ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2019, № 6, с. 68–75

УДК 539.3

ВАРИАНТ СООТНОШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРУГОСТИ

© 2019 г. А. А. Маркин[a,*], М. Ю. Соколова[a]

[a] *Тульский государственный университет, Тула, Россия*
**e-mail: markin-nikram@yandex.ru*

Поступила в редакцию 18.04.2018 г.
После доработки 18.04.2018 г.
Принята к публикации 01.03.2019 г.

Предложена нелинейная модель изотропного упругого материала, являющаяся обобщением модели Мурнагана, в которой использовано разложение удельной потенциальной энергии деформаций в ряд по степеням тензора логарифмических деформаций Генки. Определен физический смысл констант, входящих в полученные соотношения. Наряду с модулем объемной упругости K и модулем сдвига G использованы константы c_1, c_2, c_3, связанные с модулями упругости третьего порядка: константа c_1 отражает нелинейную зависимость гидростатического напряжения от объемной деформации, константа c_2 отражает дилатационный эффект, а константа c_3 – отклонение угла вида напряженного состояния от угла вида деформированного состояния.

Статья посвящается светлой памяти выдающихся ученых А.А. Ильюшина и Л.А. Толоконникова, идеи которых получили развитие в этой работе.

Ключевые слова: нелинейность, упругость, гиперупругость, конечные деформации, тензор Генки, материал Мурнагана

DOI: 10.1134/S0572329919060096

1. Введение. Основы нелинейной теории упругости заложены в работах российских ученых В.В. Новожилова [1], Л.А. Толоконникова [2], А.И. Лурье [3] в середине прошлого века, но и сейчас интерес к построению вариантов моделей нелинейной упругости изотропного материала не ослабевает. В последнее десятилетие количество работ, касающихся построения упругих потенциалов для сжимаемых и несжимаемых изотропных тел, как в нашей стране, так и за рубежом многократно возросло. Это связано с тем, что наряду с известными нелинейно деформируемыми упругими материалами, такими как резины, каучуки, эластомеры, в поле зрения исследователей попали и новые материалы, для которых характер деформирования соответствует модели нелинейно упругого изотропного материала. Например, в работе [4] построена модель материала, полученного переработкой шин и обладающего высокой нелинейностью объемных деформаций. Применение соотношений нелинейной упругости для моделирования клеточных структур (пены) продемонстрировано в работе [5]. Большое число современных публикаций посвящено построению моделей нелинейной упругости для описания мягких биологических тканей.

В работах [4, 6, 7] отмечается, что модель материала Генки хорошо описывает экспериментальные данные до деформаций порядка 30–40%. Материалом Генки называют модель изотропного упругого материала с линейными определяющими соотношениями, связывающими тензор логарифмических деформаций с обобщенным “повернутым" тензором напряжений. В работах [4, 7–9] отмечается, что тензор деформаций Генки обладает свойствами, позволяющими естественным образом обобщать с его помощью нелинейные соотношения, хорошо зарекомендовавшие себя при малых деформациях.

Модели гиперупругих изотропных материалов, построенные с использованием меры логарифмических деформаций Генки, нашли достаточно широкое распространение. Упругие потенциалы как функции собственных значений или алгебраических инвариантов тензора Генки известны, например, из работ [4, 7, 8, 10, 11]. В большинстве известных работ не обсуждаются физические аспекты выбора выражения для упругого потенциала, а также остается открытым вопрос о том, как экспериментально определить входящие в эти выражения материальные константы или функции.

В настоящей статье предлагается разложение упругого потенциала в ряд по степеням тензора деформаций Генки, что является обобщением известных работ [3, 12], в которых в подобном разложении использовался тензор деформаций Коши–Грина. В статье показано, что удержание в разложении упругого потенциала членов второго порядка соответствует модели материала Генки, а сохранение членов второй и третьей степеней приводит к модели материала, являющейся обобщением известной модели Мурнагана, широко применяющейся в расчетной практике для сжимаемых упругих изотропных материалов.

2. Меры конечных деформаций и напряжений. Рассмотрим движение материального объема V изотропной упругой среды, который в начальный момент t_0 занимал пространственную область V_0. Положение материальной точки в области V_0 определим радиус-вектором $\mathbf{r}_0(r_1, r_2, r_3)$, а для той же точки в области V положение определяется радиус-вектором $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$. Закон движения точек среды задается соотношением

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{r}, t)$$

Деформация среды в окрестности материальной точки $\mathbf{x}$ определяется дифференциальной формой закона движения

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{r} \cdot \mathbf{\Phi}(\mathbf{r}, t)$$

где $\mathbf{\Phi}(\mathbf{r}, t) = \nabla_0 \mathbf{x}$ – тензор-аффинор деформации.

На основании известной теоремы о полярном разложении произвольного тензора представим аффинор деформации в виде

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{V}$$

где симметричные тензоры $\mathbf{U} = \mathbf{U}^{\mathrm{т}}$, $\mathbf{V} = \mathbf{V}^{\mathrm{т}}$ называют правой и левой мерами искажений, а тензор $\mathbf{R}$ является ортогональным тензором, сопровождающим деформацию ($\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^{\mathrm{т}}$).

Тензоры $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ используются для определения материального (лагранжева, правого) и пространственного (эйлерова, левого) логарифмических тензоров деформаций (тензоров Генки):

$$\mathbf{\Gamma} = \ln \mathbf{U}, \quad \mathbf{\Gamma}_{\mathrm{V}} = \ln \mathbf{V} \tag{2.1}$$

Тензоры (2.1) наряду с тензором деформаций Коши $\boldsymbol{\varepsilon} = 0.5(\mathbf{U}^2 - \mathbf{E})$ и тензором деформаций Альманси $\mathbf{A} = 0.5(\mathbf{E} - \mathbf{V}^{-2})$ широко используются при описании конечных деформаций среды [3, 9, 10]. В работах [4, 9, 10] отмечаются важные свойства меры деформаций Генки: во-первых, шаровая и девиаторная составляющие тензора

$\mathbf{\Gamma} = \theta\mathbf{E}/3 + \tilde{\mathbf{\Gamma}}$ изменяются независимо в процессах изменения объема и процессах формоизменения; во-вторых, инварианты тензора Генки

$$\theta = \mathbf{\Gamma}\cdot\cdot\mathbf{E}, \quad e^2 = \tilde{\mathbf{\Gamma}}\cdot\cdot\tilde{\mathbf{\Gamma}}, \quad \left|\tilde{\mathbf{\Gamma}}\right| = \frac{1}{3\sqrt{6}}e^3\cos 3\gamma \tag{2.2}$$

характеризуют относительное изменение объема $\ln\left(dV/dV_0\right) = \theta$, интенсивность формоизменения (e) и угол вида деформированного состояния (γ). Соотношения (2.2) связывают алгебраические инварианты тензора Генки $J_1 = \mathbf{\Gamma}\cdot\cdot\mathbf{E}$, $J_2 = \mathbf{\Gamma}\cdot\cdot\mathbf{\Gamma}$, $J_3 = \left|\mathbf{\Gamma}\right|$, с так называемыми естественными инвариантами деформаций θ, e, γ [2].

В работах [7, 13] доказано, что в изотропном материале тензор логарифмических деформаций $\mathbf{\Gamma}$ энергетически сопряжен с обобщенным "повернутым" тензором напряжений $\mathbf{\Sigma}_{\mathrm{R}} = e^{\theta}\mathbf{R}\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{R}^{-1}$, где $\mathbf{S}$ – тензор истинных напряжений Коши. Это значит, что дифференциал удельной потенциальной энергии в случае изотропного материала, когда главные оси тензоров $\mathbf{\Gamma}$ и $\mathbf{\Sigma}_R$ совпадают, может быть представлен в виде:

$$dW = \mathbf{\Sigma}_{\mathrm{R}}\cdot\cdot d\mathbf{\Gamma} = \left(\sigma_0\mathbf{E} + \tilde{\mathbf{\Sigma}}_{\mathrm{R}}\right)\cdot\cdot\left(\frac{1}{3}\mathbf{E}d\theta + d\tilde{\mathbf{\Gamma}}\right) = dW_{\mathrm{vol}} + dW_{\mathrm{iso}} \tag{2.3}$$

где $dW_{\mathrm{vol}} = \sigma_0 d\theta$ представляет собой дифференциал энергии изменения объема, а $dW_{\mathrm{iso}} = \tilde{\mathbf{\Sigma}}_{\mathrm{R}}\cdot\cdot d\tilde{\mathbf{\Gamma}}$ – дифференциал энергии формоизменения. Такое разложение дифференциала потенциальной энергии деформаций возможно и в случае бесконечно малых деформаций.

Таким образом, использование в качестве меры конечных деформаций тензора Генки позволяет наиболее естественным образом обобщить известные физически линейные и физически нелинейные модели упругости на случай больших деформаций.

3. Представление удельной потенциальной энергии деформаций через естественные инварианты тензора Генки. Рассмотрим модель изотропного "гиперупругого" материала, в котором постулируется существование потенциала деформаций [3, 4, 9–11]. В свою очередь в ряде работ [5, 12, 14, 15] удельная потенциальная энергия деформаций представляется в виде ряда по степеням тензора деформаций.

Будем считать удельную потенциальную энергию деформаций аналитической функцией тензора деформаций Генки и запишем ее в виде ряда

$$W = W_0 + \mathbf{A}\cdot\cdot\mathbf{\Gamma} + \frac{1}{2!}\mathbf{N}\cdot\cdot\cdot\cdot\mathbf{\Gamma}\mathbf{\Gamma} + \frac{1}{3!}\mathbf{L}\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\mathbf{\Gamma}\mathbf{\Gamma}\mathbf{\Gamma} + \ldots \tag{3.1}$$

где в случае начального ненапряженного состояния можно считать $W_0 = 0$, $\mathbf{A} = \mathbf{0}$. Тензоры $\mathbf{N}$ (четвертого ранга) и $\mathbf{L}$ (шестого ранга) являются тензорами упругих констант материала.

Тензор напряжений $\mathbf{\Sigma}_{\mathrm{R}}$ в соответствии с (2.3) и (3.1) определяется выражением

$$\mathbf{\Sigma}_{\mathrm{R}} = \frac{\partial W}{\partial\mathbf{\Gamma}} = \mathbf{N}\cdot\cdot\mathbf{\Gamma} + \frac{1}{2}\mathbf{L}\cdot\cdot\cdot\cdot\mathbf{\Gamma}\mathbf{\Gamma} + \ldots \tag{3.2}$$

Для изотропного упругого материала вид тензоров $\mathbf{N}$ и $\mathbf{L}$ известен [3, 12, 16, 17]. В частности, в ортонормированном базисе $\mathbf{e}_{\mathrm{i}}$ ($\mathbf{e}_{\mathrm{i}}\cdot\mathbf{e}_{\mathrm{j}} = \delta_{\mathrm{ij}}$) тензор $\mathbf{N}$ имеет компоненты, симметричные по парам индексов ($N_{\mathrm{ijkl}} = N_{\mathrm{jikl}} = N_{\mathrm{ijlk}} = N_{\mathrm{klij}}$) и выражающиеся через модуль объемной упругости K и модуль сдвига G [3, 10, 17]:

$$
\begin{gathered}
N_{1111} = N_{2222} = N_{3333} = K + \frac{4}{3}G \\
N_{1122} = N_{3311} = N_{2233} = K - \frac{2}{3}G \\
N_{1212} = N_{3131} = N_{2323} = 2G \\
\text{(остальные нули)}
\end{gathered}
\tag{3.3}
$$

Компоненты тензора шестого ранга $\mathbf{L}$ также симметричны по парам индексов $\left(L_{\mathrm{ijklmn}} = L_{\mathrm{jiklmn}} = L_{\mathrm{ijlkmn}} = L_{\mathrm{ijklnm}} = L_{\mathrm{ijmnkl}} = L_{\mathrm{klijmn}}\right)$ и для изотропного материала выражаются через константы упругости третьего порядка ν_1, ν_2, ν_3 [12, 16, 17]:

$$
\begin{gathered}
L_{111111} = L_{222222} = L_{333333} = \nu_1 + 6\nu_2 + 8\nu_3 \\
L_{112222} = L_{111122} = L_{113333} = L_{111133} = L_{222233} = L_{223333} = \nu_1 + 2\nu_2 \\
L_{111212} = L_{221212} = L_{332323} = L_{333131} = L_{113131} = L_{222323} = \nu_2 + 2\nu_3 \\
L_{232311} = L_{313122} = L_{121233} = \nu_2, \quad L_{233112} = L_{123123} = L_{122331} = \nu_3, \quad L_{112233} = \nu_1 \\
\text{(остальные нули)}
\end{gathered}
\tag{3.4}
$$

В работах [10, 15] предлагалось использовать разложения тензоров $\mathbf{N}$ и $\mathbf{L}$ по специальным образом выбранному базису. Рассмотрим обобщенный канонический тензорный базис А.А. Ильюшина [10, 18], состоящий из тензоров второго ранга:

$$
\begin{gathered}
\mathbf{I}^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3) \\
\mathbf{I}^1 = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\cos\beta_0\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 - \sin\left(\beta_0 + \frac{\pi}{6}\right)\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \sin\left(\beta_0 - \frac{\pi}{6}\right)\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3\right) \\
\mathbf{I}^2 = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\sin\beta_0\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \cos\left(\beta_0 + \frac{\pi}{6}\right)\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 - \cos\left(\beta_0 - \frac{\pi}{6}\right)\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3\right) \\
\mathbf{I}^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1), \quad \mathbf{I}^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2), \quad \mathbf{I}^5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3)
\end{gathered}
\tag{3.5}
$$

где β_0 — параметр вращения, и образуем из него тензорные базисы четвертого ранга

$$
\mathbf{I}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\mathbf{I}^\alpha\mathbf{I}^\beta + \mathbf{I}^\beta\mathbf{I}^\alpha)
\tag{3.6}
$$

и шестого ранга:

$$
\mathbf{I}^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{6}(\mathbf{I}^\alpha\mathbf{I}^\beta\mathbf{I}^\gamma + \mathbf{I}^\alpha\mathbf{I}^\gamma\mathbf{I}^\beta + \mathbf{I}^\beta\mathbf{I}^\alpha\mathbf{I}^\gamma + \mathbf{I}^\beta\mathbf{I}^\gamma\mathbf{I}^\alpha + \mathbf{I}^\gamma\mathbf{I}^\alpha\mathbf{I}^\beta + \mathbf{I}^\gamma\mathbf{I}^\beta\mathbf{I}^\alpha)
\tag{3.7}
$$

где $\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, \ldots, 5$.

Разложения тензоров (3.3) и (3.4) по базисам (3.6) и (3.7) для изотропного упругого материала имеют вид [10, 15]:

$$
\mathbf{N} = 3K\mathbf{I}^{00} + 2G(\mathbf{I}^{11} + \mathbf{I}^{22} + \mathbf{I}^{33} + \mathbf{I}^{44} + \mathbf{I}^{55})
\tag{3.8}
$$

и

$$
\begin{gathered}
\mathbf{L} = c_1\mathbf{I}^{000} + c_2(\mathbf{I}^{011} + \mathbf{I}^{022} + \mathbf{I}^{033} + \mathbf{I}^{044} + \mathbf{I}^{055}) + \\
+ c_3\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{I}^{111} - \frac{6}{\sqrt{6}}(\mathbf{I}^{122} + \mathbf{I}^{133}) + \frac{3}{\sqrt{6}}(\mathbf{I}^{144} + \mathbf{I}^{155}) + \frac{3}{\sqrt{2}}(\mathbf{I}^{255} - \mathbf{I}^{244} + 2\mathbf{I}^{345})\right)
\end{gathered}
\tag{3.9}
$$

где $c_1 = 3\sqrt{3}\nu_1 + 6\sqrt{3}\nu_2 + 8\,\nu_3/\sqrt{3}$, $c_2 = 6\sqrt{3}\nu_2 + 8\sqrt{3}\nu_3$ $c_3 = 4\nu_3$.

Если в разложении удельной потенциальной энергии (3.1) ограничиться только членом второго порядка относительно тензора логарифмических деформаций $\mathbf{\Gamma}$, то с учетом представления (3.8) получим

$$W = \frac{1}{2}K\theta^2 + Ge^2 \tag{3.10}$$

а тензор напряжений принимает вид

$$\mathbf{\Sigma}_{\mathrm{R}} = K\theta\mathbf{E} + 2G\tilde{\mathbf{\Gamma}} \tag{3.11}$$

Соотношения (3.10), (3.11) являются естественным обобщением соотношений линейной теории упругости на случай конечных деформаций, полученным с использованием тензора логарифмических деформаций. Модель материала (3.10), (3.11) называют материалом Генки [4, 7, 8]. В работах [4, 6, 7] отмечается, что модель материала Генки хорошо согласуется с экспериментом до умеренно больших деформаций (30–40%).

4. Обобщение модели Генки на физически нелинейные соотношения. Сохраним в представлении (3.1) для удельной потенциальной энергии деформаций два первых ненулевых члена

$$W = \frac{1}{2!}\mathbf{N}\cdot\cdot\cdot\cdot\,\mathbf{\Gamma\Gamma} + \frac{1}{3!}\mathbf{L}\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\,\mathbf{\Gamma\Gamma\Gamma} \tag{4.1}$$

Тогда в соответствии с (3.2) тензор напряжений принимает вид

$$\mathbf{\Sigma}_{\mathrm{R}} = \mathbf{N}\cdot\cdot\,\mathbf{\Gamma} + \frac{1}{2}\mathbf{L}\cdot\cdot\cdot\cdot\,\mathbf{\Gamma\Gamma} \tag{4.2}$$

Если компоненты тензоров $\mathbf{N}$ и $\mathbf{L}$ принять в виде (3.3) и (3.4), то удельная потенциальная энергия деформаций (4.1) может быть выражена через алгебраические инварианты тензора Генки в виде:

$$W = \frac{1}{2}\lambda J_1^2(\mathbf{\Gamma}) + GJ_2(\mathbf{\Gamma}) + \frac{1}{6}(\nu_1 J_1^3(\mathbf{\Gamma}) + 6\nu_2 J_1(\mathbf{\Gamma})J_1(\mathbf{\Gamma}^2) + 8\nu_3 J_1(\mathbf{\Gamma}^3))$$

где $\lambda = K - \frac{2}{3}G$ – модуль упругости Ламе.

С учетом известной связи между алгебраическими инвариантами [3]

$$J_1(\mathbf{\Gamma}^2) = \mathbf{\Gamma}^2\cdot\cdot\,\mathbf{E} = J_1^2(\mathbf{\Gamma}) - 2J_2(\mathbf{\Gamma})$$

$$J_1(\mathbf{\Gamma}^3) = \mathbf{\Gamma}^3\cdot\cdot\,\mathbf{E} = J_1^3(\mathbf{\Gamma}) - 3J_1(\mathbf{\Gamma})J_2(\mathbf{\Gamma}) + 3J_3(\mathbf{\Gamma})$$

получим

$$\begin{aligned} W = {} & \frac{1}{2}\lambda J_1^2(\mathbf{\Gamma}) + GJ_2(\mathbf{\Gamma}) + \frac{1}{6}(\nu_1 + 6\nu_2 + 8\nu_3)J_1^3(\mathbf{\Gamma}) - \\ & - 2(\nu_2 + 2\nu_3)J_1(\mathbf{\Gamma})J_2(\mathbf{\Gamma}) + 4\nu_3 J_3(\mathbf{\Gamma}) \end{aligned} \tag{4.3}$$

Если обозначить $\nu_1/2 + \nu_2 = l$, $\nu_2 + 2\nu_3 = m$, $4\nu_3 = n$, то выражение (4.3) принимает вид

$$W = \frac{1}{2}\lambda J_1^2(\mathbf{\Gamma}) + GJ_2(\mathbf{\Gamma}) + \frac{1}{3}(l + 2m)J_1^3(\mathbf{\Gamma}) - 2mJ_1(\mathbf{\Gamma})J_2(\mathbf{\Gamma}) + nJ_3(\mathbf{\Gamma}) \tag{4.4}$$

Если в выражении (4.4) заменить инварианты тензора деформаций Генки на аналогичные инварианты тензора деформаций Коши, то представление удельной потенциальной энергии деформаций в виде (4.4) совпадает с моделью Мурнагана [3], причем коэффициенты l, m, n из (4.4) называют константами Мурнагана. Для некоторых материалов значения этих констант приведены в [3].

Таким образом, представление удельной потенциальной энергии в виде (4.1) позволяет обобщить модель Генки на физически нелинейные соотношения типа соотношений Мурнагана.

Если при вычислении удельной потенциальной энергии деформаций использовать разложения тензоров **N** и **L** по обобщенному каноническому базису (3.8), (3.9), то ее можно представить через естественные инварианты тензора Генки в виде:

$$W = \frac{1}{2}K\theta^2 + Ge^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{c_1}{3\sqrt{3}}\theta^3 + \frac{c_2}{\sqrt{3}}\theta e^2 + \sqrt{\frac{2}{3}}c_3 e^3 \cos 3\gamma\right) \tag{4.5}$$

Следствием (4.5) является выражение для обобщенного “повернутого” тензора напряжений в виде

$$\mathbf{\Sigma}_{\mathrm{R}} = \sigma_0\mathbf{E} + \tau_e\tilde{\mathbf{\Gamma}} + \tau_q\tilde{\mathbf{Q}} \tag{4.6}$$

где $\tilde{\mathbf{Q}}$ – девиатор тензора $\tilde{\mathbf{\Gamma}}^2$, а функции σ_0, τ_e, τ_q определяются выражениями

$$\sigma_0 = \frac{\partial W}{\partial\theta}, \quad \tau_e = \frac{1}{e}\frac{\partial W}{\partial e} - \frac{3\cos 3\gamma}{e^2}\frac{\partial W}{\partial(\cos 3\gamma)}, \quad \tau_q = \frac{3\sqrt{6}}{e^3}\frac{\partial W}{\partial(\cos 3\gamma)}$$

В соответствии с (4.5) найдем

$$\sigma_0 = K\theta + \frac{c_1}{6\sqrt{3}}\theta^2 + \frac{c_2}{6\sqrt{3}}e^2, \quad \tau_e = 2G + \frac{c_2}{3\sqrt{3}}\theta, \quad \tau_q = c_3 \tag{4.7}$$

Из модели (4.5) следует, что если тензоры **N** и **L** постоянны, то в выражении (4.6) коэффициенты являются материальными функциями естественных инвариантов тензора Генки следующего вида:

$$\sigma_0 = \sigma_0(\theta, e), \quad \tau_e = \tau_e(\theta), \quad \tau_q = \mathrm{const}$$

Константы c_1, c_2, c_3 из соотношений (4.7) в отличие от констант в законе Мурнагана [3] имеют ясный физический смысл. Установим степень влияния констант и их физический смысл, рассматривая частные случаи деформирования:

1. чисто объемная деформация, когда $\tilde{\mathbf{\Gamma}} = \mathbf{0}$, $e = 0$. В этом процессе гидростатические напряжения изменяются по закону

$$\sigma_0 = K\theta + \frac{c_1}{6\sqrt{3}}\theta^2$$

поэтому константа c_1 учитывает изменение объема второго порядка малости и может быть определена из опыта на всестороннее сжатие;

2. чистое формоизменение, когда $\theta = 0$. В этом процессе гидростатические напряжения изменяются по закону

$$\sigma_0 = \frac{c_2}{6\sqrt{3}}e^2$$

следовательно, постоянная c_2 позволяет учесть дилатационные явления в материале: появление гидростатического напряжения при чистом формоизменении;

3. процесс формоизменения, в котором угол вида деформированного состояния $\gamma = \pi/6 + \pi n/3$. Это может быть простой сдвиг или двухосное растяжение–сжатие. В этом случае свертка тензоров $\tilde{\mathbf{\Sigma}}_{\mathrm{R}} \cdot\cdot\, \tilde{\mathbf{Q}} = c_3\tilde{\mathbf{Q}} \cdot\cdot\, \tilde{\mathbf{Q}} \neq 0$, что говорит о несоосности тензоров $\tilde{\mathbf{\Sigma}}_R$ и $\tilde{\mathbf{\Gamma}}$ или об отклонении угла вида напряженного состояния от угла вида деформированного состояния.

Вариант определяющих соотношений (4.6) с функциями (4.7) можно рассматривать как частный случай общего варианта соотношений, в котором каждая из материальных функций зависит от всех трех инвариантов тензора Генки:

$$\sigma_0 = \sigma_0(\theta, e, \gamma), \quad \tau_e = \tau_e(\theta, e, \gamma), \quad \tau_q = \tau_q(\theta, e, \gamma)$$

удовлетворяющих условиям совместности

$$\frac{\partial \sigma_0}{\partial e} = \frac{\partial \tau_e e}{\partial \theta} + \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{\partial \tau_q}{\partial \theta} e^2 \cos 3\gamma$$

$$\frac{\partial \sigma_0}{\partial \gamma} = -\frac{1}{\sqrt{6}} \frac{\partial \tau_q}{\partial \theta} e^3 \sin 3\alpha$$

$$\frac{\partial \tau_e}{\partial \gamma} + \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{\partial \tau_q}{\partial \gamma} e \cos 3\gamma = \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{\partial \tau_q}{\partial e} e^2 \sin 3\gamma$$

Такой общий вариант соотношений был предложен и обоснован в работах [10, 19, 20]. Было показано, что функция σ_0 определяет гидростатическое напряжение в материале. Зависимость σ_0 от интенсивности деформаций e позволяет описать дилатационные явления в материале (появление гидростатического напряжения при чистом формоизменении). Функция τ_e определяет закон формоизменения, а функция τ_q задает отклонение свойств материала от частного постулата изотропии А.А. Ильюшина – общей гипотезы, допускающей в нашем случае независимость напряжений от третьего инварианта тензора деформаций Генки.

В определяющих соотношениях (4.6) с функциями (4.7) константы материала K, G, c_1, c_2, c_3 связаны с модулями упругости второго и третьего порядков, значения которых для некоторых материалов известны [3]. В настоящее время разработаны акустические методы определения модулей упругости третьего порядка, регламентируемые государственным стандартом [21]. Таким образом, проблема идентификации соотношений (4.6), (4.7) решается.

От представления удельной потенциальной энергии деформаций в форме (4.5) возможно естественным образом перейти к упругому потенциалу для несжимаемых материалов, положив инвариант $\theta = 0$. Получим двухконстантную модель несжимаемого материала с потенциалом

$$W = Ge^2 + \frac{1}{3\sqrt{2}} c_3 e^3 \cos 3\gamma$$

отражающую зависимость напряжений от угла вида деформированного состояния, в том числе и разносопротивляемость несжимаемого материала растяжению и сжатию.

5. Заключение. В статье предложен подход к построению физически нелинейных соотношений поведения изотропных упругих тел в рамках модели материала Генки. Подход основан на использовании представления удельной потенциальной энергии деформаций в виде ряда по степеням тензора логарифмических деформаций. Полученные для входящих в это представление тензоров упругости четвертого и шестого рангов разложения по обобщенному каноническому тензорному базису А.А. Ильюшина позволили достаточно просто представить удельную потенциальную энергию деформаций в виде функции естественных инвариантов тензора Генки. Полученные соотношения являются аналогом потенциала Мурнагана и частным случаем общей формы определяющих соотношений, предложенной в работах [10, 19]. Использование обобщенной модели Генки в форме Мурнагана позволяет придать константам модели c_1, c_2, c_3 ясный физический смысл: константа c_1 отражает нелинейную зависимость $\sigma_0(\theta)$, константа c_2 отражает дилатационный эффект, а константа c_3 – отклонение угла вида напряженного состояния от угла вида деформированного состояния.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 18-31-20053).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Новожилов В.В.* Основы нелинейной теории упругости. М.: Гостехиздат, 1948. 211 с.
2. *Толоконников Л.А.* О связи между напряжениями и деформациями в нелинейной теории упругости // ПММ. 1956. Т. 20. С. 439–444.
3. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
4. *Montella G., Govindjee S., Neff P.* The exponentiated Hencky strain energy in modelling tire derived material for moderately large deformations // Journal of Engineering Materials and Technology, Transaction of the ASME. 2015. Available at arXiv:1509.06541
5. *Mihai L.A., Goriely A.* How to characterize a nonlinear elastic material? A reviewon nonlinear constitutive parameters in isotropic finite elasticity // Proc. R. Soc. A 473: 20170607. (http://dx.doi.org/). https://doi.org/10.1098/rspa.2017.0607
6. *Anand L.* A constitutive model for compressible elastomeric solids // Computational Mechanics. 1996. 18. P. 339–355.
7. *Xiao H., Chen L.S.* Hencky's elasticity model and linear stress-strain relations in isotropic finite hyperelasticity // Acta Mechanica. 2002. 157. P. 51–60.
8. *Latorre M., Montans F.J.* On the interpretation of the logarithmic strain tensor in an arbitrary system of representation // International Journal of Solids and Structures. 2014. 51. P. 1507–1515.
9. *Коробейников С.Н., Олейников А.А.* Лагранжева формулировка определяющих соотношений материала Генки // Дальневосточный математический журнал. 2011. Т. 11. № 2. С. 155–180.
10. *Маркин А.А., Соколова М.Ю.* Термомеханика упругопластического деформирования. М.: Физматлит, 2013. 320 с.
11. *Муравлев А.В.* О представлении упругого потенциала в обобщённом пространстве деформаций А.А. Ильюшина // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 1. С. 99–102.
12. *Brugger K.* Thermodynamic Definition of Higher Order Elastic Coefficients // Physical Review. 1964. 133(6A). A1611.
13. *Hill R.* On constitutive inequalities for simple materials – I // J. Mech. Phys. Solids. 1968. 16:4. P. 229–242.
14. *Соколова М.Ю., Христич Д.В.* О симметрии термоупругих свойств квазикристаллов // ПММ. 2014. Т. 78. Вып. 5. С. 728–734.
15. *Astapov Y., Khristich D., Markin A., Sokolova M.* The construction of nonlinear elasticity tensors for crystals and quasicrystals // International Journal of Applied Mechanics. 2017. V. 9. № 6. P. 1750080-1–1750080-15. https://doi.org/10.1142/S1758825117500806
16. *Toupin R.A., Bernstein B.* Sound waves in deformed perfectly elastic materials. Acoustoelastic effect // The Journal of the Acoustical Society of America. 1961. 33 (2). P. 216–225.
17. *Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П.* Основы кристаллофизики. М.: Наука, 1979. 640 с.
18. *Бровко Г.Л.* Определяющие соотношения механики сплошной среды: Развитие математического аппарата и основ общей теории. М.: Наука, 2017. 432 с.
19. *Глаголева М.О., Маркин А.А., Матченко Н.М., Трещев А.А.* Свойства изотропных упругих материалов // Известия Тульского государственного университета. Серия Математика. Механика. Информатика. 1998. Т. 4. Вып. 2. Механика. С. 15–19.
20. *Астапов В.Ф., Маркин А.А., Соколова М.Ю.* Определение упругих свойств материалов из опытов на сплошных цилиндрах // Известия РАН. МТТ. 2002. № 1. С. 104–111.
21. ГОСТ Р 53568-2009. Контроль неразрушающий. Определение констант упругости третьего порядка акустическим методом. Общие требования.