

УДК 531.36, 531.38

## КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ МНОГОТОКОВОЙ МОДЕЛИ СИНХРОННОГО ГИРОСКОПА В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ. 1

© 2020 г. Б. И. Коносеви<sup>а,\*</sup>, Ю. Б. Коносеви<sup>а</sup>

<sup>а</sup>Институт прикладной математики и механики, Донецк, Украина

\*e-mail: konos.donetsk@yandex.ru

Поступила в редакцию 20.04.2019 г.

После доработки 05.05.2019 г.

Принята к публикации 06.06.2019 г.

Изучается динамика гироскопа в кардановом подвесе, имеющего вертикальную наружную ось подвеса и снабженного синхронным электромотором, который приводит гироскоп (ротор электромотора) во вращение. Используется математическая модель электромотора, включающая дифференциальные уравнения для электрических токов в обмотках ротора. Момент сил трения и какие-либо управляющие моменты относительно осей подвеса предполагаются отсутствующими. Момент сил трения относительно оси ротора является нелинейной функцией угловой скорости его вращения относительно статора.

Дифференциальные уравнения движения такой электромеханической системы имеют бесконечный набор стационарных решений, которые описывают ее стационарные движения — регулярные прецессии и равномерные вращения ротора. Вследствие вертикальности наружной оси карданова подвеса, рассматриваемая система дифференциальных уравнений имеет первый интеграл, который выражает постоянство проекции кинетического момента прибора на вертикаль.

В работе доказано, что наличие изолированного минимума полной приведенной потенциальной энергии является необходимым и достаточным условием устойчивости стационарных движений. Таким образом, результат, полученный ранее с использованием упрощенной бестоковой модели синхронного электромотора, обобщен на случай многотоковой модели.

Материал работы изложен в двух статьях. В первой из них рассмотрены случаи, когда механическая приведенная потенциальная энергия не является тождественной постоянной по отношению к внутреннему карданову углу. Во второй части рассмотрен случай постоянства механической приведенной потенциальной энергии.

*Ключевые слова:* гироскоп в кардановом подвесе, стационарное движение, синхронный электромотор, устойчивость по Ляпунову, приведенная потенциальная энергия

**DOI:** 10.31857/S0572329920020075

**Введение.** Гироскоп в кардановом подвесе является основным элементом различных гироприборов и обладает рядом замечательных динамических свойств, что делает его одним из наиболее интересных объектов исследования в динамике системы твердых тел. В первых работах по теории гироскопа в кардановом подвесе предполагалось, что ротор либо вращается по инерции без трения, либо он вращается с постоянной угловой скоростью относительно внутренней рамки подвеса. На практике быстро вращающийся ротор испытывает значительное тормозящее воздействие сил трения, и

для поддержания вращения ротора используют электродвигатель. Его статором является внутренняя “рамка” карданова подвеса, а ротором – ротор прибора.

Авторами данной работы проведен цикл исследований динамики гироскопа в кардановом подвесе, снабженного электродвигателем асинхронного или синхронного типа. При этом использовались известные модели электромоторов [1], в которых не учитывается изменение электрических токов, а принимаются упрощенные выражения для вращающего момента электромотора. В рамках такого подхода для гироскопа в кардановом подвесе с динамически симметричным и статически уравновешенным ротором, имеющего вертикальную наружную ось подвеса и снабженного синхронным электроприводом ротора, было получено необходимое и достаточное условие устойчивости его стационарных движений – это наличие изолированного минимума приведенной потенциальной энергии в точке, соответствующей данному стационарному движению [2]. Кроме того, для синхронного гироскопа в кардановом подвесе было установлено свойство притяжения стационарных движений, соответствующих точкам минимума приведенной потенциальной энергии [3].

В статье [4] предложена математическая модель синхронного электромотора в виде системы дифференциальных уравнений, состоящей из дифференциального уравнения второго порядка, которое описывает вращение ротора, и дифференциальных уравнений первого порядка для электрических токов в обмотках ротора. В работе [5] для этой модели синхронного электромотора получено достаточное условие глобальной устойчивости.

В настоящей работе такая модель электромотора используется при описании динамики гироскопа в кардановом подвесе, снабженного синхронным электроприводом ротора. Предполагается, что прибор находится в поле силы тяжести, наружная ось карданова подвеса вертикальна, трение на осях подвеса отсутствует, а момент сил трения относительно оси ротора является нелинейной функцией угловой скорости его вращения относительно статора. Доказано, что для большинства конструкций гироскопа в кардановом подвесе (в том числе и для общепринятой конструкции этого прибора) необходимым и достаточным условием устойчивости любого стационарного движения является наличие изолированного минимума полной приведенной потенциальной энергии.

Ввиду большого объема работы она разделена на две части.

В части 1 приведены дифференциальные уравнения движения рассматриваемой электромеханической системы, найдены их стационарные решения и доказана устойчивость стационарных решений при наличии изолированного минимума полной приведенной потенциальной энергии. Установлена также неустойчивость стационарных решений в случае отсутствия такого минимума, но при условии, что механическая часть полной приведенной потенциальной энергии не является тождественной постоянной по отношению к внутреннему карданову углу.

В части 2 рассмотрен случай постоянства механической приведенной потенциальной энергии. Доказано, что в этом случае для большинства конструкций прибора имеет место неустойчивость всех стационарных решений.

**1. Стационарные решения уравнений многофазной модели синхронного гироскопа в кардановом подвесе.** 1.1. Многофазная модель синхронного гироскопа в кардановом подвесе. Работа синхронного электромотора описывается в [4] системой дифференциальных уравнений с фазовым вектором  $(\theta, \dot{\theta}, i_0, i_1, \dots, i_{n_2})$ . Здесь  $i_0$  – ток в обмотке возбуждения,  $i_n$  ( $n = 1 \div n_2$ ) – токи в стержнях демпферной обмотки,  $\theta$  – угол между радиус-вектором к стержню с током  $i_{n_2}$  и вектором напряженности вращающегося магнитного поля статора,  $\dot{\theta}$  – производная угла  $\theta$  по времени  $t$ . Эти уравнения содержат следующие параметры:  $u$  – постоянное напряжение на обмотке возбуждения,  $R_1$  и  $L_1$  – активное и индуктивное сопротивления обмотки возбуждения,  $R_2$  и  $L_2$  – активное и индук-

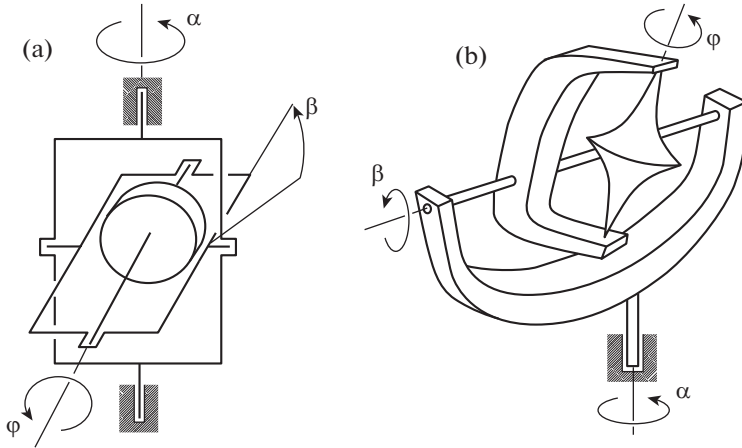


Рис. 1

тивное сопротивление демпферной обмотки,  $B$  – напряженность магнитного поля статора,  $n_1$  – число витков в обмотке возбуждения,  $n_2$  – число стержней в демпферной обмотке,  $S_1$  – площадь витка обмотки возбуждения,  $S_2$  – площадь диаметрального сечения демпферной обмотки,  $m \geq 0$  – коэффициент сильного регулирования,  $C$  – осевой момент инерции ротора,  $M$  – момент сил сопротивления относительно оси ротора,  $\omega > 0$  – постоянная угловая скорость вращения магнитного поля в статоре.

В первом уравнении системы (1) из [4], определяющем  $\dot{\theta}$ , откорректируем знак перед  $m\dot{\theta}$  и коэффициент при  $i_0 \sin(\theta + \pi/4)$ , домножив его на 4. Знаки величин  $u$ ,  $i_0$ ,  $i_n$  ( $n = 1 \div n_2$ ) изменим на противоположные. Вместо тока  $i_0$  введем переменную  $x$  по формуле  $i_0 = x + u/R_1$ , а вместо угла  $\theta$  – угол  $\gamma = \theta + \pi/4$ . Далее предполагаем, что  $u > 0$ . Обозначая через  $\varphi$  угол поворота ротора относительно статора, имеем  $\varphi = \gamma + \omega t$ . В результате получаем приведенную в [5] систему дифференциальных уравнений (6), которая описывает работу синхронного электромотора.

Общепринятая модель гироскопа в кардановом подвесе изображена на рис. 1а. В данной работе принята обобщенная модель гироскопа в кардановом подвесе [6, 7] (рис. 1б). Здесь динамически симметричный и статически уравновешенный гироскоп заключен в карданов подвес, составленный из двух “рамок” произвольной формы. Внутренняя ось подвеса неколлинеарна наружной оси подвеса и оси гироскопа, и эти три оси, вообще говоря, не пересекаются в одной точке. Наружная ось подвеса неподвижна и направлена вертикально (или же эта ось неvertикальна, но прибор статически уравновешен). Диссипативные или управляющие моменты на осях подвеса отсутствуют. Внутренняя “рамка” подвеса является статором синхронного электромотора, а гироскоп – его ротором. Поэтому относительно оси ротора действуют вращающий момент синхронного электромотора и момент сил трения. Положение прибора в каждый момент времени  $t$  определяют углы  $\alpha$ ,  $\beta$  поворота наружной и внутренней “рамок” карданова подвеса и угол  $\varphi$  поворота ротора. Кинетическая энергия прибора выражается формулой

$$T(\alpha, \beta, \varphi, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} [G(\beta)\dot{\alpha}^2 + H\dot{\beta}^2 + C\dot{\varphi}^2 + 2N(\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta} + 2Q(\beta)\dot{\alpha}\dot{\varphi} + 2R\dot{\beta}\dot{\varphi}] \quad (1.1)$$

где  $C$  – осевой момент инерции ротора, коэффициенты  $H, R$  зависят только от постоянных механических параметров. Коэффициенты  $G, N, Q$  и потенциальная энергия силы тяжести  $U$  зависят от угла  $\beta$  по формулам

$$\begin{aligned} G(\beta) &= g_0 + g_1 \sin \beta + g_2 \cos \beta + g_3 \sin 2\beta + g_4 \cos 2\beta \\ N(\beta) &= n_0 + n_1 \sin \beta + n_2 \cos \beta, \quad Q(\beta) = q_0 + q_1 \sin \beta \\ U(\beta) &= u_0 + u_1 \sin \beta + u_2 \cos \beta \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь  $u_0$  – произвольная постоянная, а выражения остальных коэффициентов формул (1.2) и величин  $H, R$  через механические параметры следуют из формул (8)–(15) статьи [7]. Эти выражения приведены в [8]. При этом из формулы  $q_1 = C \sin \theta_2 \sin \theta_3$  следует, что  $q_1 > 0$ , поскольку углы  $\theta_2, \theta_3$ , которые внутренняя ось подвеса образует с наружной осью подвеса и осью ротора, выбираются так, что  $\theta_2, \theta_3 \in (0, \pi/2]$ . Случаю уравновешенного гироскопа соответствует  $U \equiv \text{const}$ .

При любом значении  $\beta$  кинетическая энергия (1.1) – положительно определенная квадратичная форма угловых скоростей  $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\phi}$ . Поэтому, согласно критерию Сильвестра,

$$G(\beta) > 0, \quad G(\beta)H - N^2(\beta) > 0, \quad G(\beta)C - Q^2(\beta) > 0, \quad J(\beta) > 0 \quad (1.3)$$

при любом  $\beta$ . Здесь  $J(\beta)$  – определитель квадратичной формы  $2T$ .

При сделанных предположениях обобщенными силами для лагранжевых координат  $\alpha, \beta, \phi$  являются  $0, -U$  и правая часть того из уравнений электромотора, которое определяет  $C\dot{\gamma}$ . Здесь и далее штрихом обозначается дифференцирование по  $\beta$ .

Момент сил сопротивления относительно оси ротора предполагается в [4] постоянной отрицательной величиной. В настоящей работе предполагается, что момент сил сопротивления является нечетной непрерывно дифференцируемой монотонно убывающей нелинейной функцией  $M = M(\phi)$  угловой скорости ротора  $\phi$ . При  $\phi \neq 0$  знак этой функции противоположен знаку ее аргумента. Поскольку  $\phi = \omega + \dot{\gamma}$ , момент  $M(\phi)$  представляется в виде

$$M(\phi) = M(\omega + \dot{\gamma}) = -c_0 + \Delta M(\dot{\gamma})$$

где

$$\Delta M(\dot{\gamma}) = M(\omega + \dot{\gamma}) - M(\omega), \quad c_0 = -M(\omega) \quad (c_0 > 0)$$

Функция  $\Delta M(\dot{\gamma})$  является монотонно убывающей вместе с  $M(\phi)$ , и поэтому при  $\dot{\gamma} \neq 0$  знак  $\Delta M(\dot{\gamma})$  противоположен знаку  $\dot{\gamma}$ . Таким образом, имеем

$$\dot{\gamma} \Delta M(\dot{\gamma}) < 0 \quad (\dot{\gamma} \neq 0), \quad \Delta M(0) = 0 \quad (1.4)$$

Пользуясь вместо  $\phi$  переменной  $\gamma = \phi - \omega t$ , получаем систему дифференциальных уравнений, описывающую многотоковую модель синхронного гироскопа в кардановом подвесе

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\dot{\alpha} G(\beta) + \dot{\beta} N(\beta) + (\omega + \dot{\gamma}) Q(\beta)] &= 0 \\ \frac{d}{dt} [\dot{\alpha} N(\beta) + \dot{\beta} H + (\omega + \dot{\gamma}) R] - \\ - \dot{\alpha} \left[ \frac{\dot{\alpha}}{2} G(\beta) + \dot{\beta} N(\beta) + (\omega + \dot{\gamma}) Q(\beta) \right] &= -U(\beta) \\ \frac{d}{dt} [\dot{\alpha} Q(\beta) + \dot{\beta} R + (\omega + \dot{\gamma}) C] &= -m\dot{\gamma} + \Delta M(\dot{\gamma}) - \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned}
& -a_1 x \sin \gamma - a_2 \sum_{n=1}^{n_2} i_n \cos \left( \gamma - \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{n_2} \right) - b_0 \sin \gamma - c_0 \\
& L_1 \frac{d}{dt} x = -R_1 x + a_1 \dot{\gamma} \sin \gamma \\
& L_2 \frac{d}{dt} i_n = -R_2 i_n + a_2 \dot{\gamma} \cos \left( \gamma - \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{n_2} \right), \quad n = 1 \div n_2
\end{aligned}$$

Здесь штрих означает дифференцирование по  $\beta$ , через  $a_1, a_2, b_0, c_0$  обозначены положительные постоянные

$$a_1 = 4\sqrt{2}m_1 S_1 B, \quad a_2 = S_2 B / 2, \quad b_0 = 4\sqrt{2}m_1 S_1 B / R_1, \quad c_0 = -M(\omega) \quad (1.6)$$

Вследствие последнего неравенства (1.3), уравнения (1.5) эквивалентны нормальной системе порядка  $6 + n_2$  с фазовым вектором  $(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma, x, i_1, \dots, i_{n_2})$ .

Уравнения (1.5) допускают интеграл

$$\dot{\alpha}G(\beta) + \dot{\beta}N(\beta) + (\omega + \dot{\gamma})Q(\beta) = p \quad (p = \text{const}) \quad (1.7)$$

Рассматривая равенство (1.7) как определение переменной  $p$ , перейдем в уравнениях (1.5) к переменным  $(p, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma, x, i_1, \dots, i_{n_2})$ . Для этого во второе и третье уравнения (1.5) подставим вытекающее из (1.7) выражение

$$\dot{\alpha} = \frac{1}{G(\beta)} [p - \dot{\beta}N(\beta) - (\omega + \dot{\gamma})Q(\beta)] \quad (1.8)$$

Получаем преобразованную систему дифференциальных уравнений движения синхронного гироскопа. Запишем ее, опустив аргумент  $\beta$  у функций (1.2):

$$\begin{aligned}
& \frac{dp}{dt} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{G} ((p - \omega Q)N + \dot{\beta}(GH - N^2) + \dot{\gamma}(GR - QN)) \right] + \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ \frac{1}{2G} (p - \omega Q - \dot{\beta}N - \dot{\gamma}Q)^2 + U \right] = 0 \\
& \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{G} ((p - \omega Q)Q + \dot{\beta}(GR - QN) + \dot{\gamma}(GC - Q^2)) \right] = -m\dot{\gamma} + \\
& + \Delta M(\dot{\gamma}) - a_1 x \sin \gamma - a_2 \sum_{n=1}^{n_2} i_n \cos \left( \gamma - \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{n_2} \right) - b_0 \sin \gamma - c_0 \\
& L_1 \frac{d}{dt} x = -R_1 x + a_1 \dot{\gamma} \sin \gamma \\
& L_2 \frac{d}{dt} i_n = -R_2 i_n + a_2 \dot{\gamma} \cos \left( \gamma - \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{n_2} \right), \quad n = 1 \div n_2
\end{aligned} \quad (1.9)$$

Так как  $G(\beta) > 0$  при любом  $\beta$  согласно (1.3), то замена переменных  $(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma, x, i_1, \dots, i_{n_2})$  переменными  $(p, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma, x, i_1, \dots, i_{n_2})$  взаимно однозначна и непрерывна в обе стороны. Поэтому устойчивость любого решения исходной системы (1.5) эквивалентна устойчивости соответствующего решения преобразованной системы (1.9).

Отбросив в преобразованной системе (1.9) первое уравнение  $\dot{p} = 0$ , получаем приведенную систему  $S_p$ , соответствующую данному значению  $p$ .

Преобразованная система (1.9) и приведенная система  $S_p$  эквивалентны системам нормального вида с фазовыми векторами

$$y = (p, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma, x, i_1, \dots, i_{n_2}), \quad z_p = (\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma, x, i_1, \dots, i_{n_2}) \quad (1.10)$$

При использовании радианной меры углы  $\beta, \gamma$  являются безразмерными величинами. Будем предполагать, что время, а также все компоненты фазовых векторов и их функции, входящие в динамические уравнения (1.5), (1.9), отнесены к величинам такой же размерности и поэтому являются безразмерными.

1.2. *Условия существования стационарных решений.* Далее предполагается, что параметры  $b_0, c_0 > 0$ , определенные в (1.6), удовлетворяют неравенству

$$c_0/b_0 < 1 \quad (1.11)$$

Тогда исходная система уравнений (1.5) имеет семейство стационарных решений

$$\dot{\alpha} = \Omega^0, \quad \dot{\beta} = 0, \quad \dot{\gamma} = 0, \quad \beta = \beta^0, \quad \gamma = \gamma^0, \quad x = 0, \quad i_1 = 0, \dots, i_{n_2} = 0 \quad (1.12)$$

которые описывают равномерные вращения ротора с угловой скоростью  $\phi = \omega$  (при  $\Omega^0 = 0$ ) и регулярные прецессии ротора вокруг наружной оси подвеса (при  $\Omega^0 \neq 0$ ). Решение вида (1.12) существует при данных  $\Omega^0, \beta^0, \gamma^0$ , если выполнены два условия: постоянные  $\Omega^0, \beta^0$  связаны соотношением

$$-\Omega^0 \left[ \frac{1}{2} \Omega^0 G(\beta^0) + \omega Q(\beta^0) \right] + U(\beta^0) = 0 \quad (1.13)$$

а величина  $\gamma^0$  удовлетворяет уравнению

$$b_0 \sin \gamma + c_0 = 0 \quad (1.14)$$

Если значение  $\beta^0$  принадлежит промежутку, на котором неотрицателен дискриминант квадратного по  $\Omega^0$  трехчлена в левой части (1.13), то при таком  $\beta^0$  уравнение (1.13) определяет два значения  $\Omega^0$ . В предположении (1.11) уравнение (1.14) определяет два счетных набора значений  $\gamma_{1s}, \gamma_{2s}$  угла  $\gamma^0$ :

$$\gamma_{1s} = \gamma^{(0)} + 2\pi s, \quad \gamma_{2s} = \gamma^{(1)} + 2\pi s \quad (s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1.15)$$

$$\gamma^{(0)} = -\arcsin c_0/b_0 \in (-\pi/2, 0), \quad \gamma^{(1)} = -\pi - \gamma^{(0)} \in (-\pi, -\pi/2) \quad (1.16)$$

Стационарному решению (1.12) системы (1.5) соответствует стационарное решение

$$p = p^0, \quad \dot{\beta} = 0, \quad \dot{\gamma} = 0, \quad \beta = \beta^0, \quad \gamma = \gamma^0, \quad x = 0, \quad i_1 = 0, \dots, i_{n_2} = 0 \quad (1.17)$$

преобразованной системы (1.9), в котором  $p^0 = \Omega^0 G(\beta^0) + \omega Q(\beta^0)$ . Соотношение (1.13) при этом переходит в условие, которое можно записать в виде  $U_*'(p^0, \beta^0) = 0$ , где штрих означает дифференцирование по  $\beta$ , а величина

$$U_*(p, \beta) = \frac{[p - \omega Q(\beta)]^2}{2G(\beta)} + U(\beta) \quad (1.18)$$

– это механическая приведенная потенциальная энергия. Уравнение (1.14), определяющее стационарные значения  $\gamma^0$  угла  $\gamma$ , можно записать в виде  $dU_1(\gamma)/d\gamma = 0$ , где

$$U_1(\gamma) = \int_0^\gamma (b_0 \sin \sigma + c_0) d\sigma = b_0(1 - \cos \gamma) + c_0\gamma \quad (1.19)$$

– потенциальная энергия, связанная с синхронным электромотором. Из (1.11) следует, что определенным в (1.15), (1.16) значениям  $\gamma_{1s}$  и  $\gamma_{2s}$  ( $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) угла  $\gamma$  соответствуют точки локального минимума и локального максимума функции  $U_1(\gamma)$

Стационарные решения приведенной системы  $S_p$  имеют вид

$$\dot{\beta} = 0, \quad \dot{\gamma} = 0, \quad \beta = \beta^0, \quad \gamma = \gamma^0, \quad x = 0, \quad i_n = 0 \quad (n = 1 \div n_2) \quad (1.20)$$

Приведенная система  $S_p$  имеет такое решение при выполнении условий

$$\partial U_p(\beta^0, \gamma^0)/\partial \beta = 0, \quad \partial U_p(\beta^0, \gamma^0)/\partial \gamma = 0, \quad \text{где} \quad U_p(\beta, \gamma) = U_*(p, \beta) + U_1(\gamma)$$

– полная приведенная потенциальная энергия.

1.3. *Классификация стационарных решений (случаи Aa, Ba, Ca, Da, Ab, Bb, Cb, Db).*

В общем случае, когда функция  $U_*(p, \beta)$  не является постоянной по  $\beta$ , условие  $U_*'(\beta, p) = 0$  определяет конечный набор стационарных значений  $\beta^0$  угла  $\beta$  на каждом  $2\pi$ -периоде. Эти значения соответствуют точкам локального минимума и локального максимума функции  $U_*(p, \beta)$  и, возможно, точкам ее перегиба с горизонтальной касательной. Условия, при которых функция  $U_*(p, \beta)$  является постоянной по  $\beta$ , даны в следующей лемме [2].

*Лемма 1.* Постоянная  $\tilde{p}$  такая, что  $U_*(\tilde{p}, \beta) = \text{const}$ , существует тогда и только тогда, когда конструктивные параметры гироскопа в кардановом подвесе удовлетворяют одной из двух групп условий (см. (1.2)):

$$D_1: g_2 = g_3 = 0, \quad u_1 = u_2 = 0, \quad g_1^2 + 8g_4(g_0 + g_4) = 0$$

$$(g_4 < 0, g_0 + g_4 > 0, |g_1| > 4|g_4|)$$

$$D_2: g_2 = g_3 = g_4 = 0, \quad u_2 = 0, \quad 2u_1g_1 + \omega^2 q_1^2 = 0$$

$$(g_1, u_1 \neq 0, |g_0| > |g_1|)$$

При условиях  $D_1$  специальное значение постоянной  $p$  определено формулой

$$\tilde{p} = \omega q_0 - 2\omega q_1(g_0 + g_4)/g_1 \quad (1.21)$$

а приведенная механическая потенциальная энергия (1.18) равна

$$U_*(p, \beta) = -4(p - \tilde{p})g_4 \frac{(p - \tilde{p})g_1 + 2(\tilde{p} - \omega q_0)(g_1 - 4g_4 \sin \beta)}{g_1(g_1 - 4g_4 \sin \beta)^2} \quad (1.22)$$

При условиях  $D_2$  специальное значение постоянной  $p$  определено формулой

$$\tilde{p} = \omega q_0 - \omega q_1 g_0 / g_1 \quad (1.23)$$

а приведенная механическая потенциальная энергия (1.18) равна

$$U_*(p, \beta) = (p - \tilde{p}) \frac{(p - \tilde{p})g_1 - 2\omega q_1(g_0 + g_1 \sin \beta)}{2g_1(g_0 + g_1 \sin \beta)} \quad (1.24)$$

Условия  $D_1, D_2$  не выполняются для прибора общепринятой конструкции, так как в этом случае  $G(\beta) = g_0 + g_4 \cos 2\beta$  и, следовательно, не выполняется неравенство  $g_1 \neq 0$ . В [9] доказано, что существуют конструкции гироскопа в кардановом подвесе, удовлетворяющие условиям  $D_1, D_2$ . Установлено, что эти условия могут быть реализованы, например, в классе гироскопов в кардановом подвесе, конструкция которых отличается от общепринятой тем, что внутренняя ось подвеса составляет с наружной осью подвеса и осью ротора углы  $\pi/4$  вместо углов  $\pi/2$  в общепринятой модели.

С учетом леммы 1 имеем следующую структуру множества стационарных решений приведенной системы уравнений для синхронного гироскопа в кардановом подвесе.

*Лемма 2.* В вырожденных случаях, когда выполнено одно из условий  $D_1, D_2$ , указанных в лемме 1, и  $p = \tilde{p}$ , множество стационарных решений приведенной системы  $S_{\tilde{p}}$  несчетно и состоит из точек (1.20), где  $\beta^0$  – любое, а  $\gamma^0$  принадлежит счетному набору значений (1.15).

В остальных случаях множество стационарных решений приведенной системы  $S_p$  счетно и состоит из изолированных точек (1.20), где счетное число значений  $\beta^0$  определено условием  $U_*(p, \beta) = 0$ , а  $\gamma^0$  принадлежит счетному набору значений (1.15). Следовательно, в невырожденных случаях счетное множество стационарных решений приведенной системы  $S_p$  порождается конечным числом точек  $(\beta^0, \gamma^0)$  квадрата  $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$  на плоскости  $(\beta, \gamma)$ .

Таким образом, если выделено некоторое стационарное решение (1.17) преобразованной системы (1.9), соответствующее определенным значениям  $p^0, \beta^0, \gamma^0$ , то для функции  $U_*(p^0, \beta)$  существуют четыре возможности: функция  $U_*(p^0, \beta)$  переменной  $\beta$  в точке  $\beta = \beta^0$  имеет А) изолированный минимум, В) изолированный максимум, С) перегиб с горизонтальной касательной, D)  $U_*(p^0, \beta) \equiv \text{const}$ . При этом для функции  $U_1(\gamma)$  существуют две возможности: функция  $U_1(\gamma)$  в точке  $\gamma = \gamma^0$  имеет а) изолированный минимум, б) изолированный максимум. Комбинируя эти возможности, получаем 8 типов стационарных решений преобразованной системы (1.9), которые обозначаем следующим образом: Аа, Ва, Са, Да, Аб, Вб, Сб, Дб. Для каждого из типов Да и Дб выделяются два подтипа  $D_{1a}, D_{2a}$  и  $D_{1b}, D_{2b}$ , которые существуют при выполнении условий  $D_1, D_2$ .

*1.4. Энергетические соотношения.* Для исследования устойчивости стационарных решений воспользуемся функциями Ляпунова, которые получим, пользуясь теоремой об изменении энергии. Рассмотрим три варианта этой теоремы.

*Вариант 1.* Пусть функция  $E_1$  определена формулой

$$E_1(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, x, i_1, \dots, i_{n_2}) = T(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \omega + \dot{\gamma}, \beta) + T_1(x, i_1, \dots, i_{n_2}) + U(\beta) \quad (1.25)$$

где  $\omega + \dot{\gamma} = \dot{\phi}$ , функция  $T(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \omega + \dot{\gamma}, \beta)$ , заданная формулой (1.1), является кинетической энергией механической части рассматриваемой системы, а функция

$$T_1(x, i_1, \dots, i_{n_2}) = \frac{1}{2} L_1 x^2 + \frac{1}{2} L_2 \sum_{n=1}^{n_2} i_n^2 \quad (1.26)$$

играет роль кинетической энергии для ее электрической части. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} E_1(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, x, i_1, \dots, i_{n_2}) &= \frac{1}{2} [G(\beta) \dot{\alpha}^2 + H \dot{\beta}^2 + C(\omega + \dot{\gamma})^2 + 2N(\beta) \dot{\alpha} \dot{\beta} + \\ &+ 2Q(\beta) \dot{\alpha}(\omega + \dot{\gamma}) + 2R \dot{\beta}(\omega + \dot{\gamma})] + \frac{1}{2} L_1 x^2 + \frac{1}{2} L_2 \sum_{n=1}^{n_2} i_n^2 + U(\beta) \end{aligned}$$

Вычислив производную этой функции по  $t$  в силу системы уравнений (1.5), получаем

$$\begin{aligned} \dot{E}_1(\dot{\gamma}, \gamma, x, i_1, \dots, i_{n_2}) &= -m(\omega + \dot{\gamma}) \dot{\gamma} + (\omega + \dot{\gamma}) \Delta M(\dot{\gamma}) - R_1 x^2 - R_2 \sum_{n=1}^{n_2} i_n^2 - \\ &- \omega a_1 x \sin \gamma - \omega a_2 \sum_{n=1}^{n_2} i_n \cos \left( \gamma - \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{n_2} \right) - (\omega + \dot{\gamma})(b_0 \sin \gamma + c_0) \end{aligned} \quad (1.27)$$



*Вариант 2.* Пусть функция  $E_2$  определена формулой

$$E_2(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma, x, i_1, \dots, i_{n_2}) = T(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta) + T_1(x, i_1, \dots, i_{n_2}) + U(\beta) + U_1(\gamma)$$

Здесь функция  $T(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta)$  получается из функции  $T(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\phi}, \beta)$ , если в ее определении (1.1) вместо  $\dot{\phi}$  взять  $\dot{\gamma}$ . Таким образом, согласно (1.1), (1.26), имеем

$$\begin{aligned} E_2(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, x, i_1, \dots, i_{n_2}) &= \frac{1}{2}[G(\beta)\dot{\alpha}^2 + H\dot{\beta}^2 + C\dot{\gamma}^2 + 2N(\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta} + \\ &+ 2Q(\beta)\dot{\alpha}\dot{\gamma} + 2R\dot{\beta}\dot{\gamma}] + \frac{1}{2}L_1x^2 + \frac{1}{2}L_2\sum_{n=1}^{n_2}i_n^2 + U(\beta) + U_1(\gamma) \end{aligned} \quad (1.28)$$

Вычислив производную функции  $E_2$  по  $t$  в силу системы уравнений (1.5), получаем

$$\dot{E}_2(\dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) = -m\dot{\gamma}^2 + \dot{\gamma}\Delta M(\dot{\gamma}) - R_1x^2 - R_2\sum_{n=1}^{n_2}i_n^2 \quad (1.29)$$

*Вариант 3.* В формуле (1.28) для  $E_2$  заменяем величину  $\dot{\alpha}$  ее выражением (1.8). Вместо  $E_2$  получаем функцию

$$\begin{aligned} E_3(p, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma, x, i_1, \dots, i_{n_2}) &= \\ &= T_*(\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta) + T_1(x, i_1, \dots, i_{n_2}) + U_*(p, \beta) + U_1(\gamma) \end{aligned} \quad (1.30)$$

где

$$\begin{aligned} T_*(\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta) &= \frac{1}{2G(\beta)}\{\dot{\beta}^2[G(\beta)H - N^2(\beta)] + \\ &+ 2\dot{\beta}\dot{\gamma}[G(\beta)R - Q(\beta)N(\beta)] + \dot{\gamma}^2[G(\beta)C - Q^2(\beta)]\} \end{aligned} \quad (1.31)$$

а функции  $U_*(p, \beta)$ ,  $U_1(\gamma)$  определены в (1.18), (1.19). Из неравенств Сильвестра (1.3) следует, что при любом значении  $\beta$  функция  $T_*(\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta)$  является определенно положительной квадратичной формой относительно  $\dot{\beta}$ ,  $\dot{\gamma}$ . В определении (1.30) функции  $E_3$  сумма  $T_* + T_1$  — полная приведенная кинетическая энергия, а сумма  $U_* + U_1$  — полная приведенная потенциальная энергия рассматриваемой электромеханической системы.

Очевидно, что производная функции  $E_3$  по  $t$  в силу преобразованной системы (1.9) и в силу приведенной системы  $S_p$  совпадает с производной (1.29) функции  $E_2$  по  $t$  в силу системы (1.5), то есть

$$\dot{E}_3(\dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) = -m\dot{\gamma}^2 + \dot{\gamma}\Delta M(\dot{\gamma}) - R_1x^2 - R_2\sum_{n=1}^{n_2}i_n^2 \quad (1.32)$$

Если изучается устойчивость некоторого стационарного решения (1.17) преобразованной системы (1.9), то значения  $p^0$ ,  $\beta^0$ ,  $\gamma^0$  рассматриваются как заданные. В этом случае определим функцию  $v$  фазовых переменных преобразованной системы и функцию  $v_p$  фазовых переменных приведенной системы  $S_p$ , полагая

$$\begin{aligned} v(p, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma, x, i_1, \dots, i_{n_2}) &= v_p(\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma, x, i_1, \dots, i_{n_2}) = \\ &= T_*(\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta) + T_1(x, i_1, \dots, i_{n_2}) + U_*(p, \beta) - U_*(p^0, \beta^0) + U_1(\gamma) - U_1(\gamma^0) \end{aligned} \quad (1.33)$$

Эти две функции обращаются в нуль на невозмущенном решении.

Третья функция такого же типа используется в случае, когда изучается класс решений приведенной системы  $S_p$ , для которых выполнено неравенство  $\gamma(t) \geq \gamma_{1s_0}$ , где  $\gamma_{1s_0}$  —

одна из определенных в (1.15), (1.16) точек минимума  $\gamma_{1s}$  функции  $U_1(\gamma)$ . Эта третья функция определена формулой

$$V_p(\beta, \dot{\gamma}, \beta, \gamma, x, i_1, \dots, i_{n_2}) = T_*(\beta, \dot{\gamma}, \beta) + T_1(x, i_1, \dots, i_{n_2}) + \Delta U_*(p, \beta) + \Delta U_1(\gamma) \quad (1.34)$$

где

$$\Delta U_*(p, \beta) = U_*(p, \beta) - \min_{\beta \in [0, 2\pi]} U_*(p, \beta), \Delta U_1(\gamma) = U_1(\gamma) - U_1(\gamma_{1s_0}) \quad (1.35)$$

При всех  $\beta$  выполнено неравенство  $\Delta U_*(p, \beta) \geq 0$ , а для рассматриваемого класса решений при  $\gamma \geq \gamma_{1s_0}$  выполнено неравенство  $\Delta U_1(\gamma) \geq 0$ .

Все три введенные функции только на константу отличаются от функции (1.30), поэтому они имеют такую же производную (1.32) по  $t$  в силу преобразованной и приведенной системы:

$$\begin{aligned} \dot{v}(\dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) &= \dot{v}_p(\dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) = \dot{V}_p(\dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) = \\ &= -m\dot{\gamma}^2 + \dot{\gamma}\Delta M(\dot{\gamma}) - R_1x^2 - R_2\sum_{n=1}^{n_2} i_n^2 \end{aligned} \quad (1.36)$$

При исследовании устойчивости стационарных решений (1.17) возникает необходимость рассматривать фазовые траектории преобразованной системы (1.9), вдоль которых для функции  $v_p$  выполняется условие  $\dot{v}_p = 0$ , то есть, согласно (1.36), выполняются условия  $\dot{\gamma} = 0$ ,  $x = 0$ ,  $i_1 = 0$ , ...,  $i_{n_2} = 0$ . На фазовых траекториях, удовлетворяющих этим условиям, функция  $v_p$  постоянна. Кроме того, согласно определениям (1.33), (1.31) функций  $v_p$  и  $T_*$ , при таких условиях функция  $v_p$  зависит только от двух фазовых переменных  $\beta$ ,  $\dot{\beta}$ . Следовательно, эти переменные связаны здесь соотношением

$$\frac{G(\beta)H - N^2(\beta)}{2G(\beta)}\dot{\beta}^2 + \Delta U_*(p^0, \beta) = e_0 \quad (1.37)$$

где  $e_0$  — постоянная. В верхней части рис. 2 схематически изображен график функции  $U_*(p^0, \beta)$  на  $2\pi$ -периоде изменения  $\beta$ . Он включает указанные выше случаи А, В, С, когда функция  $U_*(p, \beta)$  имеет точку минимума, максимума и перегиба с горизонтальной касательной. Стационарные значения  $\beta^0$ , соответствующие случаям А, В, С, обозначены на этом рисунке через  $\beta_A^0$ ,  $\beta_B^0$ ,  $\beta_C^0$ . В нижней части рис. 2 показан вид кривых, определяемых при разных значениях  $e_0 \geq \min_{\beta \in [0, 2\pi]} U_*(p^0, \beta)$  соотношением (1.37) без учета периодичности по  $\beta$  положительного коэффициента при  $\dot{\beta}^2$ . При учете периодичности этого коэффициента кривые получают дополнительные деформации в вертикальном направлении, что не меняет качественную картину.

**2. Устойчивость стационарных решений при наличии изолированного минимума полной приведенной потенциальной энергии.** Покажем, что для многотоковой модели синхронного гироскопа в кардановом подвесе стационарное решение устойчиво в случае Аа. Этот результат распространяет на случай многотоковой модели теорему 5 из [2]. Его доказательство основано на теореме Л. Сальвадори (теорема 2.3.1 в [10]). Она обобщает теорему Рауса—Ляпунова, которая, в свою очередь, является обобщением широко известного результата об устойчивости положения равновесия консервативной механической системы, соответствующего минимуму ее потенциальной энергии.

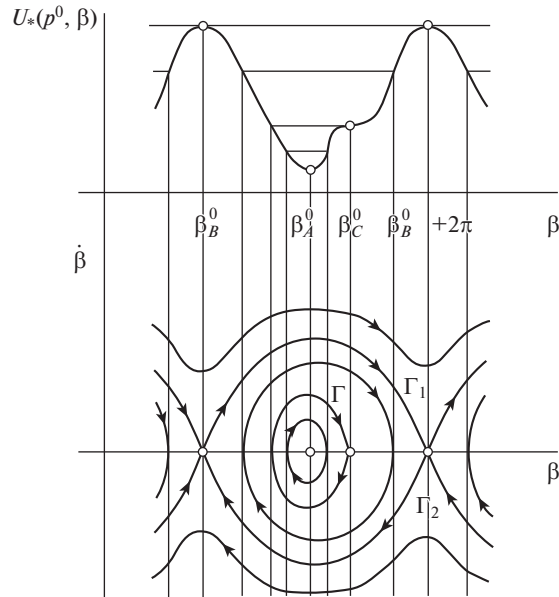


Рис. 2

2.1. Теорема Л. Сальвадори и следствие из нее. Пусть  $\Omega$  – область в  $R^n$ , содержащая точку  $x = 0$ ,  $I = [0, \infty)$  – неотрицательная числовая полуось,  $f : I \times \Omega \rightarrow R^n$  – непрерывная функция такая, что  $f(t, 0) \equiv 0$ , и для любой пары  $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$  система

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (2.1)$$

имеет единственное решение  $x(t, t_0, x_0)$  при начальном условии  $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$ . Правый максимальный интервал существования этого решения обозначается через  $J^+(t_0, x_0)$ . Система (2.1) допускает нулевое решение  $x(t, 0, 0) \equiv 0$ .

Пусть также заданы две непрерывно дифференцируемые функции – скалярная функция  $V : I \times \Omega \rightarrow R$  и вектор-функция  $w : I \times \Omega \rightarrow R^m$  ( $m < n$ ), причем  $V(t, 0) \equiv 0$ ,  $w(t, 0) \equiv 0$ . Через  $\| \cdot \|$  обозначим норму в  $R^n$  и  $R^m$ .

*Определение* (Л. Сальвадори [10]). Функция  $V$  называется положительно определенной на множествах  $E_t$  ( $w = 0$ ), если существует  $\varepsilon' > 0$  такое, что для любого  $\varepsilon \in (0, \varepsilon')$  найдутся  $\alpha, \beta > 0$  такие, что  $V(t, x) > \alpha$  для всех  $(t, x) \in I \times \Omega$ , удовлетворяющих условиям  $\varepsilon \leq \|x\| \leq \varepsilon'$ ,  $\|w(t, x)\| \leq \beta$ .

*Теорема 1* (Л. Сальвадори [10]). Пусть непрерывно дифференцируемые функции  $V : I \times \Omega \rightarrow R$ ,  $w : I \times \Omega \rightarrow R^m$  удовлетворяют условиям:

1)  $V(t, 0) \equiv 0$ ,  $w(t, 0) \equiv 0$ ,  $t \in I$

2) функция  $V$  положительно определена на множествах  $E_t$  ( $w = 0$ )

3) производная функции  $V$  в силу системы (2.1) удовлетворяет неравенству  $\dot{V}(t, x) \leq 0$ ,  $(t, x) \in I \times \Omega$

4)  $\dot{W}(t, x) \leq 0$ , где  $W(t, x) = \|w(t, x)\|^2$

Тогда нулевое решение системы (2.1) устойчиво.

В [11] дано простое доказательство теоремы, обобщающей теорему 1.

Эта теорема сложна для применения, так как трудно проверяемым является условие 2 положительной определенности  $V$  на множествах  $E_t$  ( $w = 0$ ). Но, как отмечено в [10], в случае, когда функции  $V$  и  $w$  не зависят от  $t$ , положительная определенность  $V$  на множествах  $E_t$  ( $w = 0$ ) означает, что в точке  $x = 0$  функция  $V$  имеет изолированный минимум на множестве точек  $x \in \Omega$ , удовлетворяющих условию  $w(x) = 0$ . Условие 4 автоматически выполняется, когда функция  $w$  – векторный первый интеграл. Следовательно, для автономной системы

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.2}$$

где  $f : \Omega \rightarrow R^n$ ,  $0 \in \Omega$ ,  $f(0) = 0$ , получаем такой результат.

*Теорема 2.* Пусть непрерывно дифференцируемая функция  $V : \Omega \rightarrow R$  и непрерывная функция  $w : I \times \Omega \rightarrow R^m$  удовлетворяют условиям:

- 1)  $V(0) = 0$ ,  $w(0) = 0$
- 2) точка  $x = 0$  является точкой строгого локального минимума функции  $V$  на множестве тех точек  $x \in \Omega$ , где  $w(x) = 0$
- 3) производная функции  $V$  в силу системы (2.2) удовлетворяет неравенству  $\dot{V}(x) \leq 0$ ,  $x \in \Omega$
- 4)  $w(x) = \text{const}$  на решениях системы (2.2)

Тогда нулевое решение системы (2.2) устойчиво.

Теорема 2 сводит вопрос о получении достаточного условия устойчивости стационарного решения автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений к более простой задаче об условном минимуме функции нескольких переменных, рассматриваемой в математическом анализе.

*2.2. Теорема об устойчивости стационарных решений в случае Аа.* Справедлива следующая теорема.

*Теорема 3.* Если функция  $U_*(p^0, \beta)$  имеет изолированный локальный минимум при  $\beta = \beta^0$ , а функция  $U_1(\gamma)$  имеет изолированный локальный минимум при  $\gamma = \gamma^0$ , то решение (1.17) уравнений (1.9) устойчиво (по отношению к переменным, образующим фазовый вектор  $(p, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma, x, \dot{t}_1, \dots, \dot{t}_m)$  этих уравнений при записи их в виде нормальной системы).

*Доказательство.* Воспользуемся теоремой 2 и покажем, что в качестве функций  $V$ ,  $w$ , фигурирующих в этой теореме, можно принять функцию  $v$ , определенную в (1.33), и функцию  $p - p^0$ . В самом деле, если  $w = p - p^0$ , то, по условию теоремы 3, при  $w = 0$ , т.е. при  $p = p^0$ , разность  $U_*(p, \beta) - U_*(p^0, \beta^0) = U_*(p^0, \beta) - U_*(p^0, \beta^0)$  в определении  $v$  является определенно положительной функцией возмущения  $\beta - \beta^0$ . Далее, по условию теоремы 3, разность  $U_1(\gamma) - U_1(\gamma^0)$  является определенно положительной функцией возмущения  $\gamma - \gamma^0$ , а функция  $T_*(\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta)$ , как отмечено в пп. 1.4, определенно положительна по отношению к возмущениям  $\dot{\beta}, \dot{\gamma}$  при любом  $\beta$ .

Следовательно, функция  $v$ , заданная формулой (1.33), является положительно определенной на множестве  $w = 0$ . С учетом (1.4), производная (1.36) функции  $v$  в силу уравнений движения является знакопостоянной отрицательной. Таким образом, все условия теоремы 2 выполнены, и поэтому решение (1.17) уравнений (1.9) устойчиво.

Так как  $U_*(p^0, \beta)$  – аналитическая функция  $\beta$ , то изолированный минимум при  $\beta = \beta^0$  она имеет только в случае, когда первая из ее производных по  $\beta$ , отличных от

нуля в точке  $\beta = \beta^0$ , имеет четный порядок  $n$  и положительна, т.е. имеют место соотношения

$$U_*'(p^0, \beta^0) = 0, \dots, U_*^{(n-1)}(p^0, \beta^0) = 0, \quad U_*^{(n)}(p^0, \beta^0) > 0$$

где  $n > 0$  – четное. С учетом определения (1.18) функции  $U_*(p, \beta)$  и структуры формул (1.2) в [2] показано, что здесь  $n \leq 6$ , так что  $n$  принимает одно из значений 2, 4 или 6. Для уравновешенного гироскопа  $n \leq 4$ .

### 3. Неустойчивость стационарных решений при отсутствии изолированного минимума полной приведенной потенциальной энергии.

3.1. Лемма о стационарном значении угла  $\gamma$ . В следующей лемме установлено важное свойство функции  $v_p$ , определенной в (1.33).

Лемма 3. Если приведенная система  $S_p$  имеет решение

$$\dot{\beta}(t), \quad \dot{\gamma}(t), \quad \beta(t), \quad \gamma(t), \quad x(t), \quad i_1(t), \dots, i_{n_2}(t), \quad t \geq 0 \quad (3.1)$$

на котором  $\dot{v}_p(t) = 0$  при всех  $t \geq 0$ , то для этого решения при всех  $t \geq 0$  выполняются равенства

$$\dot{\gamma}(t) = 0, \quad \gamma(t) = \gamma_0, \quad x(t) = 0, \quad i_1(t) = 0, \dots, i_{n_2}(t) = 0 \quad (3.2)$$

где  $\gamma_0$  – одно из определенных в (1.15), (1.16) стационарных значений угла  $\gamma$ , то есть

$$b_0 \sin \gamma_0 + c_0 = 0 \quad (3.3)$$

Доказательство. Так как  $\dot{v}_p(t) = 0$  ( $t \geq 0$ ) для решения (3.1), то, согласно (1.36), (1.4), для этого решения имеем

$$\dot{\gamma}(t) = 0, \quad x(t) = 0, \quad i_1(t) = 0, \dots, i_{n_2}(t) = 0 \quad (3.4)$$

и поэтому  $\gamma(t) = \gamma_0$  – величина постоянная. Покажем, что  $\gamma_0$  удовлетворяет соотношению (3.3).

Предварительно выведем неравенство для функции  $E_1$ , определенной формулой (1.25). Решение (3.1) системы  $S_p$  соответствует решению

$$\dot{\alpha}(t), \dot{\beta}(t), \dot{\gamma}(t), \beta(t), \gamma(t), x(t), i_1(t), \dots, i_{n_2}(t) \quad (3.5)$$

исходной системы уравнений движения (1.5), в котором, согласно (1.7),

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{1}{G(\beta(t))} [p - \dot{\beta}N(\beta(t)) - (\omega + \dot{\gamma}(t))Q(\beta(t))]$$

Как отмечалось в пп. 1.1, при любом значении  $\beta$  кинетическая энергия  $T(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\phi}, \beta)$  является определенно положительной квадратичной формой (1.1) переменных  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\beta}$ ,  $\dot{\phi}$ . Коэффициенты  $G$ ,  $N$ ,  $Q$  этой квадратичной формы – непрерывные периодические, а значит, ограниченные функции  $\beta$ . Поэтому существуют постоянные  $h_1, h_2 > 0$  такие, что при любом  $\beta$  выполнено двойное неравенство

$$h_1(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + \dot{\phi}^2) \leq T(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\phi}, \beta) \leq h_2(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + \dot{\phi}^2) \quad (3.6)$$

Из определений (1.25), (1.26), (1.1) функций  $E_1$ ,  $T_1$ ,  $T$  и равенств (3.4) следует, что  $E_1(t) = T(\dot{\alpha}(t), \dot{\beta}(t), \omega, \beta(t))$  на решении (3.5). Отсюда, с учетом (3.6), получаем для  $E_1(t)$  двойное неравенство

$$h_1[\dot{\alpha}^2(t) + \dot{\beta}^2(t) + \omega^2] \leq E_1(t) \leq h_2[\dot{\alpha}^2(t) + \dot{\beta}^2(t) + \omega^2], \quad t \geq 0 \quad (3.7)$$

Допустим, что значение  $\gamma_0$  – нестационарное, то есть  $b_0 \sin \gamma_0 + c_0 \neq 0$ . Тогда, согласно (1.27), (3.4), имеем  $\dot{E}_1(t) = \text{const} \neq 0$  на рассматриваемом решении (3.1) и, следовательно, функция  $E_1(t)$  на этом решении неограниченно возрастает по модулю при возрастании  $t$ . Но, согласно (3.7), функция  $E_1(t)$  положительна и может неограниченно возрастать по модулю только в случае, когда хотя бы одна из скоростей  $\dot{\alpha}(t)$ ,  $\dot{\beta}(t)$  неограниченно возрастает по модулю при  $t \rightarrow \infty$ .

Значит, если величина  $|\dot{\alpha}(t)|$  ограничена, то величина  $|\dot{\beta}(t)|$  должна быть неограниченной. Если же на рассматриваемом решении величина  $|\dot{\alpha}(t)|$  неограниченна, то левая часть формулы (1.7), определяющей  $p$ , будет ограниченной при  $\dot{\gamma}(t) \equiv 0$  только в том случае, когда функция  $N(\beta(t))$  не является тождественным нулем, а величина  $|\dot{\beta}(t)|$  неограниченна. Таким образом, при допущении о нестационарности значения  $\gamma_0$  величина  $|\dot{\beta}(t)|$  всегда неограниченна при  $t \geq 0$ .

Однако из формул (1.33), (1.36) для  $v$ ,  $\dot{v}$  с учетом определений (1.26), (1.31) функций  $T_1$ ,  $T_*$  следует, что при условиях (3.4) на рассматриваемом решении выполняется равенство

$$\frac{G(\beta(t))H - N^2(\beta(t))}{2G(\beta(t))} \dot{\beta}^2(t) + U_*(p, \beta(t)) = \text{const}, \quad t \geq 0$$

Его левая часть ограничена в случае неограниченной функции  $|\dot{\beta}(t)|$  только тогда, когда коэффициент при  $\dot{\beta}^2(t)$  принимает сколь угодно малые значения при  $t \geq 0$ . Но это невозможно, так как данный коэффициент, будучи непрерывной  $2\pi$ -периодической функцией  $\beta$ , которая положительна при всех  $\beta$  согласно (1.3), имеет положительный минимум при  $\beta \in [0, 2\pi]$ . Следовательно, допущение о нестационарности  $\gamma_0$  неверно.

**3.2. Теорема о неустойчивости стационарных решений в случае Ab.** Для изучения устойчивости стационарных решений в случае Ab воспользуемся следующей теоремой Н.Н. Красовского о неустойчивости (см. теорему 1.6.3 в [12]).

**Теорема 4.** Пусть для автономной системы (2.2) существует непрерывно дифференцируемая функция  $V = V(x)$ , которая обращается в нуль в точке  $x = 0$  и обладает следующими свойствами.

1. В произвольной окрестности точки  $x = 0$  функция  $V$  не является определенно положительной.
2. Производная функции  $V$  по  $t$  в силу системы (2.2) удовлетворяет условиям

$$\dot{V} < 0 \quad \text{вне } M, \quad \dot{V} = 0 \quad \text{на } M$$

где  $M$  – множество точек, не содержащее целых положительных полутраекторий, кроме точки  $x = 0$ .

Тогда положение равновесия  $x = 0$  неустойчиво.

Вопрос об устойчивости в случае Ab решает следующая теорема.

**Теорема 5.** В случае Ab, когда функция  $U_*(p^0, \beta)$  имеет в точке  $\beta = \beta^0$  изолированный минимум, а функция  $U_1(\gamma)$  имеет в точке  $\gamma = \gamma^0$  изолированный максимум, стационарное решение (1.17) преобразованной системы (1.9) неустойчиво.

**Доказательство.** Для доказательства неустойчивости решения (1.17) преобразованной системы (1.9) достаточно установить неустойчивость соответствующего решения приведенной системы  $S_p$ . С этой целью воспользуемся теоремой 4 в ситуации, когда роль системы (2.2) в этой теореме играет приведенная система  $S_p$ , а вместо устойчи-

ности нулевого решения рассматривается вопрос об устойчивости в случае Ab решения

$$\dot{\beta} = 0, \quad \dot{\gamma} = 0, \quad \beta = \beta^0, \quad \gamma = \gamma^0, \quad x = 0, \quad i_1 = 0, \dots, i_{n_2} = 0 \quad (3.8)$$

системы  $S_{p^0}$ , соответствующего решению (1.17) системы (1.9). В качестве функции  $V$  выберем функцию  $v_{p^0}$ , где функция  $v_p$  определена в (1.33).

Функция  $v_{p^0}$  обращается в нуль в стационарной точке (3.8) системы  $S_{p^0}$ . Так как значение  $\gamma = \gamma^0$  является точкой локального максимума функции  $U_1(\gamma)$ , разность  $U_1(\gamma) - U_1(\gamma^0)$  отрицательна в окрестности этой точки. Поэтому функция  $v_{p^0}$  принимает отрицательные значения в некоторых точках из сколь угодно малой окрестности стационарной точки (3.8) системы  $S_{p^0}$ . Таким образом, выполнено условие 1 теоремы 4.

Из (1.4), (1.36) следует, что  $\dot{v}_{p^0}(\dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) \leq 0$ . Поэтому для того, чтобы воспользоваться теоремой 4, достаточно доказать, что множество  $M$  точек фазового пространства системы  $S_{p^0}$ , на котором  $\dot{v}_{p^0} = 0$ , не содержит в малой окрестности стационарной точки (3.8) целых положительных полутраекторий, отличных от этой точки.

Допустим, что это утверждение неверно, то есть приведенная система  $S_{p^0}$  имеет в окрестности стационарной точки (3.8) нестационарное решение

$$\dot{\beta}(t), \quad \dot{\gamma}(t), \quad \beta(t), \quad \gamma(t), \quad x(t), \quad i_1(t), \dots, i_{n_2}(t), \quad t \geq 0, \quad (3.9)$$

на котором  $\dot{v}_{p^0}(t) = 0$  при всех  $t \geq 0$ . Согласно лемме 3, для этого решения выполняются равенства (3.2), (3.3), так что отличными от постоянных тут могут быть только функции  $\dot{\beta}(t)$ ,  $\beta(t)$ , а значение  $\gamma_0$  удовлетворяет уравнению (3.3). Следовательно, функции  $\dot{\beta}(t)$ ,  $\beta(t)$  при всех  $t \geq 0$  удовлетворяют соотношениям

$$\frac{G(\beta(t))H - N^2(\beta(t))}{2G(\beta(t))} \dot{\beta}^2(t) + U_*(p^0, \beta(t)) - U_*(p^0, \beta^0) = e \quad (3.10)$$

$$\frac{[p^0 - \omega Q(\beta(t))]Q(\beta(t))}{G(\beta(t))} + \frac{G(\beta(t))R - Q(\beta(t))N(\beta(t))}{G(\beta(t))} \dot{\beta}(t) = k \quad (3.11)$$

где  $e$ ,  $k$  – постоянные. При учете равенств (3.2), (3.3) первое из этих соотношений следует из формул (1.33), (1.36) для  $v_p$ ,  $\dot{v}_p$ , а второе соотношение следует из третьего уравнения преобразованной системы (1.9).

Из неравенств (1.3) следует, что левая часть равенства (3.10) неотрицательна в рассматриваемом случае А, когда  $\beta^0$  – точка минимума функции  $U_*(p^0, \beta)$ , и поэтому  $e \geq 0$ . А поскольку рассматриваемое решение (3.9) предполагается отличным от стационарного решения (3.8), имеем  $e > 0$ . Так как значение  $\beta = \beta^0$  является точкой локального минимума разности  $U_*(p^0, \beta(t)) - U_*(p^0, \beta^0)$ , то при достаточно малых значениях  $e > 0$  соотношение (3.10) определяет на плоскости  $(\beta, \dot{\beta})$  замкнутые кривые, охватывающие точку  $(\beta^0, 0)$  (рис. 2). Они соответствуют колебаниям, для которых  $\beta(t)$  – периодическая функция времени.

Но если коэффициент при  $\dot{\beta}(t)$  в соотношении (3.11) отличен от тождественного нуля, то это соотношение определяет кривые, для которых  $\dot{\beta}$  является однозначной функцией  $\beta$ . Такие кривые не могут быть замкнутыми. Значит, данный коэффициент

тождественно равен нулю, то есть выполнено равенство  $K_1(\beta(t)) \equiv 0$ , где  $K_1(\beta) = G(\beta)R - Q(\beta)N(\beta)$ . В таком случае соотношение (3.11) принимает вид тождественного по  $t \geq 0$  равенства

$$\frac{[p^0 - \omega Q(\beta(t))]Q(\beta(t))}{G(\beta(t))} \equiv k$$

где  $k$  – постоянная. Так как на замкнутых кривых величина  $\beta$  не является постоянной, то полученные два равенства должны быть тождествами не только по  $t$ , но и по  $\beta$ , то есть должны выполняться тождества

$$K_1(\beta) \equiv 0, \quad \frac{[p^0 - \omega Q(\beta)]Q(\beta)}{G(\beta)} \equiv k \quad (k = \text{const}) \quad (3.12)$$

Таким образом, приведенная система  $S_{p^0}$  имеет нестационарное решение (3.9), на котором  $\dot{v}_{p^0}(t) \equiv 0$ , только в том случае, когда выполняются тождества (3.12). Но из лемм 1, 2 статьи [3] следует, что не существует конструкции гироскопа в кардановом подвесе, для которой при некотором значении  $p^0$  соотношения (3.12) выполнены тождественно по  $\beta$ . Значит, в рассматриваемом случае множество  $M$  точек фазового пространства системы  $S_{p^0}$  не содержит в окрестности стационарной точки (3.8) положительных полутраекторий, кроме самой этой точки, то есть выполнено условие 2 теоремы 4. Следовательно, по этой теореме, стационарное решение (3.8) приведенной системы  $S_{p^0}$  неустойчиво.

*3.3. Теорема о неустойчивости стационарных решений в случаях Va, Ca, Bb, Cb.* Справедлива следующая теорема.

*Теорема 6.* В случаях Va, Bb, Ca, Cb, когда функция  $U_*(p^0, \beta)$  имеет в точке  $\beta = \beta^0$  изолированный локальный максимум или перегиб с горизонтальной касательной, а функция  $U_1(\gamma)$  имеет при  $\gamma = \gamma^0$  локальный максимум или минимум, стационарное решение (1.17) преобразованной системы (1.9) неустойчиво.

*Доказательство.* Чтобы доказать неустойчивость решения (1.17) преобразованной системы (1.9), достаточно доказать неустойчивость соответствующего решения (3.8) приведенной системы  $S_{p^0}$ . С этой целью, как и при доказательстве теоремы 5, воспользуемся теоремой 4, приняв в ней в качестве функции  $V$  функцию  $v_{p^0}$ , где функция  $v_p$  определена в (1.33). Функция  $v_{p^0}$  обращается в нуль в стационарной точке (3.8) системы  $S_{p^0}$ . Разность  $U_*(p^0, \beta) - U_*(p^0, \beta^0)$  принимает отрицательные значения в любой окрестности точки  $\beta = \beta^0$ , поскольку значение  $\beta = \beta^0$  является для функции  $U_*(p^0, \beta)$  точкой локального максимума или перегиба с горизонтальной касательной. Поэтому функция  $v_{p^0}$  принимает отрицательные значения в сколь угодно малой окрестности стационарной точки (3.8) приведенной системы  $S_{p^0}$ . Таким образом, условие 1 теоремы 4 выполнено.

Согласно (1.4), (1.36) имеем  $\dot{v}_{p^0}(\dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) \leq 0$ . Поэтому для того, чтобы воспользоваться теоремой 4, достаточно проверить выполнение ее условия 2 об отсутствии в окрестности стационарной точки (3.8) отличных от этой точки целых положительных



полутраекторий, на которых выполняется равенство  $\dot{v}_{p^0} = 0$ . В соответствии с леммой 3, множество  $M$  точек фазового пространства системы  $S_{p^0}$ , составленное из таких полутраекторий, содержится во множестве, которое определено равенствами (3.2), (3.3). Из них следует, что если система  $S_{p^0}$  имеет определенное при  $t \geq 0$  решение, на котором  $\dot{v}_{p^0}(t) \equiv 0$ , то в этом решении отличными от постоянных являются только функции  $\dot{\beta}(t)$ ,  $\beta(t)$ . Эти функции связаны соотношением (3.10), которое следует из формул (1.33), (1.36), (1.31), (1.26) для  $v_p$ ,  $\dot{v}_p$ ,  $T_*$ ,  $T_1$  и равенств (3.2).

Рассмотрим на плоскости  $(\beta, \dot{\beta})$  кривые, определенные соотношением (3.10) в случаях В, С, когда функция  $U_*(p^0, \beta)$  имеет при  $\beta = \beta^0$  локальный максимум или перегиб с горизонтальной касательной. Эти кривые являются проекциями фазовых траекторий системы  $S_{p^0}$  на плоскость  $(\beta, \dot{\beta})$ . Как показывает рис. 2, в случаях В, С соотношение (3.10) при  $e > 0$  не определяет целых положительных полутраекторий в окрестности стационарной точки (3.8). При  $e = 0$  это соотношение определяет, кроме самой стационарной точки, целые положительные полутраектории, вдоль которых решение стремится к стационарной точке при  $t \rightarrow \infty$ . В случае В такими полутраекториями являются кривые  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  или их части, содержащие стационарную точку, а в случае С — кривая  $\Gamma$  или ее часть, содержащая стационарную точку. Поэтому, строго говоря, условие 2 теоремы 4 здесь не выполняется.

Однако в доказательстве этой теоремы, приведенном в [12], используется не полное отсутствие в  $M$  целых положительных полутраекторий, отличных от рассматриваемой стационарной точки, а лишь отсутствие в  $M$  целых полутраекторий, лежащих в шаровом слое с центром в этой точке. Такое условие здесь выполнено, и поэтому утверждение теоремы 4 о неустойчивости остается верным и в данном случае.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Климов Д.М., Харламов С.А.* Динамика гироскопа в кардановом подвесе. М.: Наука, 1978. 208 с.
2. *Коносевич Б.И., Коносевич Ю.Б.* Об устойчивости стационарных движений гироскопа в кардановом подвесе, снабженного электродвигателем // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 3. С. 57–73.
3. *Коносевич Б.И., Коносевич Ю.Б.* Свойство притяжения стационарных движений гироскопа в кардановом подвесе, снабженного электродвигателем // Изв. РАН. МТТ. 2014. № 4. С. 3–14.
4. *Леонов Г.А., Зарецкий А.М.* Глобальная устойчивость и колебания динамических систем, описывающих синхронные электрические машины // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2012. № 4. С. 18–27.
5. *Коносевич Б.И., Коносевич Ю.Б.* Достаточное условие глобальной устойчивости модели синхронного электромотора при нелинейном моменте нагрузки // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 1. С. 74–85.
6. *Харламов П.В.* Составной пространственный маятник // Механика твердого тела. Донецк: Ин-т прикл. мат. и мех. 1972. Вып. 4. С. 73–82.
7. *Коносевич Б.И.* Скорость ухода оси ротора в обобщенной задаче о гироскопе в кардановом подвесе // Механика твердого тела. Донецк: Ин-т прикл. мат. и мех. 1972. Вып. 4. С. 82–92.
8. *Konosevich B., Konosevich Yu.* Global attraction of steady motions of a gimbal-mounted asynchronous gyroscope // Nonlinear Dynamics. 2015. V. 79. № 3. P. 2005–2015.  
<https://doi.org/10.1007/s11071-14-1789-z>

9. Коносевиц Б.И., Коносевиц Ю.Б., Мозалевская Г.В. Существование конструкций гироскопа в кардановом подвесе, реализующих случай постоянства приведенной потенциальной энергии // Тр. ин-та прикл. мат. и мех. Донецк: Ин-т прикл. мат. и мех. 2018. Т. 32. С. 28–39.
10. Salvatory L. Sulla stabilita del movimento // Matematiche. 1969. 24. P. 218–239. = Сальвадори Л. Об устойчивости движения // Механика. Период. сб. переводов иностр. статей. 1970. 6 (124). С. 3–19.
11. Коносевиц Б.И., Игнатъев А.О. О критерии устойчивости Рауса–Ляпунова–Сальвадори // Доповіді НАН України. 1997. № 10. С. 78–79.
12. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. 223 с.
13. LaSalle J., Lefschetz S. Stability by Liapunov's direct method with applications. Academic press, New York, London, 1961. = Ла-Салль Ж., Лефшец С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М.: Мир, 1964. 168 с.
14. Барбашин Е.А., Табуева В.А. Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М.: Наука, 1969. 300 с.