cases} -1, & 0 \le t < \tau, \\ +1, & \tau \le t \le T_c, \\ 0, & t > T_c, \end{cases} \quad T_c = 1 + 2\tau \tag{6.3}$$

$$\int_0^t u(s)ds = 1, \quad t \ge T_c \tag{6.4}$$

Для класса управлений $U_\tau = \{u_\tau\}$ решение задачи 3 получено в [10, 11]. Оптимальное управление определяется формулой (6.3) с значением параметра τ

$$\tau = \begin{cases} T/2 + 1/4, & T < 1/2 \\ 1/2, & 1/2 < T \le 7/2 \\ \sqrt{(1+T)/2} - 1, & T > 7/2 \end{cases}$$

Значение функционала и момент упреждения определяются формулами

$$J_\tau = \begin{cases} (T/2 + 1/4)^2, & T \le 1/2 \\ T/2, & 1/2 < T \end{cases}$$

$$t_{0\tau} = \begin{cases} T + 1, & T < 1/2 \\ 7/4 - T/2, & 1/2 < T \le 7/2 \\ 0, & T > 7/2 \end{cases}$$

Заметим, что приведенное решение задачи 1 при $T > 1/2$ неединственно. Значение функционала $J = T/2$ для этого случая обеспечивается моментом переключения τ и моментом упреждения t_0, удовлетворяющими соотношениям

$$\max\{\sqrt{(1+T)/2} - 1, 0\} \le \tau \le \sqrt{T/2}$$
$$t_{0\tau} = 1/2 + \tau^2 + 2\tau - T/2$$

Решение задачи 3 для класса управлений U_c. Класс управлений $U_c = \{u_c\}$ описывается параметрическим семейством допустимых управлений $u_c(t)$, где $u_c(t)$ в размерных и безразмерных переменных задается соответственно соотношениями (6.5) и (6.6)

$$u_c(t) = \begin{cases} 0, & t < c, \\ -u_0, & c \le t \le \dfrac{u_0}{4v_0} + c, \\ u_0, & \dfrac{u_0}{4v_0} + c < t \le \dfrac{3u_0}{2v_0} + c, \quad c \ge 0 \\ 0, & t > \dfrac{3u_0}{2v_0} + c, \end{cases} \tag{6.5}$$

$$u_c(t) = \begin{cases} 0, & t < c, \\ -1, & c \le t \le \dfrac{1}{4} + c, \\ 1, & \dfrac{1}{4} + c < t \le \dfrac{3}{2} + c, \quad c \ge 0 \\ 0, & t > \dfrac{3}{2} + c, \end{cases} \tag{6.6}$$

Управление $u_c(t)$ при $c = 0$ обозначим $u_\delta(t)$ и будем называть дельта-управлением, поскольку управление $u_\delta(t)$ с моментом упреждения $t_0 = 1$ представляет собой оптимальное управление с оптимальным упреждением для задачи 2 при возмущении $V(\xi) = \delta(\xi)$. Очевидное равенство $u_c(t) = u_\delta(t - c)$ означает, что управление $u_c(t)$ представляет собой дельта-управление с запаздыванием c. Отметим также справедливость равенства

$$u_\tau(t)\big|_{\tau=0.25} = u_\delta(t)$$

Использование методики работ [10, 11] приводит к решению задачи 3 для класса управлений U_c:

$$t_c^* = \begin{cases} c^* + \sqrt{\dfrac{9}{4} + 2T} - \dfrac{1}{2} - T, & T \le \dfrac{7}{8}, \\ c^* + \dfrac{17}{16} - \dfrac{T}{2}, & \dfrac{7}{8} < T, \end{cases} \quad c^* \ge \max\left[0, \frac{T}{2} - \frac{17}{16}\right] \tag{6.7}$$

$$J_c(T) = J(u_{c^*}, t_c^*) = \begin{cases} \dfrac{25}{16} - \sqrt{\dfrac{9}{4} + 2T} + T, & T \le \dfrac{7}{8} \\ \dfrac{T}{2}, & \dfrac{7}{8} < T \end{cases} \tag{6.8}$$

Заметим, что значение функционала $J_c(T)$ из (6.8) обеспечивается не единственным образом. Оптимальные минимально возможные момент упреждения t_c^* и величина запаздывания c^* определяются соотношениями

$$t_c^* = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{9}{4} + 2T} - \dfrac{1}{2} - T, & T < \dfrac{7}{8} \\ \dfrac{17}{16} - \dfrac{T}{2}, & \dfrac{7}{8} \le T < \dfrac{17}{8}, \\ 0, & T \ge \dfrac{17}{8} \end{cases} \quad c^* = \begin{cases} 0, & T \le \dfrac{17}{8} \\ \dfrac{T}{2} - \dfrac{17}{16}, & \dfrac{17}{8} < T \end{cases} \tag{6.9}$$

Решение задачи 3 для класса управлений U_d. Класс управлений $U_d = \{u_d\}$ описывается параметрическим семейством допустимых управлений $u_d(t)$, где $u_d(t)$ в размерных и безразмерных переменных задается соответственно соотношениями (6.10) и (6.11)

$$u_d(t) = \begin{cases} 0, & t < d \\ u_0, & d \le t \le \dfrac{u_0}{v_0} + d \\ 0, & t > \dfrac{u_0}{v_0} + \end{cases} \qquad d \ge 0 \tag{6.10}$$

$$u_d(t) = \begin{cases} 0, & t < d \\ 1, & d \le t \le 1 + d \\ 0, & t > 1 + d \end{cases} \qquad d \ge 0 \tag{6.11}$$

Управление $u_d(t)$ при $d = 0$ обозначим $u_{0d}(t)$ и будем называть d-управлением. Управление $u_{0d}(t)$ с моментом упреждения $t_0 = 0$ представляет собой оптимальное управление без оптимального упреждения для задачи 2 при возмущении $V(\xi) = \delta(\xi)$.

Введем функцию $J_{dd}(t^*)$, определяемую как значение функционала J, отвечающее управлению $u_d(t)$ и возмущению $v(t) = \delta(t - t^*)$, т.е. мгновенному удару, действующему на основание в момент времени t^*. Эта функция задается выражением

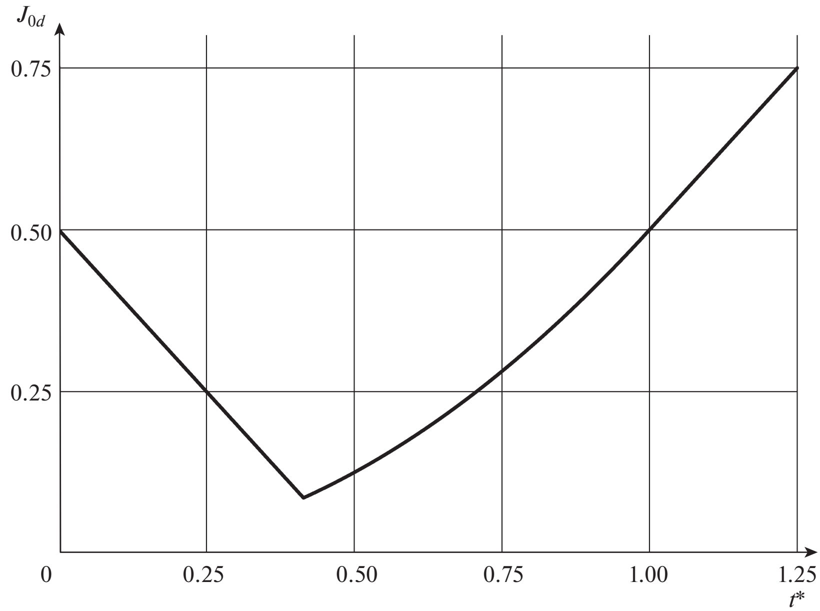

Рис. 2

$$J_{dd}(t^*) = \begin{cases} 1/2 - t^* + d, & 0 \le t^* < d + \sqrt{2} - 1 \\ (t^* - d)^2/2, & d + \sqrt{2} - 1 \le t^* < d + 1 \\ t^* - 1/2 - d, & t^* \ge d + 1 \end{cases} \qquad (6.12)$$

Формула (6.12) позволяет оценить влияние ошибки в определении момента удара при расчете упреждающего оптимального управления на величину критерия качества противоударной изоляции. Функция из (6.12) непрерывна, монотонно убывает от значения $1/2 + d$ до $3/2 - \sqrt{2}$ при $t^* \in [0, d + \sqrt{2} - 1)$ и монотонно возрастает от $3/2 - \sqrt{2}$ до бесконечности при $t^* > d + \sqrt{2} - 1$. Формула (6.12) является обобщением формулы для величины $J_{0d}(t^*)$, определяемой как максимум модуля отклонения объекта относительно основания для мгновенного удара $v(t) = \delta(t - t^*)$ при управлении $u_{0d}(t)$, $t^* \ge 0$

$$J_{0d}(t^*) = \begin{cases} 1/2 - t^*, & 0 \le t^* < \sqrt{2} - 1 \\ t^{*2}/2, & \sqrt{2} - 1 \le t^* < +1 \\ t^* - 1/2, & t^* \ge +1 \end{cases} \qquad (6.13)$$

Очевидное равенство $J_{dd}(t^*) = J_{0d}(t^* - d)$ при $t^* \ge d$ означает, что график функции $J_{dd}(t^*)$ получается смещением графика $J_{dd}(t^*)$ на величину c вдоль оси абсцисс с доопределением на интервале $[0, d)$ согласно формуле (6.12).

График функции $J_{0d}(t^*)$ изображен на рис. 2.

Из полученной формулы (6.13) можно сделать следующие выводы.

Для дельта-возмущения $V(\xi) = \delta(\xi)$ при заданных значениях параметров $T = 0$, $t^* = 0$ и при заданном управлении $u_{0d}(t)$ получаем минимальное значение функционала J_{00} в задаче без упреждения

$$u(t) = u_{0d}(t), \quad t^* = 0, \quad J_{00} = 1/2 \tag{6.14}$$

Для дельта-возмущения $V(\xi) = \delta(\xi)$ при заданном значении параметра $T = 0$ и при заданном управлении $u_{0d}(t)$ получаем минимальное значение функционала J_0 при оптимальном времени упреждения t_0^*

$$u(t) = u_{0d}(t), \quad t_0^* = \sqrt{2} - 1 \approx 0.4142857, \quad J_0 = 3/2 - \sqrt{2} \approx 0.0857143 \tag{6.15}$$

Это вырожденные случаи задачи 3, когда возмущение является дельта-функцией, подаваемой в известный момент времени, а множество управлений состоит из одного элемента $u_{0d}(t)$. Решение (6.15) представляет собой приближенное решение задачи 2 для дельта-возмущения, задаваемого формулами

$$u(t) = u_\delta(t), \quad t_\delta = 1, \quad J_\delta = 1/16 = 0.0625 \tag{6.16}$$

и приведенного в [6]. Относительная разность решения (6.15) и точного (6.16) составляет

$$\eta = \frac{J_0 - J_\delta}{J_\delta} 100\% \approx 37.14\%$$

Приведем также отношения значения функционала J_{00} в задаче без упреждения к значениям J_0 и J_δ

$$\frac{J_{00}}{J_0} \approx 5.8, \quad \frac{J_{00}}{J_\delta} = 8$$

Тем самым, мы получили, что оптимизация только по моменту упреждения позволяет уменьшить максимальное смещение в 5.8 раза, а оптимизация по моменту упреждения и по управлению в классе управлений с одним переключением позволяет уменьшить максимальное смещение в 8 раз.

Для решения задачи 3 надо, с учетом леммы о наихудшем возмущении, для заданного T найти минимум по переменным t_0, d величины

$$f_d(t_0, T) = \max\left[J_{dd}(t_0), J_{dd}(t_0 + T)\right], \quad t_0 \geq 0 \tag{6.17}$$

Минимум величины из (6.17) достигается при выполнении условий

$$d \geq \max\left[0, \frac{T-1}{2}\right], \quad J_{dd}(t_0) = J_{dd}(t_0 + T), \quad t_0 \geq 0 \tag{6.18}$$

которые приводят к решению задачи 3 для класса управлений U_{dd}:

$$t_d^* = \begin{cases} d^* + \sqrt{2T+2} - T - 1, & T \leq 1, \\ d^* + \dfrac{1}{2} - \dfrac{T}{2}, & 1 < T, \end{cases} \qquad d^* \geq \max\left[0, \frac{T-1}{2}\right] \tag{6.19}$$

$$J_d(T) = J(u_{d^*}, t_d^*) = \begin{cases} \dfrac{3}{2} - \sqrt{2T+2} + T, & T \leq 1 \\ \dfrac{T}{2}, & 1 < T \end{cases} \tag{6.20}$$

Заметим, что значение функционала $J_d(T)$ из (6.20) обеспечивается не единственным образом. Оптимальные минимально возможные момент упреждения t_d^* и величина запаздывания d^* определяются соотношениями

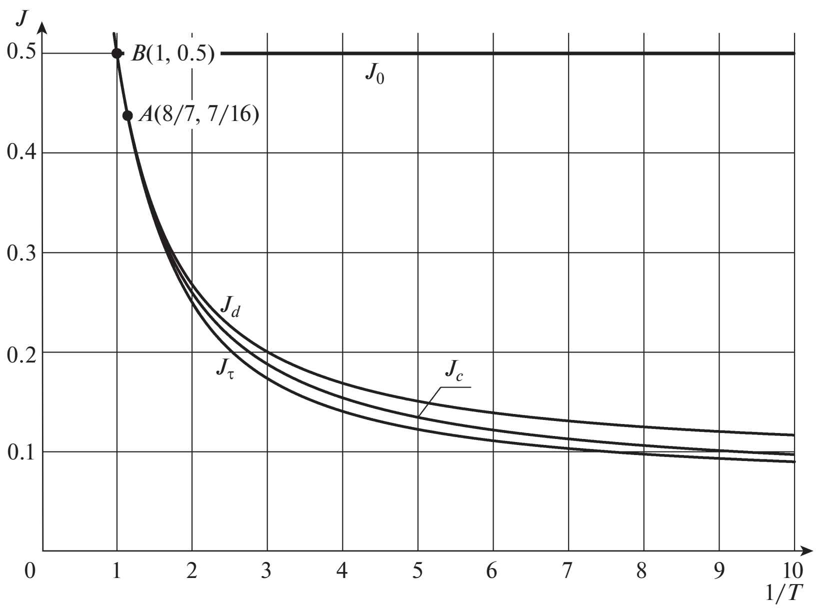

Рис. 3

$$t_d^* = \begin{cases} \sqrt{2T+2} - T - 1, & T < 1, \\ 0 & T \geq 1, \end{cases} \qquad d^* = \begin{cases} 0, & T \leq 1 \\ \dfrac{T-1}{2}, & 1 < T \end{cases} \tag{6.21}$$

Значение функционала $J(u_{0d}(t), 0)$ *для класса управлений* U_0. Представляет интерес не только сравнить полученные решения задачи 3 между собой, но и сравнить эти решения с значением функционала из (3.1) при использовании управления $u_{0d}(t)$ без упреждения и запаздывания. Это значение вычисляется согласно формуле

$$J_0(T) = J(u_{0d}(t), 0) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & T \leq 1 \\ T - \dfrac{1}{2}, & 1 < T \end{cases} \tag{6.22}$$

7. Сравнение качества изоляции для различных способов управления. Нетрудно убедиться в справедливости следующих соотношений

$$J_\tau(T) \leq J_c(T) \leq J_d(T) \leq J_0(T)$$

Зависимости величин J_τ, J_c, J_d и J_0 от $1/T$ изображены на рис. 3. Все четыре графика пересекаются в точке B. Левее точки B графики $J_\tau(1/T)$, $J_c(1/T)$ и $J_d(1/T)$ совпадают, а левее точки A совпадают графики $J_\tau(1/T)$, $J_c(1/T)$.

На рис. 4 представлена зависимость величины $\eta = (J_c - J_\tau)/J_\tau$ от длительности возмущения T. Величина η характеризует относительное отличие гарантированных значений критерия качества, обеспечиваемых управлением $u_c(t)$ при оптимальном выборе моментов времени упреждения и запаздывания, и оптимальным управлением $u_\tau(t)$ с оптимальным моментом упреждения $t_{0\tau}$. Установлено, что $\eta \equiv 0$ при $T \geq 7/8$ и $\eta < 0.1$ для $T \in [0, 7/8]$.

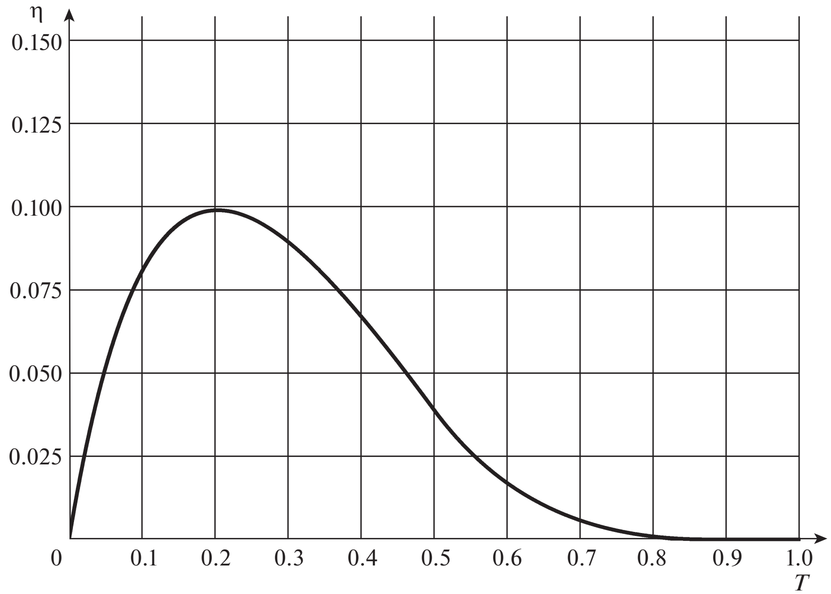

Рис. 4

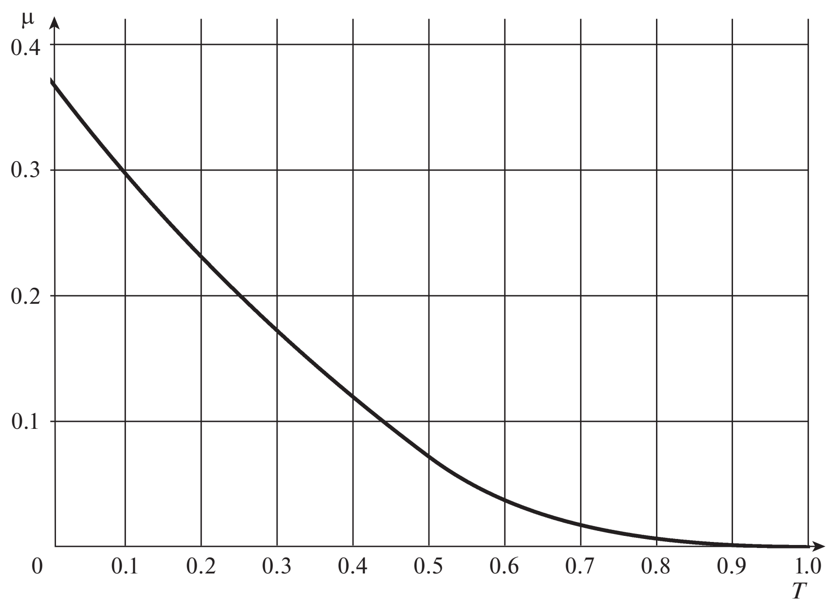

Рис. 5

На рис. 5 представлена зависимость величины $\mu = (J_d - J_\tau)/J_\tau$ от длительности возмущения T. Величина μ характеризует относительное отличие гарантированных значений критерия качества, обеспечиваемых управлением $u_d(t)$ при оптимальном выборе моментов времени упреждения и запаздывания, и оптимальным управлением $u_\tau(t)$

с оптимальным моментом упреждения $t_{0\tau}$. Установлено, что $\mu \equiv 0$ при $T \geq 1$ и $\mu <$ < 0.372 для $T \in [0,1]$.

Таким образом, управление $u_c(t)$ с моментами времени упреждения и запаздывания, определяемыми формулами (6.7)–(6.9), обеспечивает качество противоударной защиты, не более чем на 10% отличающееся от оптимального на всем диапазоне длительностей ударного воздействия, и оптимально для $T \in [7/8, +\infty)$.

Управление $u_d(t)$ с моментами времени упреждения и запаздывания, определяемыми формулами (6.19)–(6.21), обеспечивает качество противоударной защиты, не более чем на 37.2% отличающееся от оптимального на всем диапазоне длительностей ударного воздействия, и оптимально для $T \in [1, +\infty)$.

Величина $\nu = (J_0 - J_\tau)/J_\tau$ характеризует относительное отличие гарантированных значений критерия качества, обеспечиваемых управлением $u_{0d}(t)$ без упреждения и запаздывания, и оптимальным управлением $u_\tau(t)$ с оптимальным моментом упреждения $t_{0\tau}$. Установлено, что $\nu < 1$ при $T \geq 1$ и $\nu \leq 7.0$ для $T \in [0,1]$, т.е. оптимизация по управлению и моменту упреждения приводит к уменьшению максимального смещение объекта относительно основания в 8 раз как и для случая $T = 0$.

Заключение. Рассмотрена задача изоляции объекта на подвижном основании от ударов, которым может подвергаться основание. Изучалась возможность применения управлений, предназначенных для мгновенного удара как с варьированием момента начала управления так и с фиксированным моментом начала управления, к задаче о наихудших возмущениях с заданными длительностью и интегралом от возмущения. Проведено сравнение полученных решений по критерию качества (максимальное смещение объекта относительно основания) с оптимальным решением с одним переключением.

Работа выполнена по теме государственного задания АААА-А20-120011690138-6 при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты 17-01-00538-а и 17-08-00742-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гурецкий В.В.* Об одной задаче оптимального управления // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 1. С. 159–162.
2. *Гурецкий В.В.* О задаче минимизации максимального смещения // Труды ЛПИ. Механика и процессы управления. 1969. № 307. С. 11–21.
3. *Sevin E., Pilkey W.* Optimum Shock and Vibration Isolation. Washington DC: Shock and Vibration Information Analysis Center, 1971. 162 c.
4. *Коловский М.З.* Автоматическое управление виброзащитными системами. М.: Наука, 1976. 320 с.
5. *Болотник Н.Н.* Оптимизация амортизационных систем. М.: Наука, 1983. 256 с.
6. *Balandin D.V., Bolotnik N.N., Pilkey W.D.* Optimal Protection from Impact, Shock, and Vibration. Amsterdam: Gordon and Breach Science, 2001. 440 p.
7. *Pilkey W.D., Balandin D.V., Bolotnik N.N., Crandal J.R., Purtsezov S.V.* Injury Biomechanics and Control: Optimal Protection from Impact. Wiley and Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2010. 286 p.
8. *Болотник Н.Н., Корнеев В.А.* Анализ предельных возможностей противоударной изоляции при кратковременных внешних воздействиях // Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. № 1. С. 147–168.
9. *Болотник Н.Н., Корнеев В.А.* Противоударная изоляция с упреждающим управлением для внешних возмущений различной формы // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 3. С. 48–63.
10. *Болотник Н.Н., Корнеев В.А.* Гарантирующее упреждающее управление в задаче противоударной изоляции // Доклады академии наук, 2018. Т. 481. № 4. С. 381–385.
11. *Корнеев В.А.* Защита объекта на подвижном основании с помощью упреждающего управления при наихудших возмущениях // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 1. С. 89–97.