ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2019, № 6, с. 136–147

УДК 539.3

ВЛИЯНИЕ ОДНОРОДНОГО СТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ НА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ЭЛАСТОМЕРОВ ПРИ СТАТИЧЕСКИХ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Б. А. Жуков[a,b,*]

[a] *Волгоградский государственный социально-педагогический университет, Волгоград, Россия*

[b] *Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Россия*

**e -mail: zhukov.b.a@gmail.com*

Поступила в редакцию 11.01.2019 г.
После доработки 20.01.2019 г.
Принята к публикации 30.01.2019 г.

Продемонстрирована постановка задач термоупругости, учитывающая нелинейную зависимость теплового расширения от температуры при конечных деформациях. В рамках этой постановки показано существенное влияние теплового расширения эластомеров на напряженно-деформированное состояние. В качестве примера рассмотрена изотермическая деформация круглой эластомерной цилиндрической втулки с потенциалом энергии деформации Муни–Ривлина, подвергнутой на внутренней и внешней боковых поверхностях действию продольных сдвигающих сил. Далее, деформированная втулка помещается в однородное температурное поле, в котором она свободно расширяется.

Ключевые слова: термомеханика, экспоненциальный закон зависимости теплового расширения от температуры, конечные деформации, гиперупругость, несжимаемость, продольный сдвиг

DOI: 10.1134/S0572329919060138

1. Введение. Предполагается, что влияние поля температур на напряженно-деформированное состояние эластомеров проявляется двояко, через температурную зависимость модулей упругости и через механизм теплового расширения. Обычно при технических расчетах эластомеров температурной зависимостью модулей упругости пренебрегают, а тепловое расширение полагают подчиняющимся линейному закону $\lambda = 1 + \alpha\Delta T$, $\Delta T = T - T_0$, где α – линейный коэффициент теплового расширения, T_0 – начальная температура, T – текущая температура, λ – кратность удлинения материального волокна [1, 2]. Такой подход приводит к тому, что для эластомеров с их низкими модулями упругости вклад теплового расширения в напряженное состояние становится пренебрежимо мал, и термомеханика применяется только для расчетов теплообразования при циклическом нагружении [3]. В работе [4] со ссылкой на эксперимент, и в работе [5] в результате теоретических рассуждений заявлено, что при конечных деформациях тепловое расширение эластомеров подчиняется экспоненциальному закону $\lambda = e^{\alpha\Delta T}$. Ниже продемонстрирована постановка задач статики нелинейной термоупругости с экспоненциальным законом зависимости теплового расширения от температуры. На примере цилиндрической деформации (комбинации плоской и антиплоской деформации) [6], позволяющей получить для потенциала энергии

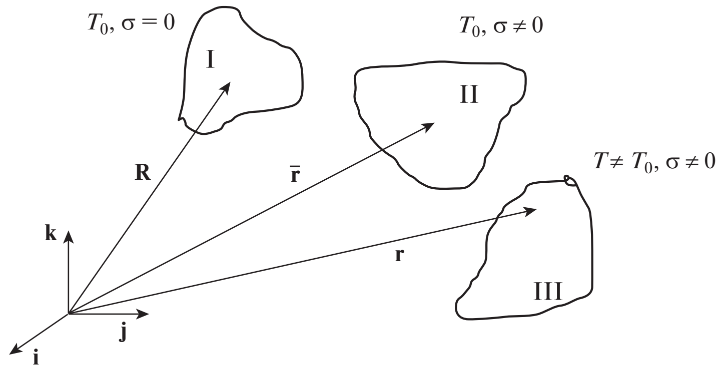

Рис. 1

деформации Муни—Ривлина точные решения, показано существенное влияние температуры на напряженно-деформированное состояние эластомеров.

2. Общая постановка. В работе рассматривается вариант процесса термоупругой деформации как композиции деформирования под действием напряжений при неизменной температуре T_0 и свободного теплового расширения при неизменных напряжениях и изменении температуры от T_0 до T. Внутренняя диссипация отсутствует, поэтому деформация под действием напряжений не меняет температуру. Другой вариант композиции свободного теплового расширения с нулевыми напряжениями при изменении температуры от T_0 до T и деформирования под действием напряжений при неизменной температуре T рассмотрен в [4]. Последний вариант отличается от представленного тем, что тепловое расширение происходит при нулевых напряжениях и не дает вклада в энергию деформации. Поле температур считается однородным. Неискаженную конфигурацию при $T = T_0$, $\sigma = 0$ полагаем отсчетной. Здесь σ — обозначение для напряжения.

Соотношения между конфигурациями и векторы места точек в этих конфигурациях изображены на рис. 1. Введем следующие тензоры градиентов деформации:

$$\begin{aligned} d\bar{\mathbf{r}} &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} \\ d\mathbf{r} &= \bar{\mathbf{F}} \cdot d\bar{\mathbf{r}} \\ d\mathbf{r} &= \mathbf{F}^* \cdot d\mathbf{R} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь F — тензор градиента изотермической деформации нелинейной теории упругости. Из (2.1) следует связь

$$\mathbf{F}^* = \bar{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F} \tag{2.2}$$

При конечных деформациях термически изотропного материала тензор градиента деформации теплового расширения $\bar{\mathbf{F}}$ представляется в виде [4, 5]

$$\bar{\mathbf{F}} = e^{\alpha\Delta T}\mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk}$$

Здесь E — единичный тензор, $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ — базис декартовой системы координат. Два рядом стоящих вектора — диада. Таким образом,

$$\mathbf{F}^* = e^{\alpha\Delta T}\mathbf{F}$$

Через тензор градиента деформации $\mathbf{F}^*$ выражаются правый $\mathbf{C}^*$ и левый $\mathbf{B}^*$ тензоры деформации Коши—Грина (значок Tr означает транспонирование, точка — скалярное произведение)

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^* &= \mathbf{F}^{*Tr} \cdot \mathbf{F}^* = \mathbf{F}^{Tr} \cdot \mathbf{F} e^{2\alpha\Delta T} = \mathbf{C} e^{2\alpha\Delta T} \\ \mathbf{B}^* &= \mathbf{F}^* \cdot \mathbf{F}^{*Tr} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{Tr} e^{2\alpha\Delta T} = \mathbf{B} e^{2\alpha\Delta T} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Их главные алгебраические инварианты имеют вид

$$\begin{gathered} I_1^* = \mathbf{C}^* \cdot\cdot\, \mathbf{E} = \mathbf{C} \cdot\cdot\, \mathbf{E} e^{2\alpha\Delta T} = I_1 e^{2\alpha\Delta T} \\ I_2^* = \frac{1}{2}(I_1^{*2} - \mathbf{C}^{*2} \cdot\cdot\, \mathbf{E}) = \frac{1}{2}(I_1^2 - \mathbf{C}^2 \cdot\cdot\, \mathbf{E}) e^{4\alpha\Delta T} = I_2 e^{4\alpha\Delta T} \\ I_3^* = \frac{1}{6}(I_1^{*3} - 3I_1^*\mathbf{C}^{*2} \cdot\cdot\, \mathbf{E} + 2\mathbf{C}^{*3} \cdot\cdot\, \mathbf{E}) = \frac{1}{6}(I_1^3 - 3I_1\mathbf{C}^2 \cdot\cdot\, \mathbf{E} + 2\mathbf{C}^3 \cdot\cdot\, \mathbf{E}) e^{6\alpha\Delta T} = I_3 e^{6\alpha\Delta T} \end{gathered} \tag{2.4}$$

Для изотермически несжимаемого материала $I_3 = 1$.

Материал полагается механически и термически однородным и изотропным, а так же гиперупругим (отсутствует внутренняя диссипация). Это подразумевает существование потенциала энергии деформации, зависящего только от главных инвариантов правого или левого тензоров деформации Коши и температуры $W^*(I_1^*, I_2^*, I_3^*, T)$ такого, что:

$$\mathbf{D}^* = \frac{\partial W^*}{\partial \mathbf{F}^{*Tr}} \tag{2.5}$$

Здесь $\mathbf{D}^*$ тензор напряжений Пиолы [7] (по [8] — транспонированный первый тензор напряжений Пиолы—Кирхгофа).

Проведем стандартные преобразования [7] в выражении (2.5) с учетом теплового расширения для изотермически сжимаемого $(I_3 \neq 1)$ материала

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^* &= \frac{\partial W^*}{\partial \mathbf{F}^{*Tr}} = 2\frac{\partial W^*}{\partial \mathbf{C}^*} \cdot \mathbf{F}^{*Tr} = 2\left[\frac{\partial W^*}{\partial I_1^*}\mathbf{F}^{Tr} + \frac{\partial W^*}{\partial I_2^*}(I_1^*\mathbf{E} - \mathbf{C}^*) \cdot \mathbf{F}^{*Tr} + I_3^*\frac{\partial W^*}{\partial I_3^*}\mathbf{F}^{*-1}\right] = \\ &= 2\mathbf{F}^{*-1} \cdot \left[\frac{\partial W^*}{\partial I_1^*}\mathbf{B}^* + \frac{\partial W^*}{\partial I_2^*}(I_1^*\mathbf{B}^* - \mathbf{B}^{*2}) + I_3^*\frac{\partial W^*}{\partial I_3^*}\mathbf{E}\right] = \\ &= 2\mathbf{F}^{*-1} \cdot \left[\frac{\partial W^*}{\partial I_1^*}\mathbf{B}^* - I_3^*\frac{\partial W^*}{\partial I_2^*}\mathbf{B}^{*-1} + \left(I_2^*\frac{\partial W^*}{\partial I_2^*} + I_3^*\frac{\partial W^*}{\partial I_3^*}\right)\mathbf{E}\right] \end{aligned}$$

Была использована теорема Гамильтона—Келли $I_1^*\mathbf{B}^* - \mathbf{B}^{*2} = I_2^*\mathbf{E} - I_3^*\mathbf{B}^{*-1}$.

Для изотермически несжимаемого материала ($I_3 = 1$, $I_3^* = e^{6\alpha\Delta T}$) используя множитель Лагранжа h^*, зависящий от координат точек и температуры, потенциал энергии деформации можно переписать в виде

$$W^* = W^*(I_1^*, I_2^*, T) + h^*(I_3 - 1)$$

Соотношение $I_3^*\partial W^*/\partial I_3^* = I_3\partial W^*/\partial I_3$, позволяет получить формулу

$$\mathbf{D}^* = 2\mathbf{F}^{*-1} \cdot \left[\frac{\partial W^*}{\partial I_1^*}\mathbf{B}^* - e^{6\alpha\Delta T}\frac{\partial W^*}{\partial I_2^*}\mathbf{B}^{*-1} + \left(I_2^*\frac{\partial W^*}{\partial I_2^*} + h^*\right)\mathbf{E}\right]$$

Введя обозначение $p^* = 4(I_2^* \partial W^*/\partial I_2^* + h^*)/\mu(T)$, получим

$$\mathbf{D}^* = \mathbf{F}^{*-1} \cdot 2\left[\frac{\partial W^*}{\partial I_1^*}\mathbf{B}^* - e^{6\alpha\Delta T}\frac{\partial W^*}{\partial I_2^*}\mathbf{B}^{*-1} + \frac{\mu(T)}{4}p^*\mathbf{E}\right] \tag{2.6}$$

Здесь $\mu(T)$ – модуль сдвига линейной теории. Перепишем (2.6) в форме

$$\mathbf{D}^* = e^{3\alpha\Delta T}\mathbf{F}^{*-1} \cdot 2\left[\frac{\partial W^*}{\partial I_1^*}e^{-3\alpha\Delta T}\mathbf{B}^* - e^{3\alpha\Delta T}\frac{\partial W^*}{\partial I_2^*}\mathbf{B}^{*-1} + \frac{\mu(T)}{4}p^* e^{-3\alpha\Delta T}\mathbf{E}\right]$$

Откуда, используя соотношение [7] $\mathbf{D}^* = \sqrt{I_3^*}\mathbf{F}^{*-1} \cdot \mathbf{S}^*$, где $\mathbf{S}^*$ – тензор напряжений Коши, следует выражение для тензора напряжений Коши

$$\mathbf{S}^* = 2\left[\frac{\partial W^*}{\partial I_1^*}e^{-3\alpha\Delta T}\mathbf{B}^* - e^{3\alpha\Delta T}\frac{\partial W^*}{\partial I_2^*}\mathbf{B}^{*-1} + \frac{\mu(T)}{4}p^* e^{-3\alpha\Delta T}\mathbf{E}\right]$$

В качестве потенциала энергии деформации возьмем вариант потенциала Муни–Ривлина в виде [9], то есть предполагается, что потенциал зависит от температуры неявно.

$$W^* = \frac{\mu(T)}{4}[(1+\beta)(I_1^* - 3) + (1-\beta)(I_2^* - 3)]$$

Здесь $\beta \in [-1,1]$ – безразмерный параметр. Это выражение позволяет записать $\mathbf{S}^*$ форме

$$\mathbf{S}^* = \frac{\mu(T)}{2}[(1+\beta)\mathrm{e}^{-3\alpha\Delta T}\mathbf{B}^* - (1-\beta)e^{3\alpha\Delta T}\mathbf{B}^{*-1} + p^*\mathrm{e}^{-3\alpha\Delta T}\mathbf{E}]$$

Используя соотношения (2.3), получим

$$\mathbf{S}^* = \frac{\mu(T)}{2}\mathrm{e}^{-3\alpha\Delta T}[(1+\beta)\mathbf{B}e^{2\alpha\Delta T} - (1-\beta)\mathbf{B}^{-1}e^{4\alpha\Delta T} + p^*\mathbf{E}] \tag{2.7}$$

В конфигурации I введем систему координат (q^1, q^2, q^3), которые будем считать материальными, тогда базисные векторы этой системы в этой конфигурации примут вид (крестик означает векторное произведение)

$$\mathbf{R}_k = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^k}, \quad \mathbf{R}^1 = \frac{\mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_3}{v}, \quad \mathbf{R}^2 = \frac{\mathbf{R}_3 \times \mathbf{R}_1}{v}, \quad \mathbf{R}^3 = \frac{\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2}{v}, \quad v = \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_3$$

Тензор градиента изотермической деформации связан с тензором градиента места соотношением

$$\mathbf{F}^{Tr} = \overset{0}{\nabla}\,\overline{\mathbf{r}} = \mathbf{R}^k \overline{\mathbf{r}}_k$$

Здесь $\overset{0}{\nabla} = \mathbf{R}^k \partial/\partial q^k$ – оператор Гамильтона в базисе I конфигурации. $\overline{\mathbf{r}}_k = \partial\overline{\mathbf{r}}/\partial q^k$ – базис материальной системы координат в конфигурации II.

Уравнение равновесия, в отсутствии объемных внешних усилий, имеет вид

$$\nabla^* \cdot \mathbf{S}^* = 0 \tag{2.8}$$

Здесь $\nabla^* = \mathbf{r}^{*k}\partial/\partial q^k$ – оператор Гамильтона в базисе III конфигурации, $\mathbf{r}^{*k}$ – базис, взаимный с базисом $\mathbf{r}_k^*$ материальной системы координат в конфигурации III. Справедливо представление $\mathbf{r}_k^* = \mathbf{F}^* \cdot \mathbf{R}_k = e^{\alpha\Delta T}\mathbf{F} \cdot \mathbf{R}_k = e^{\alpha\Delta T}\overline{\mathbf{r}}_k$ и $v^* = \mathbf{r}_1^* \cdot \mathbf{r}_2^* \times \mathbf{r}_3^* = e^{3\alpha\Delta T}\overline{\mathbf{r}}_1 \cdot \overline{\mathbf{r}}_2 \times \overline{\mathbf{r}}_3 = e^{3\alpha\Delta T}\overline{v}$. Следовательно, $\mathbf{r}^{*k} = e^{-\alpha\Delta T}\overline{\mathbf{r}}^k$ и

$$\nabla^* = e^{-\alpha\Delta T}\overline{\nabla}.$$

Подставляя (2.7) в (2.8), получим

$$\overline{\nabla} \cdot [(1+\beta)\mathbf{B}e^{2\alpha\Delta T} - (1-\beta)\mathbf{B}^{-1}e^{4\alpha\Delta T}] = -\overline{\nabla}p^* \tag{2.9}$$

Исключая в (2.9) гидростатическую функцию, получим уравнение для нахождения деформации из конфигурации I в конфигурацию II.

$$\overline{\nabla} \times \overline{\nabla} \cdot [(1+\beta)\mathbf{B}e^{2\alpha\Delta T} - (1-\beta)\mathbf{B}^{-1}e^{4\alpha\Delta T}] = 0 \tag{2.10}$$

Присутствие экспоненциальных множителей объясняется формулировкой уравнений равновесия в конфигурации III.

Силовые граничные условия можно записать в виде

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}^* = \mathbf{f}^* \tag{2.11}$$

Здесь $\mathbf{n}$ – единичный внешний нормальный вектор к граничной поверхности в конфигурации III, $\mathbf{f}^*$ – плотность внешних поверхностных сил, приложенных к границе конфигурации III и рассчитанная на единицу поверхности в этой конфигурации.

3. Случай, когда изотермическая деформация является цилиндрической [6]. Рассматривается изотермическая деформация круглой цилиндрической втулки, подвергнутой на внутренней и внешней боковых поверхностях действию продольных сдвигающих сил $\mathbf{Q} = Q\mathbf{k}$ при температуре T_0. Через R_1 и R_2 обозначаются внутренний и внешний радиусы втулки, а через H ее длина. Далее деформированная втулка помещается в однородное температурное поле T, в котором она свободно расширяется.

Решение проводится полуобратным методом. В качестве материальной системы координат выбрана цилиндрическая система (R, Φ, Z), причем ось OZ совпадает с осью симметрии втулки. Втулка считается достаточно длинной, чтобы пренебречь торцевыми эффектами и считать напряженно-деформированное состояние независящим от Z. В этих условиях для описания цилиндрической деформации можно использовать кинематическую гипотезу коаксиальных сечений, то есть сечения цилиндрические и коаксиальные до деформации остаются таковыми и после деформации (ось единая для всех таких сечений совпадает с осью симметрии втулки). В цилиндрической системе координат в силу осевой симметрии вектор места в конфигурации II задается соотношением

$$\overline{\mathbf{r}} = f(R)\mathbf{e}_R + [Z + w(R)]\mathbf{k}$$

Здесь $w(R)$ и $f(R)$ подлежащие определению функции, $\{\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\Phi, \mathbf{k}\}$ – единичный базис цилиндрической системы координат с оператором Гамильтона

$$\overset{0}{\nabla} = \mathbf{e}_R \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\mathbf{e}_\Phi}{R}\frac{\partial}{\partial \Phi} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial Z}$$

Тензор градиента места получается в виде

$$\overset{0}{\nabla}\,\overline{\mathbf{r}} = \frac{df(R)}{dR}\mathbf{e}_R\mathbf{e}_R + \frac{f(R)}{R}\mathbf{e}_\Phi\mathbf{e}_\Phi + \frac{dw(R)}{dR}\mathbf{e}_R\mathbf{k} + \mathbf{k}\mathbf{k}$$

Так, что условие несжимаемости ($\det \overset{0}{\nabla}\,\overline{\mathbf{r}} = 1$) принимает форму дифференциального уравнения $ff' = R$ (штрих означает производную по R), решение которого имеет вид $f(R) = \sqrt{R^2 + R_1^2\eta}$. Здесь η постоянная интегрирования, в дальнейшем играющая роль безразмерного параметра. Таким образом, имеем

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{R}{\xi(R)}\mathbf{e}_R + [Z + w(R)]\mathbf{k}, \quad \xi(R) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + R_1^2\eta}} \tag{3.1}$$

$$\mathbf{F}^{Tr} = \xi(R)\mathbf{e}_R\mathbf{e}_R + \frac{1}{\xi(R)}\mathbf{e}_\Phi\mathbf{e}_\Phi + w'(R)\,\mathbf{e}_R\mathbf{k} + \mathbf{kk}$$

$$\mathbf{F} = \xi(R)\mathbf{e}_R\mathbf{e}_R + \frac{1}{\xi(R)}\mathbf{e}_\Phi\mathbf{e}_\Phi + w'(R)\,\mathbf{k}\mathbf{e}_R + \mathbf{kk}$$

$$\mathbf{B} = \xi^2(R)\mathbf{e}_R\mathbf{e}_R + \frac{1}{\xi^2(R)}\mathbf{e}_\Phi\mathbf{e}_\Phi + \xi(R)w'(R)(\mathbf{e}_R\mathbf{k} + \mathbf{k}\,\mathbf{e}_R) + [1 + w'^2(R)]\mathbf{kk} \tag{3.2}$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{1 + w'^2(R)}{\xi^2(R)}\mathbf{e}_R\mathbf{e}_R + \xi^2(R)\mathbf{e}_\Phi\mathbf{e}_\Phi - \frac{w'(R)}{\xi(R)}(\mathbf{e}_R\mathbf{k} + \mathbf{k}\mathbf{e}_R) + \mathbf{kk} \tag{3.3}$$

Подставляя эти выражения в (2.7), получим

$$\begin{gathered}\mathbf{S}^* = \frac{\mu(T)}{2}e^{-3\alpha\Delta T}\{[(1+\beta)e^{2\alpha\Delta T}\xi^2(R) - (1-\beta)e^{4\alpha\Delta T}[1 + w'^2(R)]\xi^{-2}(R) + p^*]\mathbf{e}_R\mathbf{e}_R + \\ + [(1+\beta)e^{2\alpha\Delta T}\xi^{-2}(R) - (1-\beta)e^{4\alpha\Delta T}\xi^2(R) + p^*]\mathbf{e}_\Phi\mathbf{e}_\Phi + \\ + w'(R)[(1+\beta)e^{2\alpha\Delta T}\xi(R) + (1-\beta)e^{4\alpha\Delta T}\xi^{-1}(R)](\mathbf{e}_R\mathbf{k} + \mathbf{k}\mathbf{e}_R) + \\ + [(1+\beta)e^{2\alpha\Delta T}[1 + w'^2(R)] - (1-\beta)e^{4\alpha\Delta T} + p^*]\mathbf{kk}\}\end{gathered} \tag{3.4}$$

По (3.1) базисные векторы материальной системы координат в конфигурации II имеют вид $\bar{\mathbf{r}}_1 = \xi(R)\mathbf{e}_R + w'(R)\mathbf{k}$, $\bar{\mathbf{r}}_2 = R/\xi(R)\mathbf{e}_\Phi$, $\bar{\mathbf{r}}_3 = \mathbf{k}$, по ним вычисляется сопряженный базис и оператор Гамильтона в базисе II конфигурации

$$\bar{\nabla} = \frac{\mathbf{e}_R}{\xi(R)}\frac{\partial}{\partial R} + \frac{\xi(R)\mathbf{e}_\Phi}{R}\frac{\partial}{\partial \Phi} + \left[\mathbf{k} - \frac{w'(R)}{\xi(R)}\mathbf{e}_R\right]\frac{\partial}{\partial Z} \tag{3.5}$$

Подставляя (3.2), (3.3) в (2.9), учитывая (3.5) и приравнивая к нулю компоненты полученного вектора, имеем уравнения равновесия

$$\left\{\frac{R}{\xi(R)}[(1+\beta)\,e^{2\alpha\Delta T}\xi(R) + (1-\beta)\,e^{4\alpha\Delta T}\xi^{-1}(R)]w'(R)\right\}' = 0 \tag{3.6}$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{R}\left\{\frac{R}{\xi(R)}[(1+\beta)\,e^{2\alpha\Delta T}\xi^2(R) - (1-\beta)\,e^{4\alpha\Delta T}[1 + w'^2(R)]\xi^{-2}(R)]\right\}' - \\ - \frac{\xi(R)}{R}[(1+\beta)\,e^{2\alpha\Delta T}\xi^{-2}(R) - (1-\beta)\,e^{4\alpha\Delta T}\xi^2(R)] = -\frac{1}{\xi(R)}p^{*\prime}\end{gathered} \tag{3.7}$$

Уравнение (2.10) сводится к виду

$$\left\{\frac{R}{\xi(R)}\left[(1+\beta)\,e^{2\alpha\Delta T}\xi(R) + (1-\beta)\,e^{4\alpha\Delta T}\xi^{-1}(R)\right]w'(R)\right\}'' = 0$$

и является следствием (3.6).

Из уравнения (3.6) следует, что

$$[(1+\beta)\,e^{2\alpha\Delta T}\xi(R) + (1-\beta)\,e^{4\alpha\Delta T}\xi^{-1}(R)]w'(R) = \frac{c\xi(R)}{R} \tag{3.8}$$

где c — константа интегрирования.

Вектор единичной нормали $\mathbf{n}$ к любой цилиндрической поверхности $R = \text{const}$ внутри втулки в процессе термоупругой деформации не меняется и совпадает с $\mathbf{e}_R$. Будем считать, что внешняя нагрузка $\mathbf{Q} = Q\mathbf{k}$ "мертвая" и в процессе теплового расширения не меняется, поэтому ее можно вычислить до теплового расширения. $Q\mathbf{k} = \iint_{\Sigma} \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{S}} d\bar{\sigma}$. Здесь $\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{S}^*|_{\Delta T = 0}$, $d\bar{\sigma} = R/\xi(R)\, d\Phi dZ$. Далее

$$\frac{Q}{H}\mathbf{k} = \int_0^{2\pi} \mathbf{e}_R \cdot \bar{\mathbf{S}} \frac{R}{\xi(R)} d\Phi = \int_0^{2\pi} [\bar{S}_{RR}\mathbf{e}_R + \bar{S}_{RZ}\mathbf{k}] \frac{R}{\xi(R)} d\Phi = 2\pi \bar{S}_{RZ} \frac{R}{\xi(R)} \mathbf{k} =$$
$$= \pi\mu(T_0)[(1+\beta)\xi(R) + (1-\beta)\xi^{-1}(R)] w'(R) \frac{R}{\xi(R)} \mathbf{k} = \pi\mu(T_0) c\mathbf{k}$$

Использованы выражения (3.4) и (3.8) при $\Delta T = 0$. Из последнего соотношения получаем $c = Q(\pi\mu(T_0) H)^{-1}$, и из (3.4) следуют выражение для касательных напряжений

$$\sigma_{RZ} = S^*_{RZ} = \frac{\mu(T)}{\mu(T_0)} \frac{Q}{2\pi H e^{3\alpha\Delta T}\sqrt{R^2 + R_1^2\eta}} \tag{3.9}$$

а так же уравнение для нахождения продольного сдвига

$$w'(R) = \frac{QR}{\pi\mu(T_0) H[(1+\beta)e^{2\alpha\Delta T}R^2 + (1-\beta)e^{4\alpha\Delta T}(R^2 + R_1^2\eta)]} \tag{3.10}$$

Из (3.10) следует, что при заданном Q температура влияет на продольное смещение только через тепловое расширение и параметр η, тогда как по (3.9) на распределение касательных напряжений она влияет еще и через зависимость $\mu(T)$.

Для нахождения параметра η обратимся к плоской части цилиндрического напряженного состояния, порожденного конечным осевым сдвигом [6]. Уравнение (3.7) позволяет найти функцию гидростатического давления

$$p^* = \int_{R_1}^{R} \frac{\xi^2(s)}{s} [(1+\beta) e^{2\alpha\Delta T}\xi^{-2}(s) - (1-\beta) e^{4\alpha\Delta T}\xi^2(s)] -$$
$$- \frac{\xi(s)}{s} \frac{d}{ds} \left\{ \frac{s}{\xi(s)} [(1+\beta) e^{2\alpha\Delta T}\xi^2(s) - (1-\beta) e^{4\alpha\Delta T}[1 + w'^2(s)]\xi^{-2}(s)] \right\} ds + p_0$$

Здесь $\xi(R)$ и $w'(R)$ определяются формулами (3.1) и (3.10).

Из силовых граничных условий следует отсутствие нормальных напряжений на боковых поверхностях втулки $S^*_{RR}(R_1) = S^*_{RR}(R_2) = 0$. Получаем два уравнения для нахождения p_0 и η.

Перейдем к безразмерным переменным и параметрам

$$v = \frac{w}{R_1}, \quad \rho = \frac{R}{R_1}, \quad \kappa = \frac{R_2}{R_1}, \quad \delta = \frac{\Delta}{R_1}, \quad w'(R) = \frac{dw(R)}{dR} = \frac{dv(\rho)}{d\rho} = \dot{v}(\rho)$$

а так же введем плотность сдвигового усилия, отнесенную к площади внутренней боковой поверхности в отсчетной конфигурации I.

$$q = \frac{Q}{2\pi R_1 H}$$

В новых переменных выражение для касательных напряжений и уравнение для нахождения продольного смещения примут вид

$$\sigma_{RZ} = \frac{\mu(T)}{\mu(T_0)} \frac{q}{e^{3\alpha\Delta T}\sqrt{\rho^2+\eta}}, \quad \rho \in [1,\kappa] \tag{3.11}$$

$$\dot{v} = \frac{2q\rho}{\mu(T_0)[(1+\beta)e^{2\alpha\Delta T}\rho^2 + (1-\beta)e^{4\alpha\Delta T}(\rho^2+\eta)]} \tag{3.12}$$

Для исключения продольного смещения втулки как жесткого целого потребуем, чтобы внутренняя обойма не смещалась, тогда выражение для продольного сдвига получится в форме

$$v(\rho) = \frac{2q}{\mu(T_0)} \int_1^\rho \frac{tdt}{[(1+\beta)e^{2\alpha\Delta T}t^2 + (1-\beta)e^{4\alpha\Delta T}(t^2+\eta)]} \tag{3.13}$$

Из (3.13) получаем жесткостную характеристику втулки для продольного сдвига

$$\delta = \frac{2q}{\mu(T_0)} \int_1^\kappa \frac{\rho d\rho}{(1+\beta)e^{2\alpha\Delta T}\rho^2 + (1-\beta)e^{4\alpha\Delta T}(\rho^2+\eta)} \tag{3.14}$$

Функция гидростатического давления примет вид

$$\begin{gathered} p^*(\rho) = \int_1^\rho \frac{\xi^2(t)}{t}[(1+\beta)e^{2\alpha\Delta T}\xi^{-2}(t) - (1-\beta)e^{4\alpha\Delta T}\xi^2(t)] - \\ - \frac{\xi(t)}{t}\frac{d}{dt}\left\{\frac{t}{\xi(t)}[(1+\beta)e^{2\alpha\Delta T}\xi^2(t) - (1-\beta)e^{4\alpha\Delta T}[1+\dot{v}^2(t)]\xi^{-2}(t)]\right\}dt + p_0 \end{gathered} \tag{3.15}$$

Здесь $\xi(t) = t(t^2+\eta)$ и $\dot{v}(t)$ находится по (3.12).

Уравнения для нахождения p_0 и η запишутся в форме

$$\begin{cases} (1+\beta)e^{2\alpha\Delta T}\xi^2(1) - (1-\beta)e^{4\alpha\Delta T}[1+\dot{v}^2(1)]\xi^{-2}(1) + p^*(1) = 0 \\ (1+\beta)e^{2\alpha\Delta T}\xi^2(\kappa) - (1-\beta)e^{4\alpha\Delta T}[1+\dot{v}^2(\kappa)]\xi^{-2}(\kappa) + p^*(\kappa) = 0 \end{cases} \tag{3.16}$$

4. Решение поставленной задачи. Из первого уравнения в (3.16) и выражения для p^* следует

$$p_0^* = -(1+\beta)e^{2\alpha\Delta T}\xi^2(1) + (1-\beta)e^{4\alpha\Delta T}[1+\dot{v}^2(1)]\xi^{-2}(1) \tag{4.1}$$

Подставляя (4.1) в выражение для p^*, а последнее во второе уравнение (3.16)

$$\begin{gathered} (1+\beta)e^{2\alpha\Delta T}\xi^2(\kappa) - (1-\beta)e^{4\alpha\Delta T}[1+\dot{v}^2(\kappa)]\xi^{-2}(\kappa) + \\ + \int_1^\kappa \frac{\xi^2(t)}{t}[(1+\beta)e^{2\alpha\Delta T}\xi^{-2}(t) - (1-\beta)e^{4\alpha\Delta T}\xi^2(t)] - \\ - \frac{\xi(t)}{t}\frac{d}{dt}\left\{\frac{t}{\xi(t)}[(1+\beta)e^{2\alpha\Delta T}\xi^2(t) - (1-\beta)e^{4\alpha\Delta T}[1+\dot{v}^2(t)]\xi^{-2}(t)]\right\}dt - \\ - (1+\beta)e^{2\alpha\Delta T}\xi^2(1) + (1-\beta)e^{4\alpha\Delta T}[1+\dot{v}^2(1)]\xi^{-2}(1) = 0 \end{gathered} \tag{4.2}$$

получим уравнение, связывающее η и q (последнее входит в выражение для $\dot{v}$, а первое входит в выражения для ξ и $\dot{v}$).

Вычисляя интегралы в (3.13), (3.14), (3.15) с учетом (4.1), имеем

$$v = \frac{q\ln\left(\dfrac{(\rho^2+\eta)(1-\beta)\mathrm{e}^{4\alpha\Delta T}+\rho^2(1+\beta)\mathrm{e}^{2\alpha\Delta T}}{(\eta+1)(1-\beta)\mathrm{e}^{4\alpha\Delta T}+(1+\beta)\mathrm{e}^{2\alpha\Delta T}}\right)}{\mu(T_0)((1-\beta)\mathrm{e}^{4\alpha\Delta T}+(1+\beta)\mathrm{e}^{2\alpha\Delta T})}$$

$$\frac{dv}{d\rho} = \frac{2q\rho}{\mu(T_0)[(\rho^2+\eta)(1-\beta)\mathrm{e}^{4\alpha\Delta T}+\rho^2(\beta+1)\mathrm{e}^{2\alpha\Delta T}]}$$

$$\delta = \frac{q\ln\left(\dfrac{(\kappa^2+\eta)(1-\beta)\mathrm{e}^{4\alpha\Delta T}+\kappa^2(\beta+1)\mathrm{e}^{2\alpha\Delta T}}{(\eta+1)(1-\beta)\mathrm{e}^{4\alpha\Delta \mathrm{T}}+(\beta+1)\mathrm{e}^{2\alpha\Delta T}}\right)}{\mu(T_0)((1-\beta)\mathrm{e}^{4\alpha\Delta T}+(\beta+1)\mathrm{e}^{2\alpha\Delta T})} \tag{4.3}$$

$$p^* = [(1-\beta)e^{4\alpha\Delta T}+(1+\beta)e^{2\alpha\Delta T}]\ln\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+\eta}} - \frac{\eta(\beta-1)(\rho^2+2\eta)e^{4\alpha\Delta T}}{2\rho^2(\rho^2+\eta)} +$$

$$+\frac{\eta(1+\beta)e^{2\alpha\Delta T}}{2(\rho^2+\eta)} + \frac{[-2(\beta-1)^2(\rho^2+\eta)e^{4\alpha\Delta T}+2(\beta^2-1)e^{2\alpha\Delta T}]q^2}{\mu(T_0)^2[e^{2\alpha\Delta T}(\beta-1)-(\beta+1)][(\rho^2+\eta)(\beta-1)e^{2\alpha\Delta T}-\rho^2(\beta+1)]^2} +$$

$$+\frac{1}{2}[(1-\beta)e^{4\alpha\Delta T}+(\beta+1)e^{2\alpha\Delta T}]\ln(1+\eta) + \frac{\eta(\beta-1)(1+2\eta)e^{4\alpha\Delta T}}{2(1+\eta)} -$$

$$-\frac{\eta(1+\beta)e^{2\alpha\Delta T}}{2(1+\eta)} - \frac{[-2(\beta-1)^2(1+\eta)e^{4\alpha\Delta T}+2(\beta^2-1)e^{2\alpha\Delta T}]q^2}{\mu(T_0)^2[e^{2\alpha\Delta T}(\beta-1)-(\beta+1)][(1+\eta)(\beta-1)e^{2\alpha\Delta T}-(\beta+1)]^2} -$$

$$-\frac{(\beta+1)e^{2\alpha\Delta T}}{\eta+1} + (1-\beta)e^{4\alpha\Delta T}(\eta+1)\left[1+\frac{4q^2}{[(\beta-1)(1+\eta)e^{4\alpha\Delta T}-(\beta+1)e^{2\alpha\Delta T}]^2\mu(T_0)^2}\right]$$

Найденные выражения подставляются в (4.2), получаем уравнение для нахождения η, которое не приводится из-за громоздкости. Решая его для заданных q, α, β, $\mu(T_0)$, получим η. То есть на параметр η температура влияет только через тепловое расширение. Далее по (3.11) вычисляется радиальное распределение сдвиговых касательных напряжений, а по (4.3) вычисляются жесткостные кривые продольного сдвига.

Зависимость $\mu(T)$ в области высокоэластичной деформации в [10] аппроксимируется выражением $\mu(T) = (273 + \Delta T)\rho_m R_m / M_m$. Здесь ρ_m – массовая плотность эластомера, R_m – универсальная газовая постоянная, M_m – средняя молекулярная масса эластомера. Таким образом, $\mu(T)/\mu(T_0) = 1 + \Delta T/273$.

Отметим роль параметра $\beta \in [-1,1]$. При $\beta = 1$ потенциал Муни–Ривлина переходит в потенциал Трелоара, $\eta = 0$, напряжения и деформации в поперечной плоскости отсутствуют и напряженно-деформированное состояние становится антиплоским.

$$\sigma_{RZ} = \left(1+\frac{\Delta T}{273}\right)e^{-3\alpha\Delta T}\frac{q}{\rho}, \quad \rho = 1\ldots\kappa, \quad \delta = \frac{q\ln(\kappa)}{\mu(T_0)\,\mathrm{e}^{2\alpha\Delta T}} \tag{4.4}$$

Из этих соотношений видно, что жесткость на сдвиг с ростом температуры растет, поведение распределения касательных напряжений определяется коэффициентом $kt = (1 + \Delta T/273)\,e^{-3\alpha\Delta T}$. Для $\alpha = 0.0002$ [1] он больше единицы и растет с ростом температуры. На рис. 2 представлены жесткостные характеристики (a) и распределения касательных напряжений σ_{RZ} (b) для (4.4) при температуре $\Delta T = 20°\mathrm{C}$ (кривая *1*) и $\Delta T = 60°\mathrm{C}$ (кривая *2*) для втулки с $\kappa = 2$. Здесь и ниже $\mu(T_0) = 5$ мПа, а распределения касательных напряжений вычисляются при $q = 2$ мПа.

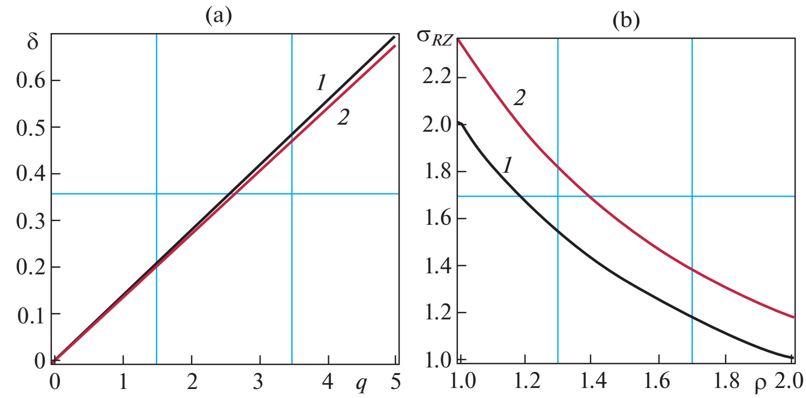

Рис. 2

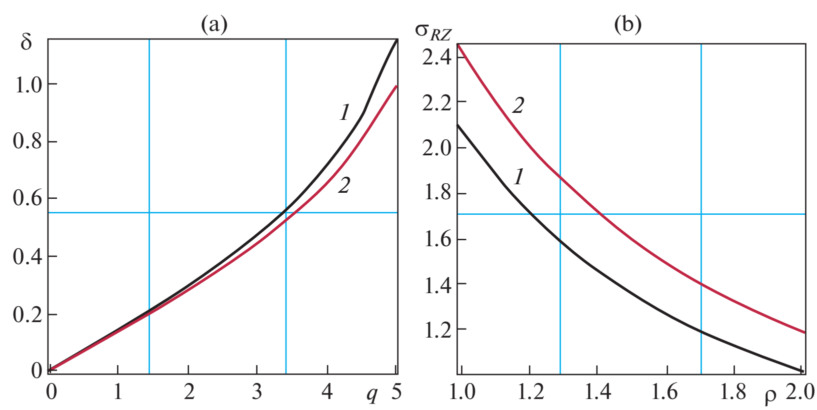

Рис. 3

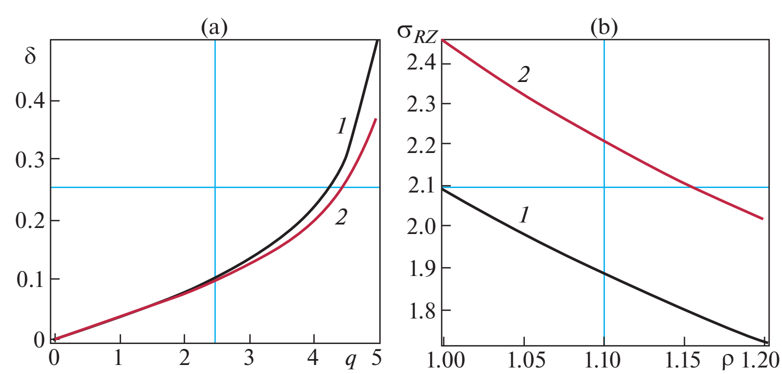

Рис. 4

С убыванием β от 1 до -1 увеличивается $|\eta|$ и возникает плоское напряженно-деформированное состояние в поперечной плоскости, причем $S_{RR} \neq 0$, $S_{\Phi\Phi} \neq 0$, $S_{R\Phi} = 0$. На рис. 3 и 4 представлены жесткостные характеристики (a) и распределения касательных напряжений σ_{RZ} (b) при $\beta = -1$.

Для возможности визуального сравнения на одной фигуре распределения касательных напряжений они приведены для поперечного сечения в недеформированной конфигурации. Рис. 3 соответствует $\kappa = 2$, а рис. 4 соответствует $\kappa = 1.2$. Кривые *1* отвечают температуре $\Delta T = 20°\text{C}$, а кривые *2* отвечают температуре $\Delta T = 60°\text{C}$. Повышение температуры увеличивает продольную жесткость втулки и сдвиговые касательные напряжения.

Толщина втулки практически не влияет на концентрацию напряжений (только через параметр η). Введем коэффициент концентрации касательных напряжений в виде $K[i] = \max \sigma_{RZ}[i]/q$ для i-й кривой. Тогда для втулки с $\kappa = 2$, $\kappa = 1.2$ K [1] = 1.05, K [2] = 1.23, так что коэффициент концентрации увеличивается в 1.17 раза. Сильнее толщина влияет на эффект увеличения жесткости втулки на сдвиг с ростом температуры. Так для $\kappa = 2$ максимальная разница между жесткостными кривыми *1* и *2* составляет 9%, а для $\kappa = 1.2$–13.3%. Эффект от повышения температуры является существенным как для концентрации касательных напряжений, так и для жесткостных кривых.

5. Заключение. Продемонстрирована постановка задач термоупругости, учитывающая нелинейную зависимость теплового расширения от температуры при конечных деформациях. В рамках этой постановки показано существенное влияние тепловых процессов на напряженно-деформированное состояние. Это два конкурирующих процесса – тепловое расширение эластомеров и увеличение модуля сдвига с ростом температуры. Первый снижает напряжения при “мертвой” нагрузке, а второй увеличивает. Для коэффициента теплового расширения $\alpha = 0.0002$ характерного для эластомеров и аппроксимации $\mu(T) = (273 + \Delta T)\rho_m R_m / M_m$ в области высокоэластичной деформации второй процесс превалирует над первым.

В качестве примера рассмотрена изотермическая деформация круглой эластомерной цилиндрической втулки, подвергнутой на внутренней и внешней боковых поверхностях действию продольных сдвигающих сил с модулем Q при температуре T_0. Далее, деформированная втулка помещается в однородное температурное поле T, в котором она свободно расширяется. Потенциал энергии деформации Муни–Ривлина взят в виде $W^* = [(1+\beta)(I_q^* - 3) + (1-\beta)(I_2^* - 3)]\mu(T)/4$, $\beta \in [-1,1]$. При $\beta = 1$ потенциал Муни–Ривлина переходит в потенциал Трелоара, напряжения и деформации в поперечной плоскости отсутствуют и напряженно-деформированное состояние становится антиплоским. С убыванием β от 1 до -1 возникает плоская составляющая цилиндрического напряженно-деформированного состояния. Повышение температуры увеличивает продольную жесткость втулки и повышает сдвиговые касательные напряжения, увеличивая их концентрацию. Этот эффект не зависит от толщины втулки для распределения касательных напряжений и заметно зависит от нее для жесткостных кривых. Эффект от повышения температуры является существенным как для концентрации касательных напряжений, так и для жесткостных кривых.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бухина М. Ф.* Техническая физика эластомеров. М.: Химия, 1984. 224 с.

2. *Лавендел Э.Э.* Расчет резинотехнических изделий. М.: Машиностроение, 1976. 232 с.

3. Прикладные методы расчета изделий из высокоэластичных материалов / Дымников С. И., Лавендел Э. Э., Павловскис А. А., Сниегс. М.И.; Под ред. Лавендела Э.Э. Рига: Зинатне, 1980. 238 с.
4. *Macon J. D.* Thermal and mechanical behavior of rubber systems. (1997). Doctoral Dissertations 1896 – February 2014. 95. http://scholarworks.umass.edu/dissertations_1/956
5. *Пальмов В. А.* Определяющие уравнения термоупругих, термовязких и термопластических материалов: учеб. пособие / В. А. Пальмов. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2009. 138 с.
6. *Жуков Б.А.* Плоское напряженно-деформированное состояние круговой цилиндрической втулки, порожденное конечным антиплоским сдвигом // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 1. С. 136–144.
7. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
8. *Truesdell C., Noll W.* The Non-linear Field Theories of Mechanics. N. Y.: Springer, 2003. 602 p.
9. *Черных К.Ф., Шубина И.М.* Законы упругости для изотропных несжимаемых материалов, феноменологический подход // Механика эластомеров. Краснодар, 1977. Т. 1. Вып. 242. С. 54–64.
10. *Трелоар Л.* Физика упругости каучука. М.: Инлит, 1953. 369 с.