ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2019, № 6, с. 121–135

УДК 531.1

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ГАМИЛЬТОНА–ИШЛИНСКОГО О ТЕЛЕСНОМ УГЛЕ НА ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Ю. Н. Челноков

Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов, Россия
e-mail: ChelnokovYuN@gmail.com

Поступила в редакцию 18.04.2018 г.
После доработки 10.05.2018 г.
Принята к публикации 25.07.2018 г.

Излагаются с использованием принципа перенесения Котельникова–Штуди обобщение теоремы Гамильтона–Ишлинского о телесном угле на пространственное движение твердого тела, представляющее собой композицию поступательного и вращательного движений, и дуальная сопряженная теорема для этого движения тела. Рассматривается пример изучаемого пространственного движения твердого тела. Указывается на возможные приложения теоремы о дуальном телесном угле в теории пространственных механизмов и механике роботов-манипуляторов. Дается ее приложение к задаче инерциальной навигации об определении ориентации и кажущейся скорости движущегося объекта. При рассмотрении примера и приложения используются бикватернионные кинематические уравнения и их аналитические решения для рассматриваемых пространственных движений твердого тела. В работе развиваются и обобщаются результаты, полученные ранее автором статьи в изучаемой проблематике.

Ключевые слова: теорема о дуальном телесном угле, пространственное движение твердого тела, дуальные кинематические уравнения, задача определения ориентации и кажущейся скорости движущегося объекта

DOI: 10.1134/S0572329919060060

1. Теорема Гамильтона–Ишлинского о телесном угле. Одной из замечательных теорем геометрии и кинематики твердого тела, имеющей важные приложения в инерциальной навигации и гироскопической технике, является теорема о телесном угле [1–8]. В геометрической постановке эта теорема впервые была сформулирована Гамильтоном [3] как теорема о сложении любого числа конечных конических поворотов или как теорема о сложении бесконечного числа конических инфинитезимальных поворотов. В кинематической постановке, отражающей важные геометрические свойства углового движения твердого тела при наличии неголономной связи, эта теорема впервые была сформулирована и строго доказана А.Ю. Ишлинским в 1952 г. [1]. В 1958 г. Л.Е. Гудман и А.Р. Робинсон фактически воспроизвели результат А.Ю. Ишлинского [4]. История теоремы о телесном угле и ее развитие даются в статье В.Ф. Журавлева [8]. Рассмотрим эту теорему в кинематической постановке А.Ю. Ишлинского.

Пусть с твердым телом жестко связана система координат xyz. И пусть тело движется так, что проекция ω_z вектора угловой скорости тела на связанную с ним ось z во все время движения t остается равной нулю:

$$\omega_z(t) = 0 \tag{1.1}$$

Это равенство может рассматриваться как уравнение неголономной связи, наложенной на твердое тело, т.к. проекция ω_z угловой скорости твердого тела может быть выражена через углы Эйлера–Крылова, характеризующие угловое положение тела, и их первые производные по времени. Наличие этой связи обусловливает важные геометрические свойства соответствующего движения твердого тела, составляющие содержание теоремы о телесном угле. Опишем эти свойства, следуя работе А.Ю. Ишлинского [2] (при этом используем обозначения, принятые в этой работе).

Пусть ось z твердого тела совершает коническое движение, при котором одна из точек оси неподвижна, а какая-либо другая ее точка описывает на некоторой невращающейся сфере S с центром в неподвижной точке какую-либо замкнутую сферическую кривую.

Обозначим через F площадь области на сфере, ограниченную этой кривой. А.Ю. Ишлинским было доказано, что при возвращении оси z в исходное положение z_0 твердое тело вместе со связанной с ним системой координат xyz в исходное положение $x_0y_0z_0$ не возвращается, а приходит в некоторое новое положение $x_1y_1z_1$, повернутое относительно системы координат $x_0y_0z_0$ вокруг оси z_0 (z) на угол χ, связанный с точностью до знака с величиной площади F простым соотношением

$$\chi = F/R^2 \tag{1.2}$$

в котором R – радиус сферы S.

Отношение, стоящее в правой части равенства (1.2), является мерой телесного угла Ω, под которым видна упомянутая сферическая область из центра сферы S или, что, то же самое, мерой телесного угла конуса, описываемого осью z тела в своем движении. Отсюда следует, что имеет место формула [2]

$$\chi = \Omega \tag{1.3}$$

определяющая поворот твердого тела вокруг его оси z в результате замкнутого углового движения этой оси. Эта формула является математической записью теоремы о телесном угле.

Таким образом, отсутствие проекции угловой скорости твердого тела на какую-либо связанную с ним ось еще не гарантирует отсутствия конечного поворота тела вокруг этой оси после ее возвращения в исходное положение. Из этого, отмечает А.Ю. Ишлинский [2], следует, что одноосные гиростабилизаторы могут успешно применяться для фиксации направлений в горизонтальной плоскости лишь при условии сохранения на движущемся объекте вертикальной ориентации оси внешнего кольца стабилизатора.

Приведем доказательство равенства (1.3), предложенное А.Ю. Ишлинским [1, 2], с тем, чтобы в дальнейшем распространить его на более общее неголономное пространственное движение твердого тела.

Введем невращающуюся систему координат $\xi\eta\zeta$ с началом в центре сферы S. Пусть ось z твердого тела совершает произвольное движение, проходя, однако, все время через центр сферы. Обозначим через ψ и φ полярные координаты точки пересечения этой оси со сферой S. Здесь φ – угол между осью z и ее проекцией ξ_1 на координатную плоскость $\xi\eta$, а ψ – угол между этой проекцией и осью неизменного направления ξ. Так как поступательное перемещение твердого тела для рассмотрения кинематики его углового движения несущественно, поместим начало системы координат xyz, связанной с твердым телом, в точку пересечения оси z со сферой S. Построим далее вспомогательную подвижную систему координат enz с началом в той же точке пересечения. Ось n этой системы лежит в плоскости $z\zeta$, или, что то же самое, в плоскости $\xi_1\zeta$, а ось e к ней перпендикулярна. Введем угол ϑ между осями e и x или равный ему угол между осями n и y. Проекция вектора абсолютной (т.е. по отношению к невращающейся системе координат $\xi\eta\zeta$) угловой скорости твердого тела на ось z представляется выражением

$$\omega_z = d\vartheta/dt + \sin\varphi d\psi/dt \tag{1.4}$$

Однако, в рассматриваемом случае движения твердого тела последнее выражение равно нулю. Таким образом, равенство

$$d\vartheta/dt + \sin\varphi d\psi/dt = 0 \tag{1.5}$$

эквивалентное равенству (1.1), является аналитическим представлением (уравнением) неголономной связи, наложенной на угловое движение твердого тела.

Из равенства (1.5) имеем

$$d\vartheta = -\sin\varphi d\psi \tag{1.6}$$

Угол, на который повернется относительно вспомогательной подвижной системы координат enz система координат xyz, связанная с твердым телом, при перемещении оси z из одного положения в другое определяется в соответствии с последним равенством формулой

$$\vartheta_1 - \vartheta_0 = -\int\limits_{\psi_0,\varphi_0}^{\psi_1,\varphi_1} \sin\varphi d\psi \tag{1.7}$$

где ϑ_0 и ϑ_1 – начальное и конечное значения угла ϑ между осями e и x; ψ_0, φ_0 и ψ_1, φ_1 – соответственно начальные и конечные значения полярных координат ψ, φ совместного начала систем xyz и enz.

Правая часть формулы (1.7) представляет собой криволинейный интеграл в плоскости (ψ, φ) переменных ψ и φ. Величина этого интеграла существенно зависит от того, по какой сферической траектории происходит переход начала системы координат xyz (а вместе с ним и начала системы enz) из одного положения в другое, т.е. от вида функциональной зависимости $\varphi = \varphi(\psi)$, соответствующей каждой из таких траекторий.

Пусть начало системы координат xyz возвращается в исходное положение, описав на сфере замкнутую кривую. Тогда, вводя для этого случая обозначение $\chi = \vartheta_1 - \vartheta_0$, получим формулу [2]

$$\chi = -\oint \sin\varphi d\psi \tag{1.8}$$

В правой части этого равенства находится криволинейный интеграл по контуру замкнутой кривой, расположенный в плоскости (ψ, φ) переменных ψ и φ.

Угол χ, определяемый формулой (1.8), характеризует изменение ориентации твердого тела в результате замкнутого движения его оси z по конической поверхности (движения начала системы координат xyz по замкнутой кривой на сфере S).

При помощи формулы Грина криволинейный интеграл по контуру замкнутой кривой, присутствующий в формуле (1.8), преобразуется далее А.Ю. Ишлинским в двойной интеграл по области, находящейся внутри этого контура. При этом контур обходится в том направлении, по отношению к которому область находится слева. В результате формула (1.8) принимает вид

$$\chi = -\oint \sin\varphi d\psi = \iint \cos\varphi d\varphi d\psi \tag{1.9}$$

Однако произведение $R^2 \cos\varphi\, d\varphi\, d\psi = dF$ представляет собой элемент площади сферы в полярных координатах или, что, то же самое, площадь элементарного сферического прямоугольника между координатными линиями ψ и $\psi + d\psi$, φ и $\varphi + d\varphi$, стороны которого соответственно равны $R \cos\varphi\, d\psi$ и $R\, d\varphi$.

Поэтому, как отмечает А.Ю. Ишлинский, двойной интеграл, стоящий в правой части равенства (1.9), представляет собой частное от деления на R^2 площади F части сферы S, находящейся внутри замкнутой сферической траектории, описываемой началом системы координат xyz. Однако отношение площади F к квадрату радиуса R как раз и представляет собой меру телесного угла Ω, под которым эта площадь видна из центра сферы. Таким образом, А.Ю. Ишлинский приходит к равенству (1.3):

$$\chi = -\oint \sin\varphi d\psi = \iint \cos\varphi d\varphi d\psi = \Omega \tag{1.10}$$

В случае, когда проекция ω_z вектора угловой скорости твердого тела на ось z тела не равна нулю, теорема Ишлинского о телесном угле принимает следующий вид [1, 8]:

$$\chi = \Omega + \int_0^T \omega_z(t)dt \tag{1.11}$$

где T — время обхода оси z замкнутой поверхности.

Приведем словесную формулировку теоремы Ишлинского [1, 8]: если одна из осей z твердого тела, имеющего неподвижную точку, опишет замкнутую поверхность, то угол χ поворота самого тела вокруг этой оси равен сумме телесного угла Ω, описанного осью z тела, и определенного интеграла от проекции ω_z угловой скорости тела за время обхода оси z замкнутой поверхности.

2. Обобщение теоремы Гамильтона–Ишлинского на пространственное движение твердого тела. Теорема Гамильтона–Ишлинского о телесном угле и ее приведенное доказательство, предложенное А.Ю. Ишлинским, могут быть перенесены [9, 10] с помощью принципа перенесения Котельникова–Штуди [10–16] на более общий случай пространственного движения твердого тела, представляющего собой композицию поступательного и вращательного движений.

Пусть твердое тело совершает такое пространственное движение относительно опорной системы координат $\xi\eta\zeta$, принимаемой за неподвижную, при котором дуальная ортогональная проекция U_z кинематического винта $\boldsymbol{U}$ твердого тела на ось z связанной с телом системы координат xyz во все время движения остается равной нулю:

$$U_z(t) = \omega_z(t) + sv_z(t) = 0 \tag{2.1}$$

Здесь ω_z и v_z — проекции векторов угловой $\boldsymbol{\omega}$ и линейной $\mathbf{v}$ скоростей твердого тела на связанную с ним ось z, s — символ (комплексность) Клиффорда [17], обладающий свойством $s^2 = 0$.

Аналогично равенству (1.1), равенство (2.1) может рассматриваться как уравнение неголономной связи, наложенной на твердое тело, т.к. проекция U_z кинематического винта твердого тела может быть выражена через дуальные углы Эйлера–Крылова, характеризующие ориентацию и местоположение тела в системе координат $\xi\eta\zeta$, и их первые производные по времени. Наличие этой связи обусловливает важные геометрические свойства соответствующего пространственного движения твердого тела, аналогичные рассмотренным свойствам углового движения тела и составляющие содержание теоремы о дуальном телесном угле.

Пусть ось z твердого тела при его движении, удовлетворяющем условию (2.1), описывает в пространстве линейчатую замкнутую поверхность. Тогда, при возвращении оси z в исходное положение z_0 (точнее, при ее совмещении с прямой, на которой лежала ось z в ее исходном положении z_0) твердое тело вместе со связанной с ним системой координат xyz в исходное положение $x_0y_0z_0$ не возвращается, а приходит в некоторое новое положение $x_1y_1z_1$, повернутое относительно системы координат $x_0y_0z_0$ вокруг оси z_0 (z, z_1) на дуальный угол X, определяемый соотношением

$$X = \chi + s\chi^0 = \Omega_{dual} = \Omega + s\Omega^0 \tag{2.2}$$

являющимся дуальным аналогом соотношения (1.3).

В этом равенстве χ – обычный, ранее введенный угол поворота тела вокруг связанной оси z, а χ^0 – алгебраическая величина поступательного перемещения тела вдоль этой оси, Ω_{dual} – дуальный телесный угол "раздвинутого" конуса, описываемого осью z тела в своем движении (дуальный телесный угол линейчатой замкнутой поверхности, описываемой осью z тела); Ω, как и прежде, – обычный телесный угол.

Таким образом, отсутствие проекции кинематического винта твердого тела на какую-либо связанную с ним ось еще не гарантирует отсутствия конечного перемещения тела относительно этой оси после ее совмещения с прямой, на которой лежала эта ось (отметим, что в этом, более общем пространственном движении твердого тела, начала осей z_1 и z_0 смещены относительно друг друга на величину χ^0).

Формула (2.2) является математической записью теоремы о дуальном телесном угле. Доказательство равенства (2.2) полностью аналогично приведенному доказательству А.Ю. Ишлинского равенства (1.3). Запишем основные уравнения, описывающие геометрические свойства пространственного движения твердого тела при наличии неголономной связи (2.1).

Обозначим через $\Psi = \psi + s\psi^0$ и $\Phi = \varphi + s\varphi^0$ дуальные углы, характеризующие местоположение оси z твердого тела в системе координат $\xi\eta\zeta$. Эти углы являются дуальными аналогами обычных, ранее введенных углов ψ и φ, характеризующих ориентацию оси z в системе координат $\xi\eta\zeta$; моментные части ψ^0 и φ^0 этих дуальных углов характеризуют элементарные поступательные перемещения твердого тела в направлении соответствующих осей элементарных винтовых конечных перемещений тела. Введем далее вспомогательную подвижную систему координат enz, местоположение которой в системе координат $\xi\eta\zeta$ характеризуется дуальными углами Ψ и Φ. Введем также дуальный угол $\Theta = \vartheta + s\vartheta^0$ между осями e и x или равный ему дуальный угол между осями n и y (т.е. дуальный угол собственного вращения твердого тела вокруг оси z). Этот угол является дуальным аналогом ранее введенного угла ϑ, характеризующего поворот тела вокруг оси z относительно системы координат enz; моментная часть ϑ^0 этого дуального угла характеризует элементарное поступательное перемещение твердого тела в направлении оси z элементарного винтового конечного перемещения тела.

Кинематический винт $\mathbf{U}$ описывает мгновенное винтовое движение твердого тела по отношению к неподвижной системе координат $\xi\eta\zeta$. Дуальная ортогональная проекция U_z кинематического винта $\mathbf{U}$ на ось z связанной системы координат xyz представляется выражением

$$U_z = d\Theta/dt + \sin\Phi d\Psi/dt \tag{2.3}$$

являющимся дуальным аналогом выражения (1.4).

В рассматриваемом случае движения твердого тела, когда выполняется условие (2.1), из выражения (2.3) следует равенство

$$d\Theta/dt + \sin\Phi d\Psi/dt = 0 \tag{2.4}$$

являющееся аналитическим представлением (уравнением) неголономной связи, наложенной на пространственное движение твердого тела.

Из равенства (2.4), в свою очередь, следует дуальный аналог дифференциального соотношения (1.6):

$$d\Theta = -\sin\Phi d\Psi \tag{2.5}$$

Дуальный угол, на который повернется (точнее, переместится) относительно вспомогательной подвижной системы координат enz система координат xyz, связанная с твердым телом, при перемещении оси z из одного положения в другое определяется в соответствии с соотношением (2.5) формулой

$$\Theta_1 - \Theta_0 = -\int_{\Psi_0,\Phi_0}^{\Psi_1,\Phi_1} \sin\Phi d\Psi \tag{2.6}$$

где Θ_0 и Θ_1 – начальное и конечное значения дуального угла Θ между осями e и x; Ψ_0, Φ_0 и Ψ_1, Φ_1 – соответственно начальные и конечные значения дуальных углов Ψ и Φ (дуальных полярных координат совместного начала систем xyz и enz).

Правая часть формулы (2.6) представляет собой криволинейный интеграл в плоскости (Ψ, Φ) дуальных переменных Ψ и Φ.

Пусть ось z твердого тела при его движении, удовлетворяющему условию (2.1), описывает в пространстве линейчатую замкнутую поверхность (совмещается в своем конечном положении с прямой, на которой лежала эта ось в своем начальном положении). Тогда, вводя для этого случая обозначение $X = \Theta_1 - \Theta_0$, получим, используя принцип перенесения Котельникова–Штуди, дуальные аналоги формул А.Ю. Ишлинского (1.10):

$$X = -\oint \sin\Phi d\Psi = \iint \cos\Phi d\Phi d\Psi = \Omega_{dual} \tag{2.7}$$

Выделяя в формулах (2.7) главные и моментные части, получаем формулы А.Ю. Ишлинского (1.10) для угла χ, характеризующего изменение ориентации твердого тела в результате движения его оси z по линейчатой замкнутой поверхности, и следующие формулы для величины χ^0 поступательного перемещения твердого тела вдоль его оси z:

$$\chi^0 = -\oint \varphi^0 \cos\varphi d\psi + \sin\varphi d\psi^0 \tag{2.8}$$

$$\chi^0 = -\iint \varphi^0 \sin\varphi d\psi d\varphi - \cos\varphi(d\psi d\varphi^0 + d\varphi d\psi^0) = \Omega^0 \tag{2.9}$$

Таким образом, нахождение поступательного перемещения твердого тела вдоль связанной оси z в результате ее движения по линейчатой замкнутой поверхности сводится к вычислению криволинейного интеграла второго рода (2.8) или поверхностного интеграла (2.9).

В случае, когда дуальная ортогональная проекция U_z кинематического винта $\mathbf{U}$ твердого тела на ось z тела не равна нулю, дуальный аналог теоремы Ишлинского о дуальном телесном угле (аналог соотношения (1.11)) принимает следующий вид:

$$X = \Omega_{dual} + \int_0^T U_z(t)dt$$

где T – время обхода оси z замкнутой линейчатой поверхности.

Таким образом, если одна из осей z свободного твердого тела опишет замкнутую линейчатую поверхность, то дуальный угол X винтового конечного перемещения самого тела вдоль этой оси равен сумме дуального телесного угла Ω_{dual} “раздвинутого” конуса, описанного осью z тела в своем движении, и определенного интеграла от дуальной ортогональной проекции U_z кинематического винта твердого тела за время обхода оси z замкнутой линейчатой поверхности.

Сформулируем, используя принцип перенесения Котельникова–Штуди, дуальный аналог теоремы В.Ф. Журавлева [5, 8], сопряженной к теореме А.Ю. Ишлинского: если свободное твердое тело двигалось так, что неподвижная в пространстве ось ζ описала в нем замкнутую линейчатую поверхность, то оно оказывается повернутым вокруг этой оси на дуальный угол

$$X = -\Omega_{dual} + \int_0^T U_\zeta(t)dt$$

где U_ζ – дуальная ортогональная проекция кинематического винта **U** твердого тела на рассматриваемую неподвижную ось ζ, T – время обхода оси ζ замкнутой линейчатой поверхности, Ω_{dual} – дуальный телесный угол "раздвинутого" конуса, описываемого осью ζ в теле (дуальный телесный угол линейчатой замкнутой поверхности, описываемой осью ζ в теле).

3. Пример неголономного пространственного движения твердого тела. Рассмотрим в качестве примера изучаемого пространственного движения твердого тела частный случай его неголономного движения, когда мгновенный кинематический винт **U** твердого тела имеет вид

$$\mathbf{U} = QF(t)\left[\cos\left(P\int_{t_0}^{t} F(\tau)d\tau + H\right)\mathbf{X} + \sin\left(P\int_{t_0}^{t} F(\tau)d\tau + H\right)\mathbf{Y}\right] \tag{3.1}$$

Здесь **X** и **Y** – единичные винты связанной с твердым телом системы координат xyz; $Q = q + sq^0$, $P = p + sp^0$, $H = \eta + s\eta^0$ – некоторые дуальные постоянные; $F(t) = f(t) + sf^0(t)$ – произвольная дуальная функция времени, ограниченная и интегрируемая на рассматриваемом отрезке времени $[t_0, t_1]$.

В этом случае дуальная ортогональная проекция U_z кинематического винта **U** твердого тела на связанную с ним координатную ось z во все время движения равна нулю:

$$U_z(t) = \omega_z(t) + sv_z(t) = 0$$

Кинематическому винту (3.1) соответствует вектор мгновенной угловой скорости вращения твердого тела

$$\omega = f(t)[q\cos\alpha(t)\mathbf{x} + q\sin\alpha(t)\mathbf{y}] \tag{3.2}$$

и вектор мгновенной скорости выбранного полюса O_2 тела (начала системы координат xyz)

$$\mathbf{v} = [b(t)\cos\alpha(t) - c(t)\sin\alpha(t)]\mathbf{x} + [b(t)\sin\alpha(t) + c(t)\cos\alpha(t)]\mathbf{y} \tag{3.3}$$

где

$$b(t) = q^0 f(t) + qf^0(t)$$

$$c(t) = qf(t)\left(p^0\int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau + p\int_{t_0}^{t} f^0(\tau)d\tau + \eta^0\right), \quad \alpha(t) = p\int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau + \eta$$

x, **y**, **z** – единичные векторы связанной с телом системы координат xyz.

Бикватернионное кинематическое уравнение движения свободного твердого тела имеет вид [10, 18–20]

$$2\mathbf{\Lambda}^\bullet = \mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{U}_{xyz}, \quad \mathbf{U}_{xyz} = U_x\mathbf{i} + U_y\mathbf{j} + U_z\mathbf{k} \tag{3.4}$$

$$\mathbf{\Lambda} = \Lambda_0 + \Lambda_1\mathbf{i} + \Lambda_2\mathbf{j} + \Lambda_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{\Lambda}^\bullet = \Lambda_0^\bullet + \Lambda_1^\bullet\mathbf{i} + \Lambda_2^\bullet\mathbf{j} + \Lambda_3^\bullet\mathbf{k}$$

Здесь $\mathbf{\Lambda} = \boldsymbol{\lambda} + s\boldsymbol{\lambda}^\circ$ – бикватернион винтового конечного перемещения твердого тела относительно неподвижной системы координат $\xi\eta\zeta$, являющийся комплексной комбинацией кватерниона $\boldsymbol{\lambda}$ ориентации тела в системе координат $\xi\eta\zeta$ и кватерниона $\boldsymbol{\lambda}^\circ$, характеризующего поступательное перемещение тела в этой системе координат, Λ_j – дуальные параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона); $\mathbf{U}_{xyz} = \boldsymbol{\omega}_{xyz} + s\mathbf{v}_{xyz}$ – отображение кинематического винта $\mathbf{U}$ твердого тела на связанный с телом базис xyz, компоненты $U_x = \omega_x + sv_x$, $U_y = \omega_y + sv_y$ и $U_z = \omega_z + sv_z$ бикватерниона $\mathbf{U}_{xyz}$ (дуальные ортогональные проекции кинематического винта) являются комплексными комбинациями проекций ω_x, ω_y, ω_z и v_x, v_y, v_z вектора $\boldsymbol{\omega}$ мгновенной угловой скорости тела и вектора $\mathbf{v}$ мгновенной скорости выбранной точки тела (полюса O_2) на связанные координатные оси; $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ – векторные мнимые единицы Гамильтона, верхняя точка – символ дифференцирования по времени, $\circ$ – символ кватернионного произведения.

Угловое положение (ориентация) твердого тела в неподвижной системе координат $\xi\eta\zeta$ характеризуется вещественными параметрами Эйлера (Родрига–Гамильтона) λ_j, а его линейное положение (поступательное перемещение) в этом базисе – декартовыми координатами ξ, η и ζ выбранного полюса O_2, которые находятся через вещественные параметры винтового движения λ_j и λ_j°, являющиеся компонентами кватернионов $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\lambda}^\circ$, с помощью кватернионной формулы [10, 18–20]

$$\mathbf{r}_{\xi\eta\zeta} = \xi\mathbf{i} + \eta\mathbf{j} + \zeta\mathbf{k} = 2\boldsymbol{\lambda}^\circ \circ \overline{\boldsymbol{\lambda}}$$

где верхняя черта – символ кватернионного сопряжения.

Общее решение бикватернионного кинематического уравнения движения свободного твердого тела (3.4) для случая, когда мгновенный кинематический винт $\mathbf{U}$ твердого тела имеет вид (3.1), т.е. когда вектор $\boldsymbol{\omega}$ мгновенной угловой скорости и вектор $\mathbf{v}$ мгновенной линейной скорости тела, имеют вид (3.2) и (3.3), было найдено в работе [18] (см. также книгу [10]). (Отметим, что в работах [18, 10] было получено решение уравнения (3.4) для более общего случая движения тела, когда его кинематический винт $\mathbf{U}$ имеет также ненулевую дуальную проекцию $U_z(t) = \omega_z(t) + sv_z(t) = DF(t)$, в выражении для которой $D = d + sd^0 = \text{const}$. Это решение является дуальным аналогом решения кватернионного кинематического уравнения вращательного движения твердого тела в вещественных параметрах Эйлера, построенного ранее в работе [21].)

Полагая, что в начальном положении твердого тела его система координат xyz совпадала с опорной системой координат $\xi\eta\zeta$, имеем для рассматриваемого движения тела следующие выражения для дуальных параметров Эйлера Λ_j, характеризующих ориентацию и местоположение тела в опорной системе координат в текущий момент времени t [18, 10]:

$$\Lambda_0 = \cos(\mathrm{N}/2)\cos(\mathrm{K}/2) + (P/R)\sin(\mathrm{N}/2)\sin(\mathrm{K}/2)$$
$$\Lambda_1 = (Q/R)\cos(\mathrm{N}/2 + H)\sin(\supseteq/2), \quad \Lambda_2 = (Q/R)\sin(\mathrm{N}/2 + H)\sin(\supseteq/2)$$
$$\Lambda_3 = (P/R)\cos(\mathrm{N}/2)\sin(\supseteq/2) - \sin(\mathrm{N}/2)\cos(\supseteq/2) \tag{3.5}$$
$$\mathrm{N} = P\int_{t_0}^{t} F(\tau)d\tau, \quad \mathrm{K} = R\int_{t_0}^{t} F(\tau)d\tau, \quad R = (P^2 + Q^2)^{1/2}$$

Пусть ось твердого тела z описала в пространстве линейчатую замкнутую поверхность и совместилась в своем конечном положении (в конечный момент времени t_1) с прямой, на которой лежала эта ось в своем начальном положении. Найдем дуальный угол, на который тело повернется вокруг связанной оси z в конечный момент времени t_1 относительно своего начального положения и установим условия, при выполнении которых имеется интересующее нас неголономное движение твердого тела.

Для этого движения твердого тела дуальные параметры Эйлера $\Lambda_j(t_1)$, характеризующие ориентацию и местоположение тела в опорной системе координат в конечный момент времени t_1 определяются соотношениями

$$\Lambda_0(t_1) = \cos\left(\frac{1}{2}X\right), \quad \Lambda_1(t_1) = 0, \quad \Lambda_2(t_1) = 0, \quad \Lambda_3(t_1) = \left(\frac{1}{2}X\right) \tag{3.6}$$

где $X = \chi + s\chi^0$ — по-прежнему, дуальный угол поворота тела вокруг связанной оси z в конечный момент времени t_1, χ — обычный угол поворота тела вокруг оси z, а χ^0 — алгебраическая величина поступательного перемещения тела вдоль этой оси.

Из этих выражений и соотношений (3.5) находим: $(\sin\left(\frac{1}{2}\mathrm{K}(t_1)\right) = 0$. Следовательно, для конечного момента времени значение функции $\mathrm{K}(t)$ должно быть равно одному из следующих значений:

$$\mathrm{K}(t_1) = R\int_{t_0}^{t_1} F(\tau)d\tau = 0, 2\pi; \quad R = (P^2 + Q^2)^{1/2} \tag{3.7}$$

Из соотношений (3.5) с учетом равенства $\sin\left(\frac{1}{2}\mathrm{K}(t_1)\right) = 0$ имеем:

$$\Lambda_0(t_1) = \cos\left(\frac{1}{2}\mathrm{N}(t_1)\right)\cos\left(\frac{1}{2}\mathrm{K}(t_1)\right), \quad \Lambda_3(t_1) = \cos\left(\frac{1}{2}\mathrm{N}(t_1)\right)\cos\left(\frac{1}{2}\mathrm{K}(t_1)\right)$$

Из этих равенств и равенств (3.6) следует, что

$$\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}X\right) = -\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}\mathrm{N}(t_1)\right), \quad X = -\mathrm{N}(t_1) = -P\int_{t_0}^{t_1} F(\tau)d\tau \tag{3.8}$$

Выделяя в этом дуальном равенстве главную и моментную части, получаем выражения для угла χ поворота твердого тела вокруг связанной оси z и алгебраическую величину χ^0 поступательного перемещения тела вдоль этой оси для конечного момента времени t_1:

$$\chi = -p\int_{t_0}^{t_1} f(\tau)d\tau, \quad \chi^0 = -p\int_{t_0}^{t_1} f^0(\tau)d\tau - p^0\int_{t_0}^{t_1} f(\tau)d\tau \tag{3.9}$$

Из (3.7) и (3.8) следует, что значение $\mathrm{K}(t_1) = 0$ отвечает нулевому значению дуального угла X поворота тела вокруг его оси z. Поэтому это значение в дальнейшем отбрасываем. С учетом сказанного из (3.7) имеем

$$\mathrm{K}(t_1) = R\int_{t_0}^{t_1} F(\tau)d\tau = 2\pi, \quad R = (P^2 + Q^2)^{1/2} \tag{3.10}$$

Равенство (3.10) представляет собой условие, накладываемое на дуальную функцию $F(t)$, дуальные постоянные P, Q и конечное время t_1, при выполнении которого ось твердого тела z опишет в пространстве линейчатую замкнутую поверхность и совместится в своем конечном положении с прямой, на которой лежала эта ось в своем начальном положении, и при этом дуальный угол поворота тела будет не нулевым. При заданной функции $F(t)$ равенство (3.10) выражает связь между дуальными постоянными P, Q и конечным временем t_1.

Из (3.10) имеем:

$$\int_{t_0}^{t_1} F(\tau)d\tau = 2\pi/R, \quad R = (P^2 + Q^2)^{1/2} \tag{3.11}$$

Выделяя в этом дуальном равенстве главную и моментную части, находим:

$$\int_{t_0}^{t_1} f(\tau)d\tau = 2\pi/(p^2 + q^2)^{1/2}, \quad p^2 + q^2 \neq 0 \tag{3.12}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} f^0(\tau)d\tau = -2\pi(pp^0 + qq^0)/(p^2 + q^2)^{3/2}, \quad p^2 + q^2 \neq 0 \tag{3.13}$$

Отметим, что условие $p^2 + q^2 \neq 0$ выполняется всегда, когда присутствует угловое движение твердого тела.

Равенства (3.12) и (3.13) определяют собой условия, которые при заданных функциях времени $f(t)$ и $f^0(t)$ связывают между собой конечное время t_1 и вещественные постоянные параметры движения p, p^0, q, q^0 и которые должны выполняться для осуществимости интересующего нас неголономного движения.

Подставляя (3.11) во второе равенство выражение (3.8), получаем формулу для дуального угла поворота твердого тела

$$X = -\mathrm{N}(t_1) = -2\pi P/R, \quad p^2 + q^2 \neq 0 \tag{3.14}$$

$$R = (P^2 + Q^2)^{1/2}, \quad P = p + sp^0, \quad Q = q + sq^0$$

Выделяя в дуальном равенстве (3.14) главную и моментную части, получаем окончательные формулы для угла χ поворота твердого тела вокруг связанной оси z и алгебраическую величину χ^0 поступательного перемещения тела вдоль этой оси:

$$\chi = -2\pi p/(p^2 + q^2)^{1/2}, \quad p^2 + q^2 \neq 0 \tag{3.15}$$

$$\chi^0 = -2\pi[p^0/(p^2 + q^2)^{1/2} - p(pp^0 + qq^0)/(p^2 + q^2)^{3/2}], \quad p^2 + q^2 \neq 0 \tag{3.16}$$

Соотношения (3.15) и (3.16) получаются также при подстановке выражений (3.12) и (3.13) для интегралов в формулы (3.9).

Отметим, что дуальный угол поворота твердого тела X не зависит явным образом от дуальной функции времени $F(t)$, поэтому и вещественный угол поворота χ и величина поступательного перемещения тела χ^0 не зависят явно от вещественных функций времени $f(t)$ и $f^0(t)$. Однако, следует иметь в виду, что дуальная функция $F(t)$ входит в условие (3.10) или (3.11), а вещественные функции $f(t)$ и $f^0(t)$ – в условия (3.12) и (3.13), накладываемые на необходимые постоянные параметры движения и конечное время t_1.

Итак, если твердое тело движется так, что дуальная ортогональная проекция U_z кинематического винта $\mathbf{U}$ твердого тела на связанную координатную ось z во все время движения равна нулю и если закон изменения мгновенного кинематического винта во времени имеет вид (3.1), то после того, как ось твердого тела z опишет в пространстве линейчатую замкнутую поверхность (совместится в своем конечном положении с прямой, на которой лежала эта ось в своем начальном положении), твердое тело повернется вокруг связанной оси z относительно своего начального положения на дуальный угол X, определяемый формулой (3.14). При этом обычный угол χ поворота твердого тела вокруг связанной оси z и алгебраическая величина χ^0 поступательного перемещения тела вдоль этой оси определяются формулами (3.15) и (3.16).

Так как в начальном положении твердого тела его система координат xyz совпадала с опорной системой координат $\xi\eta\zeta$, то декартовые координаты ξ, η и ζ выбранного полюса O_2 твердого тела в конечный момент времени t_1 имеют следующие значения:

$$\xi(t_1) = 0, \quad \eta(t_1) = 0, \quad \zeta(t_1) = \chi^0 = -2\pi[p^0/(p^2 + q^2)^{1/2} - p(pp^0 + qq^0)/(p^2 + q^2)^{3/2}]$$

Эти значения декартовых координат ξ, η и ζ для конечного момента времени t_1 получаются и при использовании кватернионной формулы

$$\mathbf{r}_{\xi\eta\zeta} = \xi\mathbf{i} + \eta\mathbf{j} + \zeta\mathbf{k} = 2\boldsymbol{\lambda}^o \circ \bar{\boldsymbol{\lambda}}$$

и соотношений (3.6).

Для винтового конического движения твердого тела функция $F(t) = 1$, а дуальная постоянная $H = 0$. В этом случае из условия (3.10) следует, что

$$R(t_1 - t_0) = 2\pi$$

или

$$[(p^2 + q^2)^{1/2} + s(pp^0 + qq^0)/(p^2 + q^2)^{1/2}](t_1 - t_0) = 2\pi$$

Отсюда находим:

$$t_1 - t_0 = 2\pi/(p^2 + q^2)^{1/2}, \quad p^2 + q^2 \neq 0; \quad pp^0 + qq^0 = 0$$

Первое из этих равенств позволяет находить время, через которое ось твердого тела z совместится (после того как опишет в пространстве линейчатую замкнутую поверхность) с прямой, на которой лежала эта ось в своем начальном положении, а третье равенство представляет собой условие, накладываемое на требуемые постоянные параметры движения тела.

Угол χ поворота твердого тела вокруг связанной оси z и величина χ^0 поступательного перемещения тела вдоль этой оси в случае винтового конического движения тела определяются формулами

$$\chi = -2\pi p/(p^2 + q^2)^{1/2}, \quad \chi^0 = \zeta(t_1) = -2\pi p^0/(p^2 + q^2)^{1/2}, \quad p^2 + q^2 \neq 0$$

Декартовые координаты ξ, η и ζ выбранного полюса O_2 твердого тела в конечный момент времени t_1 имеют следующие значения:

$$\xi(t_1) = 0, \quad \eta(t_1) = 0, \quad \zeta(t_1) = \chi^0 = -2\pi p^0/(p^2 + q^2)^{1/2}$$

4. Приложения теоремы о дуальном телесном угле. Среди важных приложений теоремы о дуальном телесном угле и полученных формул отметим задачи пространственной инерциальной навигации, а также задачи механики пространственных механизмов и роботов-манипуляторов, в особенности механизмов с винтовыми кинематическими парами, в которых непосредственно реализуются повороты на дуальные углы. В этих задачах полученные формулы могут быть использованы для оценки поступательных перемещений движущихся объектов и выходных звеньев механизмов и манипуляторов в случаях, когда они совершают описанные неголономные пространственные движения.

Другим важным примером являются задачи навигации и управления движением, в которых информация о кажущемся ускорении и кажущейся скорости движущегося объекта используется как для целей навигации, так и управления движением. Рассмотрим задачу нахождения проекций v_{xapp}, v_{yapp} и v_{zapp} вектора $\mathbf{v}_{app}$ кажущейся (apparent) скорости движущегося объекта на оси связанной с ним системы координат xyz, вращающейся с абсолютной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, по известным проекциям ω_x, ω_y, ω_z и a_x, a_y, a_z вектора $\boldsymbol{\omega}$ и вектора $\mathbf{a}$ кажущегося ускорения объекта на оси системы координат xyz, которая решается на борту объекта с помощью бесплатформенной инерциальной навигационной системы посредством численного интегрирования на бортовом вычислителе дифференциального уравнения, связывающего между собой векторы $\mathbf{v}_{app}$, $\mathbf{a}$ и $\boldsymbol{\omega}$ [22, 23].

Вектор $\mathbf{a}$ кажущегося ускорения, измеряемый в связанной с объектом системе координат xyz, и вектор $\mathbf{v}_{app}$ кажущейся скорости движущегося объекта связаны дифференциальным соотношением

$$d\mathbf{v}_{app}/dt = (d\mathbf{v}_{app}/dt)_{xyz} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{app} = \mathbf{a}$$

где $d\mathbf{v}_{app}/dt$ и $(d\mathbf{v}_{app}/dt)_{xyz}$ – абсолютная и локальная производные от вектора $\mathbf{v}_{app}$ (локальная производная вычислена в системе координат xyz, связанной с движущимся объектом), $\boldsymbol{\omega}$ – вектор абсолютной угловой скорости объекта.

В [10, 19] было показано, что рассмотрение уравнений, связывающих абсолютную и локальную производные от любого, интересующего нас вектора, может быть заменено рассмотрением кинематических уравнений винтового движения некоторого, определенным образом выбранного (вспомогательного) координатного трехгранника. В нашем случае таким вектором является вектор $\mathbf{v}_{app}$ кажущейся скорости. Соответствующий вспомогательный координатный трехгранник $x^*y^*z^*$ вводится следующим образом [23]: его начало располагается в конце вектора $\mathbf{v}_{app}$, координатные оси параллельны координатным осям связанного трехгранника xyz. Такой трехгранник движется относительно системы координат $\xi^*\eta^*\zeta^*$, координатные оси которой параллельны осям опорной (неподвижной) системы координат $\xi\eta\zeta$, а начало совпадает с началом системы координат xyz, с мгновенным кинематическим винтом $\mathbf{U}^*$, отображение которого на базис $x^*y^*z^*$ имеет следующий вид [23]:

$$\mathbf{U}^*_{x^*y^*z^*}(t) = \boldsymbol{\omega}_{x^*y^*z^*}(t) + sd\mathbf{v}_{app}(t)/dt = \boldsymbol{\omega}_{x^*y^*z^*}(t) + s\mathbf{a}_{x^*y^*z^*}(t)$$

Отметим, что отображения векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{a}$ на координатные базисы xyz и $x^*y^*z^*$ совпадают (в силу параллельности их координатных осей): $\boldsymbol{\omega}_{xyz} = \boldsymbol{\omega}_{x^*y^*z^*}$, $\mathbf{a}_{xyz} = \mathbf{a}_{x^*y^*z^*}$. Поэтому отображения мгновенного кинематического винта $\mathbf{U}^*$ на эти координатные базисы совпадают: $\mathbf{U}^*_{x^*y^*z^*} = \mathbf{U}^*_{xyz} = \boldsymbol{\omega}_{xyz}(t) + s\mathbf{a}_{xyz}(t)$.

Таким образом, нахождение проекций v_{xapp}, v_{yapp} и v_{zapp} вектора кажущейся скорости $\mathbf{v}_{app}$ на оси связанной системы координат xyz, вращающейся с абсолютной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, по известным проекциям ω_x, ω_y, ω_z и a_x, a_y, a_z векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{a}$ на оси связанной системы координат сводится к определению параметров винтового движения вспомогательной системы координат $x^*y^*z^*$ (например, соответствующих дуальных параметров Эйлера или дуальных углов Эйлера–Крылова, описывающих это движение). Эта задача может быть решена на борту движущегося объекта с помощью численного интегрирования бикватернионного кинематического уравнения движения вспомогательного координатного трехгранника $x^*y^*z^*$, имеющего вид [22, 23]

$$\begin{gathered} 2\boldsymbol{\Lambda}^{*\bullet} = \boldsymbol{\Lambda}^* \circ \mathbf{U}^*_{x^*y^*z^*}, \quad \mathbf{U}^*_{x^*y^*z^*} = \mathbf{U}^*_{xyz} = U^*_x\mathbf{i} + U^*_y\mathbf{j} + U^*_z\mathbf{k} \\ \boldsymbol{\Lambda}^* = \Lambda^*_0 + \Lambda^*_1\mathbf{i} + \Lambda^*_2\mathbf{j} + \Lambda^*_3\mathbf{k}, \quad \boldsymbol{\Lambda}^{*\bullet} = (\Lambda^*_0)^\bullet + (\Lambda^*_1)^\bullet\mathbf{i} + (\Lambda^*_2)^\bullet\mathbf{j} + (\Lambda^*_3)^\bullet\mathbf{k} \end{gathered} \tag{4.1}$$

Здесь $\boldsymbol{\Lambda}^* = \boldsymbol{\lambda}^* + s\boldsymbol{\lambda}^{*\circ}$ – бикватернион винтового конечного перемещения системы координат $x^*y^*z^*$ относительно системы координат $\xi^*\eta^*\zeta^*$, являющийся комплексной комбинацией кватерниона $\boldsymbol{\lambda}^*$ ориентации вспомогательной системы координат $x^*y^*z^*$ в системе координат $\xi^*\eta^*\zeta^*$ (кватернион $\boldsymbol{\lambda}^*$ равен кватерниону $\boldsymbol{\lambda}$ ориентации системы координат xyz движущегося объекта в неподвижной системе координат $\xi\eta\zeta$: $\boldsymbol{\lambda}^* = \boldsymbol{\lambda}$) и кватерниона $\boldsymbol{\lambda}^{*\circ}$, характеризующего поступательное перемещение системы координат $x^*y^*z^*$ в системе координат $\xi^*\eta^*\zeta^*$, Λ^*_j – дуальные параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона) этого перемещения; $U^*_x = \omega_x + sa_x$, $U^*_y = \omega_y + sa_y$ и $U^*_z = \omega_z + sa_z$ – дуальные ортогональные проекции кинематического винта $\mathbf{U}^*$ системы координат $x^*y^*z^*$, являющиеся комплексными комбинациями проекций ω_x, ω_y, ω_z и a_x, a_y, a_z вектора $\boldsymbol{\omega}$ мгновенной угловой скорости объекта и вектора $\mathbf{a}$ его кажущегося ускорения на связанные координатные оси.

Проекции v_{xapp}, v_{yapp}, v_{zapp} и $v_{\xi app}$, $v_{\eta app}$, $v_{\zeta app}$ вектора кажущейся скорости $\mathbf{v}_{app}$ на оси связанной xyz и опорной $\xi\eta\zeta$ систем координат находятся через компоненты кватернионов $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^*$ и $\boldsymbol{\lambda}^{*\circ}$ с помощью кватернионных формул

$$\begin{gathered} (\mathbf{v}_{app})_{xyz} = v_{xapp}\mathbf{i} + v_{yapp}\mathbf{j} + v_{zapp}\mathbf{k} = 2\bar{\boldsymbol{\lambda}}^{*o} \circ \boldsymbol{\lambda} \\ (\mathbf{v}_{app})_{\xi\eta\zeta} = v_{\xi app}\mathbf{i} + v_{\eta app}\mathbf{j} + v_{\zeta app}\mathbf{k} = 2\boldsymbol{\lambda} \circ \bar{\boldsymbol{\lambda}}^{*o} \end{gathered} \tag{4.2}$$

Рассмотрим такое движение объекта, при котором отображение $\mathbf{U}^*_{x^*y^*z^*}$ мгновенного кинематического винта $\mathbf{U}^*$ введенной системы координат $x^*y^*z^*$ на ее же оси, характеризующее изменение вектора $\boldsymbol{\omega}$ абсолютной угловой скорости и вектора $\mathbf{a}$ кажущегося ускорения объекта на оси связанной системы координат xyz, определяется соотношением

$$\mathbf{U}^*_{x^*y^*z^*} = \mathbf{U}^*_{xyz} = \boldsymbol{\omega}_{xyz} + s\mathbf{a}_{xya} = QF(t)\left[\cos\left(P\int_{t_0}^{t} F(\tau)d\tau + H\right)\mathbf{i} + \sin\left(P\int_{t_0}^{t} F(\tau)d\tau + H\right)\mathbf{j}\right] \quad (4.3)$$

Здесь, по-прежнему, $Q = q + sq^0$, $P = p + sp^0$, $H = \eta + s\eta^0$ – некоторые дуальные постоянные; $F(t) = f(t) + sf^0(t)$ – произвольная дуальная функция времени, ограниченная и интегрируемая на рассматриваемом отрезке времени $[t_0, t_1]$.

В этом случае дуальная ортогональная проекция U^*_z кинематического винта $\mathbf{U}^*$ на связанную с объектом координатную ось z во все время движения равна нулю:

$$U^*_z(t) = \omega_z(t) + sa_z(t) = 0$$

т.е. проекции ω_z и a_z вектора $\boldsymbol{\omega}$ абсолютной угловой скорости и вектора $\mathbf{a}$ кажущегося ускорения объекта на ось z связанной системы координат xyz во все время движения объекта равны нулю: $\omega_z(t) = 0$, $a_z(t) = 0$.

Совпадающим отображениям $\mathbf{U}^*_{x^*y^*z^*}$ и $\mathbf{U}^*_{xyz}$ мгновенного кинематического винта $\mathbf{U}^*$ на координатные базисы xyz и $x^*y^*z^*$ соответствуют отображение вектора мгновенной угловой скорости объекта на связанный базис xyz

$$\boldsymbol{\omega}_{xyz} = f(t)[q\cos\alpha(t)\mathbf{i} + q\sin\alpha(t)\mathbf{j}] \quad (4.4)$$

и отображение вектора кажущегося ускорения объекта на тот же базис

$$\mathbf{a}_{xyz} = [b(t)\cos\alpha(t) - c(t)\sin\alpha(t)]\mathbf{i} + [b(t)\sin\alpha(t) + c(t)\cos\alpha(t)]\mathbf{j} \quad (4.5)$$

где функции $b(t)$, $c(t)$, $\alpha(t)$ определены соотношениями, приведенными в п. 3 после формулы (3.3).

Аналитическое решение бикватернионного кинематического уравнения (4.1), совпадающего с точностью до обозначений с бикватернионным кинематическим уравнением движения свободного твердого тела (3.4), для этого случая движения объекта будет иметь вид соотношений (3.5), в которых следует положить $\Lambda_j = \Lambda^*_j$.

Поэтому, в соответствии с изложенным в п. 3 и в этом пункте следует, что если объект движется так, что дуальная ортогональная проекция $U^*_z = \omega_z + sa_z$ кинематического винта $\mathbf{U}^*$ на связанную с объектом координатную ось z во все время движения равна нулю, т.е. так, что во все время движения равны нулю проекции ω_z и a_z вектора $\boldsymbol{\omega}$ абсолютной угловой скорости и вектора $\mathbf{a}$ кажущегося ускорения объекта на связанную ось z, и если выше введенная ось z^*, параллельная оси z, опишет в пространстве линейчатую замкнутую поверхность (совместится в своем конечном положении с прямой, на которой лежала эта ось в своем начальном положении), то значение $v_{zapp}(t_1)$ проекции кажущейся скорости объекта на ось z^* в конечный момент времени t_1, а, следовательно, и на объектовую ось z, будет определяться формулами, аналогичными формулам для поступательного перемещения χ^0, полученным в третьем разделе.

Другими словами, теорема о дуальном телесном угле и все связанные с ней формулы, рассмотренные в третьем разделе, могут быть перенесены на задачу об изменении ориентации и кажущейся скорости движущегося объекта. Для этого достаточно в формулах, полученных в п. 3, кинематический винт $\mathbf{U}$ заменить на винт $\mathbf{U}^*$, вектор линейной скорости $\mathbf{v}$ – на вектор кажущегося ускорения $\mathbf{a}$, а величину поступательного перемещения χ^0 – на проекцию кажущейся скорости $v_{zapp}(t_1)$. Так, если винт $\mathbf{U}^*$ изменяется в соответствии с законом (4.3), при котором вектор $\boldsymbol{\omega}$ абсолютной угловой скорости и вектор $\mathbf{a}$ кажущегося ускорения объекта изменяются в соответствии с законами (4.4) и (4.5), то значение проекции кажущейся скорости $v_{zapp}(t_1)$ может быть найдено по формуле, аналогичной формуле (3.16):

$$v_{zapp}(t_1) = -2\pi[p^0/(p^2+q^2)^{1/2} - p(pp^0+qq^0)/(p^2+q^2)^{3/2}], \quad p^2+q^2 \neq 0$$

где вещественные постоянные параметры движения p, q и p^0, q^0 являются главными и моментными частями дуальных постоянных P и Q, фигурирующих в выражении (4.3) для кинематического винта $\mathbf{U}^*_{xyz} = \boldsymbol{\omega}_{xyz} + s\mathbf{a}_{xyz}$ движущегося объекта.

Две другие проекции кажущейся скорости объекта для этого момента времени будут равны нулю: $v_{xapp}(t_1) = 0$, $v_{yapp}(t_1) = 0$.

Для движения объекта, при котором функция $F(t) = 1$, а дуальная постоянная $\mathrm{H} = 0$, проекции кажущейся скорости объекта для конечного момента времени будут определяться соотношениями

$$v_{xapp}(t_1) = 0, \quad v_{yapp}(t_1) = 0, \quad v_{zapp}(t_1) = -2\pi p^0/(p^2+q^2)^{1/2}, \quad p^2+q^2 \neq 0$$

Приведенные значения проекции кажущейся скорости объекта для конечного момента времени t_1 получаются и при использовании кватернионных формул (4.2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ишлинский А.Ю.* Механика специальных гироскопических систем. Киев: Изд-во АН УССР, 1952. 432 с.
2. *Ишлинский А.Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 670 с.
3. *Hamilton W.R.* Lectures on quaternions. Dublin: Hodges and Smith, 1853. 736 p.
4. *Goodman L.E., Robinson A.R.* Effect of finite rotations on gyroscopic sensing devices // J. Appl. Mech. 1958. V. 25. № 2. P. 210–213.
5. *Журавлев В.Ф.* Основы теоретической механики. 3-е изд. М.: Физматлит, 2008. 304 с.
6. *Жбанов Ю.К., Журавлев В.Ф.* О некоторых свойствах конечных поворотов твердого тела при наличии неголономной связи // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 1. С. 9–14.
7. *Журавлев В.Ф.* Теорема о телесном угле в динамике твердого тела // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 2. С. 323–326.
8. *Журавлев В.Ф.* О геометрии конических вращений // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 3. С. 11–21.
9. *Челноков Ю.Н.* Теорема Гамильтона–Ишлинского о телесном угле и ее обобщение на неголономное пространственное движение твердого тела // Сб. науч. тр.: Математика. Механика. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 198–202.
10. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. М.: Физматлит, 2006. 511 с.
11. *Котельников А.П.* Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике. Казань, 1895. 215 с.
12. *Котельников А.П.* Винты и комплексные числа // Изв. физ.-матем. об-ва при Казанском ун-те. Сер. 2. 1896. № 6. С. 23–33.
13. *Котельников А.П.* Теория векторов и комплексные числа // Некоторые применения идей Лобачевского в механике и физике: Сб. статей. М.: Гостехиздат, 1950. С. 7–47.
14. *Study E.* Ueber neue Darstellung der Krafte. Berichte ueber der Verhandl. der Sachs. Akad., Gess. der Wiss., Math. Teil, Leipzig, 1899. B. 51.
15. *Study E.* Ueber Nicht-Euklidische und Liniengeometrie. Festschr. der Philoa. Fakult. zu Greifswald, 1900.
16. *Диментберг Ф.М.* Теория винтов и ее приложения. М.: Наука, 1978. 328 с.
17. *Clifford W.* Preliminary scetch of biquaternions // Proc. London Math. Soc. 1873. V. 4. P. 381–395.

18. *Челноков Ю.Н.* Об интегрировании кинематических уравнений винтового движения твердого тела // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 1. С. 32–39. *Chelnokov Yu.N.* On integration of kinematic equations of a rigid body's screw-motion // J. Appl. Math. Mech. 1980. V. 44. No. 1. P. 19–23.
19. *Челноков Ю.Н.* Об одной форме уравнений инерциальной навигации // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 5. С. 20–28. *Chelnokov Yu.N.* One form of the equations of Inertial navigation // Mech. Solids. 1981. V. 16. No. 5. P. 16–23.
20. *Челноков Ю.Н.* Об устойчивости решений бикватернионного кинематического уравнения винтового движения твердого тела // Сб. научно-методических статей по теоретической механике. М.: Высшая школа, 1983. Вып. 13. С. 103–109.
21. *Челноков Ю.Н.* Об определении ориентации объекта в параметрах Родрига–Гамильтона по его угловой скорости // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 3. С. 11–20. *Chelnokov Yu.N.* On determining vehicle orientation in the Rodrigues–Hamilton parameters from its angular velocity // Mech. Solids. 1977. V. 37. No. 3. P. 8–16.
22. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука, 1992. 280 с.
23. *Челноков Ю.Н.* Уравнения и алгоритмы для нахождения инерциальной ориентации и кажущейся скорости движущегося объекта в кватернионных и бикватернионных четырехмерных ортогональных операторах // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 2. С. 17–25.*Chelnokov Yu.N.* Equations and Algorithms for Determining the Inertial Attitude and Apparent Velocity of a Moving Object in Quaternion and Biquaternion 4D Orthogonal Operators. Mech. Solids. 2016. V. 51. No. 2. P. 148–155.