ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2019, № 6, с. 108–120

УДК 517.977: 534.112

ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЯМИ СТРУНЫ С НЕРАЗДЕЛЕННЫМИ МНОГОТОЧЕЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ В ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ

В. Р. Барсегян[a,b,*]

[a] *Ереванский государственный университет, Ереван, Армения*

[b] *Институт механики НАН Армении, Ереван, Армения*

**e-mail: barseghyan@sci.am*

Поступила в редакцию 19.02.2019 г.
После доработки 19.02.2019 г.
Принята к публикации 21.03.2019 г.

Рассмотрена задача управления колебаниями струны с заданными неразделенными значениями функции прогиба и скоростей в промежуточные моменты времени. Методом разделения переменных задача сводится к задаче управления обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными начальными, конечными и неразделенными многоточечными промежуточными условиями. Задача решается с помощью методов теории управления конечномерными системами с многоточечными промежуточными условиями. В качестве приложения предложенного подхода построено управляющее воздействие для задачи управления колебаниями струны с заданными неразделенными условиями на значения функции прогиба и скоростей струны в двух промежуточных моментах времени.

Ключевые слова: управление колебаниями, колебание струны, промежуточные значения, неразделенные многоточечные условия, управление

DOI: 10.1134/S0572329919060047

Введение. Одними из самых распространенных процессов в природе и технике являются колебательные процессы, которые моделируются волновым уравнением [1–3]. При этом на практике часто возникают задачи управления, когда нужно сгенерировать желаемую форму колебания, удовлетворяющую промежуточным условиям. Многие процессы управления из различных областей науки и техники приводят к необходимости исследования многоточечных краевых задач управления, характерной чертой которых является наличие неразделенных (нелокальных) условий в нескольких промежуточных точках интервала исследования. Благодаря многочисленным приложениям внимание исследователей привлекли многоточечные краевые задачи, в которых, наряду с классическими краевыми (начальное и конечное) условиями, заданы также неразделенные (нелокальные) многоточечные промежуточные условия [4–16]. Неразделенные многоточечные краевые задачи, с одной стороны, возникают как математические модели реальных процессов, а с другой – для многих уравнений невозможна корректная постановка локальных краевых задач. Неразделенность многоточечных условий может быть обусловлена, в частности, невозможностью на практике проводить замеры измеряемых параметров состояния объекта мгновенно или в его отдельно взятых точках. Подобные задачи имеют важные прикладные и теоретические значения, так что естественным образом возникает необходимость их исследования в различных постановках.

Многочисленные примеры технологических процессов, приводящих к задачам управления системами с распределенными параметрами, рассмотрены в [1–3] и предложены различные методы решения. Задачи управления колебательных процессов, как внешними, так и граничными управляющими воздействиями при различных типах граничных условий, рассмотрены в работах [8–15]. В работах [8–13] рассмотрены задачи об управлении колебаниями струны и мембраны с заданными промежуточными (локальными) состояниями с помощью внешних сил, действующих на системы. В работе [14] рассматривается многоточечная краевая задача в полислое и для нее доказывается теорема о существовании корректной краевой задачи. В работе [15] построены алгоритмы нахождения приближенного решения и установлены условия их сходимости. В [16] на основе метода параметризации исследуется линейная многоточечная краевая задача для системы нагруженных дифференциальных уравнений и предложен алгоритм нахождения решения.

В настоящей работе рассматривается задача управления для уравнения колебания струны с заданными начальными, конечными условиями и неразделенными значениями прогиба и скоростей точек струны в промежуточные моменты времени. Методом разделения переменных задача сводится к задаче управления со счетным числом обыкновенных дифференциальных уранений с заданными начальными, конечными и неразделенными многоточечными промежуточными условиями. Для каждой гармоники, используя методы теории управления конечномерными системами с многоточечными промежуточными условиями, построено управляющее воздействие. В качестве приложения предложенного конструктивного подхода построено управляющее воздействие для управления колебаниями струны с заданными неразделенными значениями функции прогиба и скоростей точек струны в двух промежуточных моментах времени, а также в случае, когда в один момент времени задано только значение прогиба, а в другой момент – значение скорости.

1. Постановка задачи. Рассмотрим однородную упругую натянутую струну длиной l, края которой закреплены. Пусть в вертикальной плоскости на струну действуют распределенные силы с плотностью $u(x, t)$, которое является управляющим воздействием.

Пусть состояние распределенной колебательной системы (малые поперечные колебания струны), т.е. отклонения от состояния равновесия, описываются функцией $Q(x,t)$, $0 \le x \le l$, $0 < t < T$, которая подчиняется при $0 < x < l$ и $0 < t < T$ волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + u(x,t) \tag{1.1}$$

с начальными условиями

$$Q(x,0) = \varphi_0(x), \quad \left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_0(x), \quad 0 \le x \le l \tag{1.2}$$

и однородными граничными условиями

$$Q(0,t) = 0, \quad Q(l,t) = 0, \quad 0 \le t \le T \tag{1.3}$$

В уравнении (1.1) $a^2 = T_0/\rho$, где T_0 – натяжение струны, ρ – плотность однородной струны. Функция $Q(x,t)$, удовлетворяющая уравнению (1.1), дважды непрерывно дифференцируема вплоть до границы области.

Пусть в некоторые промежуточные моменты времени $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m < t_{m+1} = T$ на значения функции прогиба струны и ее производные заданы неразделенные (нелокальные) условия в виде

$$\sum_{k=1}^{m} f_k Q(x, t_k) = \alpha(x) \tag{1.4}$$

$$\sum_{k=1}^{m} e_k \left.\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t}\right|_{t=t_k} = \beta(x) \tag{1.5}$$

где f_k и e_k – заданные величины $(k = 1,\ldots,m)$, а $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – некоторые известные функции.

Вообще может быть, что в некоторые моменты времени t_k $(k = 1,\ldots,m)$ в условиях (1.4), (1.5) присутствует или значение функции прогиба или значение производной этой функции, т.е. необязательно, что в каждый моменты времени t_k $(k = 1,\ldots,m)$ в условиях (1.4), (1.5) одновременно присутствовали функции $Q(x,t_k)$ и $\partial Q(x,t)/\partial t\big|_{t=t_k}$. В таких случаях будем считать, что соответствующие коэффициенты f_k или e_k равны нулю.

Задачу управления колебаниями струны с заданными неразделенными условиями (1.4), (1.5) в промежуточные моменты времени t_k $(k = 1,\ldots,m)$ можно сформулировать следующим образом: среди возможных управлений $u(x,t)$, $0 \le x \le l$, $0 \le t \le T$, требуется найти управление, переводящее колебания струны (1.1) с граничными условиями (1.3) из заданного начального состояния (1.2), обеспечивая удовлетворение неразделенных многоточечных промежуточных условий (1.4) и (1.5), в заданное конечное состояние

$$Q(x,T) = \varphi_T(x) = \varphi_{m+1}(x), \quad \left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=T} = \psi_T(x) = \psi_{m+1}(x), \quad 0 \le x \le l \tag{1.6}$$

Здесь $\varphi_0(x)$, $\psi_0(x)$, $\varphi_T(x)$, $\psi_T(x)$, $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – заданные гладкие функции, удовлетворяющие условиям согласования.

Предполагается, что система (1.1) при ограничениях (1.2)–(1.6) на промежутке времени $[0, T]$ является вполне управляемой [5, 17]. Это означает, что на промежутке времени $[0, T]$ можно выбрать управляющее воздействие $u(x,t)$, под воздействием которого функция прогиба струны $Q(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1.1) и заданным условиям (1.2)–(1.6).

2. Решение задачи. Для построения решения поставленной задачи ищем решение уравнения (1.1) с граничными условиями (1.3) в виде

$$Q(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(t) \sin\frac{\pi n}{l} x \tag{2.1}$$

Представим функции $u(x,t)$, $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ в виде рядов Фурье

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin\frac{\pi n}{l} x, \quad \alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\frac{\pi n}{l} x, \quad \beta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin\frac{\pi n}{l} x \tag{2.2}$$

Подставим разложения (2.1), (2.2) в соотношениях (1.1)–(1.6). В силу ортогональности системы собственных функции следует, что коэффициенты Фурье $Q_n(t)$ удовлетворяют счетному числу систем обыкновенных дифференциальных уранений

$$\ddot{Q}_n(t) + \lambda_n^2 Q_n(t) = u_n(t), \quad \lambda_n^2 = \left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.3}$$

и следующим начальным, неразделенным многоточечным промежуточным и конечным условиям:

$$Q_n(0) = \varphi_n^{(0)}, \quad \dot{Q}_n(0) = \psi_n^{(0)} \tag{2.4}$$

$$\sum_{k=1}^{m} f_k Q_n(t_k) = \alpha_n, \quad \sum_{k=1}^{m} e_k \dot{Q}_n(t_k) = \beta_n \tag{2.5}$$

$$Q_n(T) = \varphi_n^{(T)} = \varphi_n^{(m+1)}, \quad \dot{Q}_n(T) = \psi_n^{(T)} = \psi_n^{(m+1)} \tag{2.6}$$

где через $Q_n(t)$, $\varphi_n^{(0)}$, $\psi_n^{(0)}$, $\varphi_n^{(m+1)}$, $\psi_n^{(m+1)}$, $u_n(t)$, α_n и β_n обозначены коэффициенты Фурье, соответствующие функциям $Q(x,t)$, $\varphi_0(x)$, $\psi_0(x)$, $\varphi_{m+1}(x)$, $\psi_{m+1}(x)$, $u(x,t)$, $\alpha(x)$ и $\beta(x)$.

Общее решение уравнения (2.3) с начальными условиями (2.4) и его производная по времени имеют вид

$$Q_n(t) = \varphi_n^{(0)} \cos\lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n}\psi_n^{(0)} \sin\lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^t u_n(\tau)\sin\lambda_n(t-\tau)d\tau$$

$$\dot{Q}_n(t) = -\lambda_n\varphi_n^{(0)} \sin\lambda_n t + \psi_n^{(0)} \cos\lambda_n t + \int_0^t u_n(\tau)\cos\lambda_n(t-\tau)d\tau \tag{2.7}$$

Теперь, учитывая промежуточные неразделенные (2.5) и конечные (2.6) условия, используя подходы, приведенные в работах [5, 7], из уравнения (2.7) получим, что функции $u_n(\tau)$ для каждого n должны удовлетворять следующей системе равенств:

$$\int_0^T u_n(\tau)\sin\lambda_n(T-\tau)d\tau = C_{1n}(T), \quad \int_0^T u_n(\tau)\cos\lambda_n(T-\tau)d\tau = C_{2n}(T) \tag{2.8}$$

$$\sum_{k=1}^{m} f_k \int_0^{t_k} u_n(\tau)\sin\lambda_n(t_k-\tau)d\tau = C_{1n}^{(m)}(t_1,\dots,t_m),$$

$$\sum_{k=1}^{m} e_k \int_0^{t_k} u_n(\tau)\cos\lambda_n(t_k-\tau)d\tau = C_{2n}^{(m)}(t_1,\dots,t_m)$$

$$C_{1n}(T) = \lambda_n\varphi_n^{(m+1)} - \lambda_n\varphi_n^{(0)}\cos\lambda_n T - \psi_n^{(0)}\sin\lambda_n T \tag{2.9}$$

$$C_{2n}(T) = \psi_n^{(m+1)} + \lambda_n\varphi_n^{(0)}\sin\lambda_n T - \psi_n^{(0)}\cos\lambda_n T$$

$$C_{1n}^{(m)}(t_1,\dots,t_m) = \lambda_n\left[\alpha_n - \sum_{k=1}^{m} f_k\left(\varphi_n^{(0)}\cos\lambda_n t_k + \frac{1}{\lambda_n}\psi_n^{(0)}\sin\lambda_n t_k\right)\right]$$

$$C_{2n}^{(m)}(t_1,\dots,t_m) = \beta_n - \sum_{k=1}^{m} e_k(-\lambda_n\varphi_n^{(0)}\sin\lambda_n t_k + \psi_n^{(0)}\cos\lambda_n t_k)$$

Введем следующие функции

$$h_{1n}(\tau) = \sin\lambda_n(T-\tau), \quad h_{2n}(\tau) = \cos\lambda_n(T-\tau), \quad 0 \le \tau \le T \tag{2.10}$$

$$h_{1n}^{(m)}(\tau) = \sum_{k=1}^{m} f_k h_{1n}^{(k)}(\tau), \quad h_{1n}^{(k)}(\tau) = \begin{cases}\sin\lambda_n(t_k-\tau), & 0 \le \tau \le t_k\\ 0, & t_k < \tau \le t_{m+1} = T\end{cases}$$

$$h_{2n}^{(m)}(\tau) = \sum_{k=1}^{m} e_k h_{2n}^{(k)}(\tau), \quad h_{2n}^{(k)}(\tau) = \begin{cases}\cos\lambda_n(t_k-\tau), & 0 \le \tau \le t_k\\ 0, & t_k < \tau \le t_{m+1} = T\end{cases}$$

Тогда интегральные соотношения (2.8) при помощи функции (2.10) запишутся следующим образом

$$
\begin{gathered}
\int_0^T u_n(\tau)h_{1n}(\tau)d\tau = C_{1n}(T), \quad \int_0^T u_n(\tau)h_{2n}(\tau)d\tau = C_{2n}(T) \\
\int_0^T u_n(\tau)h_{1n}^{(m)}(\tau)d\tau = C_{1n}^{(m)}(t_1,\ldots,t_m), \quad \int_0^T u_n(\tau)h_{2n}^{(m)}(\tau)d\tau = C_{2n}^{(m)}(t_1,\ldots,t_m), \quad n = 1,2,\ldots
\end{gathered}
\tag{2.11}
$$

Таким образом, искомые функции $u_n(\tau)$, $\tau \in [0,T]$ для каждого n должны удовлетворять интегральным соотношениям (2.11).

С помощью следующих обозначений

$$
H_n(\tau) = \begin{pmatrix} h_{1n}(\tau) \\ h_{2n}(\tau) \\ h_{1n}^{(m)}(\tau) \\ h_{2n}^{(m)}(\tau) \end{pmatrix}, \quad \eta_n = \begin{pmatrix} C_{1n}(T) \\ C_{2n}(T) \\ C_{1n}^{(m)}(t_1,\ldots,t_m) \\ C_{2n}^{(m)}(t_1,\ldots,t_m) \end{pmatrix}
\tag{2.12}
$$

запишем интегральные соотношения (2.11) следующим образом

$$
\int_0^T H_n(t)u_n(t)dt = \eta_n
\tag{2.13}
$$

Из соотношения (2.13) (или (2.11)) следует, что для каждой гармоники движение, описываемое уравнением (2.3) с условиями (2.4)–(2.6), вполне управляемо тогда и только тогда, когда для любого заданного вектора η_n (2.12) можно найти управление $u_n(t)$, $t \in [0,T]$, удовлетворяющее условию (2.13) (или (2.11)).

Следуя [5, 18], для каждого $n = 1,2,\ldots$ функцию $u_n(t)$, $t \in [0,T]$, удовлетворяющую интегральному соотношению (2.13), ищем в виде

$$
u_n(t) = \left(H_n(t)\right)^T C_n + \nu_n(t)
\tag{2.14}
$$

где C_n – постоянный вектор, подлежащий определению, $\nu_n(t)$ – некоторая вектор-функция, такая что

$$
\int_0^T H_n(t)\nu_n(t)dt = 0
\tag{2.15}
$$

Здесь и далее буква “T” в верхнем индексе означает операцию транспонирования.

Подставляя (2.14) в (2.13) и учитывая условия (2.15) получим

$$
S_n C_n = \eta_n
\tag{2.16}
$$

$$
S_n = \int_0^T H_n(t)\left(H_n(t)\right)^T dt = \begin{pmatrix} s_{11}^{(n)} & s_{12}^{(n)} & s_{13}^{(n)} & s_{14}^{(n)} \\ s_{21}^{(n)} & s_{22}^{(n)} & s_{23}^{(n)} & s_{24}^{(n)} \\ s_{31}^{(n)} & s_{32}^{(n)} & s_{33}^{(n)} & s_{34}^{(n)} \\ s_{41}^{(n)} & s_{42}^{(n)} & s_{43}^{(n)} & s_{44}^{(n)} \end{pmatrix}
\tag{2.17}
$$

Здесь $H_n(t)(H_n(t))^T$ – внешнее произведение векторов. Соотношение (2.16) является системой четырех алгебраических уравнений относительно неизвестных $C_n^{(j)}$, $j = 1,\ldots,4$, имеющей решение, если $\det S_n \neq 0$ либо ранг матрицы S_n совпадает с рангом расширенной матрицы $\{S_n, \eta_n\}$.

Пусть $\det S_n \neq 0$, тогда решение уравнения (2.16) будет

$$C_n = S_n^{-1}\eta_n \tag{2.18}$$

Следовательно, из (2.14) и (2.18) имеем

$$u_n(t) = \left(H_n(t)\right)^T S_n^{-1}\eta_n + \nu_n(t) \tag{2.19}$$

Элементы матрицы S_n, согласно (2.17) и обозначениям (2.10), (2.12), имеют следующий вид

$$s_{11}^{(n)} = \int_0^T \left(h_{1n}(\tau)\right)^2 d\tau = \int_0^T \left(\sin\lambda_n(T-\tau)\right)^2 d\tau$$

$$s_{12}^{(n)} = s_{21}^{(n)} = \int_0^T h_{1n}(\tau)h_{2n}(\tau)d\tau = \int_0^T \sin\lambda_n(T-\tau)\cos\lambda_n(T-\tau)d\tau$$

$$s_{13}^{(n)} = s_{31}^{(n)} = \int_0^T h_{1n}(\tau)h_{1n}^{(m)}(\tau)d\tau = \int_0^T \sin\lambda_n(T-\tau)\left(\sum_{k=1}^m f_k h_{1n}^{(k)}(\tau)\right)d\tau$$

$$s_{14}^{(n)} = s_{41}^{(n)} = \int_0^T h_{1n}(\tau)h_{2n}^{(m)}(\tau)d\tau = \int_0^T \sin\lambda_n(T-\tau)\left(\sum_{k=1}^m e_k h_{2n}^{(k)}(\tau)\right)d\tau =$$

$$= \sum_{k=1}^m e_k \int_0^T \sin\lambda_n(T-\tau)h_{2n}^{(k)}(\tau)d\tau = \sum_{k=1}^m e_k \int_0^{t_k} \sin\lambda_n(T-\tau)\cos\lambda_n(t_k-\tau)d\tau$$

$$s_{23}^{(n)} = s_{32}^{(n)} = \int_0^T h_{2n}(\tau)h_{1n}^{(m)}(\tau)d\tau = \int_0^T \cos\lambda_n(T-\tau)\left(\sum_{k=1}^m f_k h_{1n}^{(k)}(\tau)\right)d\tau \tag{2.20}$$

$$s_{22}^{(n)} = \int_0^T \left(h_{2n}(\tau)\right)^2 d\tau = \int_0^T \left(\cos\lambda_n(T-\tau)\right)^2 d\tau$$

$$s_{24}^{(n)} = s_{42}^{(n)} = \int_0^T h_{2n}(\tau)h_{2n}^{(m)}(\tau)d\tau = \int_0^T \cos\lambda_n(T-\tau)\left(\sum_{k=1}^m e_k h_{2n}^{(k)}(\tau)\right)d\tau =$$

$$= \sum_{k=1}^m e_k \int_0^T \cos\lambda_n(T-\tau)h_{2n}^{(k)}(\tau)d\tau = \sum_{k=1}^m e_k \int_0^{t_k} \cos\lambda_n(T-\tau)\cos\lambda_n(t_k-\tau)d\tau$$

$$s_{33}^{(n)} = \int_0^T (h_{1n}^{(m)}(\tau))^2 d\tau = \int_0^T \left(\sum_{k=1}^m f_k h_{1n}^{(k)}(\tau)\right)^2 d\tau$$

$$s_{34}^{(n)} = s_{43}^{(n)} = \int_0^T h_{1n}^{(m)}(\tau)h_{2n}^{(m)}(\tau)d\tau = \int_0^T \left(\sum_{k=1}^m f_k h_{1n}^{(k)}(\tau)\right)\left(\sum_{k=1}^m e_k h_{2n}^{(k)}(\tau)\right)d\tau$$

$$s_{44}^{(n)} = \int_0^T (h_{2n}^{(m)}(\tau))^2 d\tau = \int_0^T \left(\sum_{k=1}^m e_k h_{2n}^{(k)}(\tau)\right)^2 d\tau$$

Отметим, что, согласно обозначениям (2.10), будем иметь

$$
h_{1n}^{(m)}(t) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{m} f_k \sin \lambda_n(t_k - t), & 0 \le t \le t_1 \\ \sum\limits_{k=2}^{m} f_k \sin \lambda_n(t_k - t), & t_1 < t \le t_2 \\ \quad \ldots \\ \sum\limits_{k=m-1}^{m} f_k \sin \lambda_n(t_k - t), & t_{m-2} < t \le t_{m-1} \\ f_m \sin \lambda_n(t_m - t), & t_{m-1} < t \le t_m \end{cases}
$$

$$
h_{2n}^{(m)}(t) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{m} e_k \cos \lambda_n(t_k - t), & 0 \le t \le t_1 \\ \sum\limits_{k=2}^{m} e_k \cos \lambda_n(t_k - t), & t_1 < t \le t_2 \\ \quad \ldots \\ \sum\limits_{k=m-1}^{m} e_k \cos \lambda_n(t_k - t), & t_{m-2} < t \le t_{m-1} \\ e_m \cos \lambda_n(t_m - t), & t_{m-1} < t \le t_m \end{cases}
$$

Следовательно, учитывая обозначения (2.10) и (2.12), управляющее воздействие $u_n(t),\ t \in [0,T]$, согласно (2.19), представляется в следующем виде:

$$
u_n(t) = \begin{cases} \left(\sin \lambda_n(T - t)\ \cos\lambda_n(T - t)\ \sum\limits_{k=1}^{m} f_k\sin\lambda_n(t_k - t)\ \sum\limits_{k=1}^{m} e_k\cos\lambda_n(t_k - t)\right) S_n^{-1}\eta_n + \nu_n(t), \\ 0 \le t \le t_1 \\ \left(\sin\lambda_n(T - t)\ \cos\lambda_n(T - t)\ \sum\limits_{k=2}^{m} f_k\sin\lambda_n(t_k - t)\ \sum\limits_{k=2}^{m} e_k\cos\lambda_n(t_k - t)\right) S_n^{-1}\eta_n + \nu_n(t), \\ t_1 < t \le t_2 \\ \quad \ldots \\ (\sin \lambda_n(T - t)\ \cos \lambda_n(T - t)\ \ f_m \sin \lambda_n(t_m - t)\ \ e_m\cos\lambda_n(t_m - t)) S_n^{-1}\eta_n + \nu_n(t), \\ t_{m-1} < t \le t_m \\ (\sin \lambda_n(T - t)\ \cos \lambda_n(T - t)\ \quad 0 \quad\quad 0) S_n^{-1}\eta_n + \nu_n(t), \\ t_m < t \le t_{m+1} = T \end{cases}
$$

Подставляя полученные выражения $u_n(t)$ в (2.7), получим $Q_n(t)$ на промежутке времени $t \in [0,T]$, а из формул (2.1) и (2.2) – получим функции $Q(x,t)$ прогиба и $u(x,t)$

управления. Таким образом, явные выражения для функции управления $u(x,t)$ имеют вид:

при $0 \le t \le t_1$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\sin\lambda_n(T-t)\ \cos\lambda_n(T-t)\ \sum_{k=1}^{m} f_k \sin\lambda_n(t_k - t)\sum_{k=1}^{m} e_k \cos\lambda_n(t_k - t)\right)\times \right.$$
$$\left. \times S_n^{-1}\eta_n + \nu_n(t)\right]\sin\frac{\pi n}{l}x;$$

при $t_1 < t \le t_2$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\sin\lambda_n(T-t)\ \cos\lambda_n(T-t)\ \sum_{k=2}^{m} f_k \sin\lambda_n(t_k - t)\ \sum_{k=2}^{m} e_k \cos\lambda_n(t_k - t)\right)\times \right.$$
$$\left. \times\ S_n^{-1}\eta_n + \nu_n(t)\right]\sin\frac{\pi n}{l}x;$$

$$\ldots$$

при $t_{m-1} < t \le t_m$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}[(\sin\lambda_n(T-t)\ \cos\lambda_n(T-t)f_m\ \sin\lambda_n(t_m-t)e_m\ \cos\lambda_n(t_m-t))S_n^{-1}\eta_n+\nu_n(t)]\sin\frac{\pi n}{l}x;$$

при $t_m < t \le t_{m+1} = T$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}[(\sin\lambda_n(T-t)\ \cos\lambda_n(T-t)\ 0\ 0)S_n^{-1}\eta_n + \nu_n(t)]\sin\frac{\pi n}{l}x$$

Видно, что управляющее воздействие, решающее поставленную задачу, является кусочно непрерывной функцией.

3. Пример. Предположим, что $m = 2$ (т.е. $0 < t_1 < t_2 < t_3 = T$), тогда для $\nu_n(t) = 0$ из выражения для $u_n(t)$ будем иметь:

при $0 \le t \le t_1$

$$u_n(t) = \big(\sin\lambda_n(T-t)\ \cos\lambda_n(T-t)\ f_1\sin\lambda_n(t_1-t) + f_2\sin\lambda_n(t_2-t)\ e_1\cos\lambda_n(t_1-t) +$$
$$+ e_2\cos\lambda_n(t_2-t)\big)\,S_n^{-1}\eta;$$

при $t_1 < t \le t_2$

$$u_n(t) = \big(\sin\lambda_n(T-t)\ \cos\lambda_n(T-t)\ f_2\sin\lambda_n(t_2-t)\ e_2\cos\lambda_n(t_2-t)\big)\,S_n^{-1}\eta_n;$$

при $t_2 < t \le t_3 = T$

$$u_n(t) = \big(\sin\lambda_n(T-t)\ \cos\lambda_n(T-t)\ 0\ 0\big)\,S_n^{-1}\eta_n$$

Из формулы (2.20) получим

$$s_{11}^{(n)} = \frac{T}{2} - \frac{1}{4\lambda_n}\sin 2\lambda_n T, \quad s_{12}^{(n)} = s_{21}^{(n)} = \frac{\sin^2\lambda_n T}{2\lambda_n}, \quad s_{22}^{(n)} = \frac{T}{2} + \frac{1}{4\lambda_n}\sin 2\lambda_n T$$

$$s_{13}^{(n)} = s_{31}^{(n)} = f_1\int_0^{t_1}\sin\lambda_n(T-\tau)\sin\lambda_n(t_1-\tau)d\tau + f_2\int_0^{t_2}\sin\lambda_n(T-\tau)\sin\lambda_n(t_2-\tau)d\tau =$$
$$= \frac{1}{2}\left[f_1t_1\cos\lambda_n(T-t_1) + f_2t_2\cos\lambda_n(T-t_2)\right] - \frac{\cos\lambda_n T}{2\lambda_n}\left[f_1\sin\lambda_n t_1 + f_2\sin\lambda_n t_2\right]$$

$$s_{14}^{(n)} = s_{41}^{(n)} = e_1\int_0^{t_1}\sin\lambda_n(T-\tau)\cos\lambda_n(t_1-\tau)d\tau + e_2\int_0^{t_2}\sin\lambda_n(T-\tau)\cos\lambda_n(t_2-\tau)d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\left[e_1t_1\sin\lambda_n(T-t_1) + e_2t_2\sin\lambda_n(T-t_2)\right] + \frac{\sin\lambda_nT}{2\lambda_n}\left[e_1\sin\lambda_nt_1 + e_2\sin\lambda_nt_2\right]$$

$$s_{23}^{(n)} = s_{32}^{(n)} = f_1\int_0^{t_1}\cos\lambda_n(T-\tau)\sin\lambda_n(t_1-\tau)d\tau + f_2\int_0^{t_2}\cos\lambda_n(T-\tau)\sin\lambda_n(t_2-\tau)d\tau =$$

$$= \frac{1}{4\lambda_n}\{2f_1\sin\lambda_nT\sin\lambda_nt_1 - 2\lambda_n\left[f_1t_1\sin\lambda_n(T-t_1) + f_2t_2\sin\lambda_n(T-t_2)\right] +$$

$$+ 2f_2\sin\lambda_nT\sin\lambda_nt_2$$

$$s_{33}^{(n)} = f_1^2\int_0^{t_1}\left(\sin\lambda_n(t_1-\tau)\right)^2d\tau + 2f_1f_2\int_0^{t_1}\sin\lambda_n(t_1-\tau)\sin\lambda_n(t_2-\tau)d\tau +$$

$$+ f_2^2\int_0^{t_2}\left(\sin\lambda_n(t_2-\tau)\right)^2d\tau = \frac{1}{4\lambda_n}[2\lambda_n(f_1^2t_1 + f_2^2t_2) + 4f_1f_2t_1\lambda_n\cos\lambda_n(t_1-t_2) -$$

$$- f_1^2\sin 2\lambda_nt_1 - 2f_2\cos\lambda_nt_2\left(2f_1\sin\lambda_nt_1 + f_2\sin\lambda_nt_2\right)]$$

$$s_{24}^{(n)} = s_{42}^{(n)} = e_1\int_0^{t_1}\cos\lambda_n(T-\tau)\cos\lambda_n(t_1-\tau)d\tau + e_2\int_0^{t_2}\cos\lambda_n(T-\tau)\cos\lambda_n(t_2-\tau)d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\lambda_n}\{\lambda_n\left[e_1t_1\cos\lambda_n(T-t_1) + e_2t_2\cos\lambda_n(T-t_2)\right] + \cos\lambda_nT\left(e_1\sin\lambda_nt_1 + e_2\sin\lambda_nt_2\right)\}$$

$$s_{34}^{(n)} = s_{43}^{(n)} = \int_0^{T}\left[f_1\sin\lambda_n(t_1-\tau) + f_2\sin\lambda_n(t_2-\tau)\right]\times$$

$$\times\left[e_1\cos\lambda_n(t_1-\tau) + e_2\cos\lambda_n(t_2-\tau)\right]d\tau = e_1f_1\int_0^{t_1}\sin\lambda_n(t_1-\tau)\cos\lambda_n(t_1-\tau)d\tau +$$

$$+ e_2f_1\int_0^{t_1}\sin\lambda_n(t_1-\tau)\cos\lambda_n(t_2-\tau)d\tau + e_1f_2\int_0^{t_1}\sin\lambda_n(t_2-\tau)\cos\lambda_n(t_1-\tau)d\tau +$$

$$+ e_2f_2\int_0^{t_1}\sin\lambda_n(t_2-\tau)\cos\lambda_n(t_2-\tau)d\tau = \frac{1}{2\lambda_n}\left[\left(e_2f_1 + e_1f_2\right)\sin\lambda_nt_1\sin\lambda_nt_2 +\right.$$

$$\left.+ e_1f_1\sin^2\lambda_nt_1 + e_2f_2\sin^2\lambda_nt_2 + \lambda_nt_1\left(e_1f_2 - e_2f_1\right)\sin\lambda_n(t_2-t_1)\right]$$

$$s_{44}^{(n)} = e_1^2\int_0^{t_1}\left(\cos\lambda_n(t_1-\tau)\right)^2d\tau + 2e_1e_2\int_0^{t_1}\cos\lambda_n(t_1-\tau)\cos\lambda_n(t_2-\tau)d\tau +$$

$$+ e_2^2\int_0^{t_2}\left(\cos\lambda_n(t_2-\tau)\right)^2d\tau = \frac{1}{4\lambda_n}[2\lambda_n(e_1^2t_1 + e_2^2t_2) + 4e_1e_2t_1\lambda_n\cos\lambda_n(t_1-t_2) +$$

$$+ 4e_1e_2t_2\cos\lambda_nt_2\sin\lambda_nt_1 + e_1^2\sin 2\lambda_nt_1 + e_2^2\sin 2\lambda_nt_2]$$

Полагая, что $t_1 = l/a$, $t_2 = 2l/a$, $T = 4l/a$, получим, что $t_1\lambda_n = \pi n$, $t_2\lambda_n = 2\pi n$, $T\lambda_n = 4\pi n$. Следовательно, из вышеприведенных выражений получим

$$s_{11}^{(n)} = s_{22}^{(n)} = \frac{2l}{a}, \quad s_{12}^{(n)} = s_{21}^{(n)} = s_{14}^{(n)} = s_{41}^{(n)} = s_{23}^{(n)} = s_{32}^{(n)} = s_{34}^{(n)} = s_{43}^{(n)} = 0$$

$$s_{13}^{(n)} = s_{31}^{(n)} = \frac{l}{2a}[(-1)^n f_1 + 2f_2], \quad s_{33}^{(n)} = \frac{l}{2a}[f_1^2 + 2f_2^2 + 2(-1)^n f_1 f_2]$$

$$s_{24}^{(n)} = s_{42}^{(n)} = \frac{l}{2a}[(-1)^n e_1 + 2e_2], \quad s_{44}^{(n)} = \frac{l}{2a}[e_1^2 + 2e_2^2 + 2(-1)^n e_1 e_2]$$

или

$$S_n = \begin{pmatrix} \frac{2l}{a} & 0 & \frac{l}{2a}[(-1)^n f_1 + 2f_2] & 0 \\ 0 & \frac{2l}{a} & 0 & \frac{l}{2a}[(-1)^n e_1 + 2e_2] \\ \frac{l}{2a}[(-1)^n f_1 + 2f_2] & 0 & \frac{l}{2a}[f_1^2 + 2f_2^2 + 2(-1)^n f_1 f_2] & 0 \\ 0 & \frac{l}{2a}[(-1)^n e_1 + 2e_2] & 0 & \frac{l}{2a}[e_1^2 + 2e_2^2 + 2(-1)^n e_1 e_2] \end{pmatrix}$$

Отсюда будем иметь, что $\det S_n = \left(\frac{l}{2a}\right)^4 [2f_1^2 + ((-1)^n f_1 + 2f_2)^2][2e_1^2 + ((-1)^n e_1 + 2e_2)^2]$. Ясно, что при $f_1 \neq 0$, $f_2 \neq 0$, $e_1 \neq 0$ и $e_2 \neq 0$ следует $\det S_n \neq 0$. Следовательно, для обратной матрицы получим

$$S_n^{-1} = \begin{pmatrix} s_{11}^{-(n)} & 0 & s_{13}^{-(n)} & 0 \\ 0 & s_{22}^{-(n)} & 0 & s_{24}^{-(n)} \\ s_{31}^{-(n)} & 0 & s_{33}^{-(n)} & 0 \\ 0 & s_{42}^{-(n)} & 0 & s_{44}^{-(n)} \end{pmatrix}$$

$$s_{11}^{-(n)} = \frac{2a}{l}\frac{f_1^2 + 2(-1)^n f_1 f_2 + 2f_2^2}{2f_1^2 + [(-1)^n f_1 + 2f_2]^2}, \quad s_{13}^{-(n)} = -s_{31}^{-(n)} = \frac{2a}{l}\frac{(-1)^n f_1 + 2f_2}{2f_1^2 + [(-1)^n f_1 + 2f_2]^2}$$

$$s_{22}^{-(n)} = \frac{2a}{l}\frac{e_1^2 + 2(-1)^n e_1 e_2 + 2e_2^2}{2e_1^2 + [(-1)^n e_1 + 2e_2]^2}, \quad s_{24}^{-(n)} = s_{42}^{-(n)} = \frac{2a}{l}\frac{-[(-1)^n e_1 + 2e_2]}{2e_1^2 + [(-1)^n e_1 + 2e_2]^2}$$

$$s_{33}^{-(n)} = \frac{8a}{l}\frac{1}{2f_1^2 + [(-1)^n f_1 + 2f_2]^2}, \quad s_{44}^{-(n)} = \frac{8a}{l}\frac{1}{2e_1^2 + [(-1)^n e_1 + 2e_2]^2}$$

Из формулы (2.12) с учетом (2.9) получим

$$\eta_n = \begin{pmatrix} \eta_1^{(n)} \\ \eta_2^{(n)} \\ \eta_3^{(n)} \\ \eta_4^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_n(\varphi_n^{(3)} - \varphi_n^{(0)}) \\ \psi_n^{(3)} - \psi_n^{(0)} \\ \lambda_n[\alpha_n - \varphi_n^{(0)}((-1)^n f_1 + f_2)] \\ \beta_n - \psi_n^{(0)}[(-1)^n e_1 + e_2] \end{pmatrix}$$

Выполняя произведение S_n^{-1} и η_n, будем иметь

$$S_n^{-1}\eta_n = \begin{pmatrix} s_{11}^{-(n)}\eta_1^{(n)} + s_{13}^{-(n)}\eta_3^{(n)} \\ s_{22}^{-(n)}\eta_2^{(n)} + s_{24}^{-(n)}\eta_4^{(n)} \\ s_{31}^{-(n)}\eta_1^{(n)} + s_{33}^{-(n)}\eta_3^{(n)} \\ s_{42}^{-(n)}\eta_2^{(n)} + s_{44}^{-(n)}\eta_4^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11}^{-(n)}\lambda_n(\varphi_n^{(3)} - \varphi_n^{(0)}) + s_{13}^{-(n)}\lambda_n[\alpha_n - \varphi_n^{(0)}((-1)^n f_1 + f_2)] \\ s_{22}^{-(n)}(\psi_n^{(3)} - \psi_n^{(0)}) + s_{24}^{-(n)}[\beta_n - \psi_n^{(0)}[(-1)^n e_1 + e_2]] \\ s_{31}^{-(n)}\lambda_n(\varphi_n^{(3)} - \varphi_n^{(0)}) + s_{33}^{-(n)}\lambda_n[\alpha_n - \varphi_n^{(0)}((-1)^n f_1 + f_2)] \\ s_{42}^{-(n)}(\psi_n^{(3)} - \psi_n^{(0)}) + s_{44}^{-(n)}[\beta_n - \psi_n^{(0)}[(-1)^n e_1 + e_2]] \end{pmatrix}$$

Таким образом, получим выражения для функции управления $u(x,t)$ в виде:

при $0 \le t \le l/a$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ (s_{11}^{-(n)}\eta_1^{(n)} + s_{13}^{-(n)}\eta_3^{(n)}) \sin\lambda_n(T-t) + (s_{22}^{-(n)}\eta_2^{(n)} + s_{24}^{-(n)}\eta_4^{(n)}) \cos\lambda_n(T-t) + \\ + (s_{31}^{-(n)}\eta_1^{(n)} + s_{33}^{-(n)}\eta_3^{(n)}) [f_1 \sin\lambda_n(t_1-t) + f_2 \sin\lambda_n(t_2-t)] + \\ + (s_{42}^{-(n)}\eta_2^{(n)} + s_{44}^{-(n)}\eta_4^{(n)}) [e_1 \cos\lambda_n(t_1-t) + e_2 \cos\lambda_n(t_2-t)] \Big\} \sin\frac{\pi n}{l} x;$$

при $l/a < t \le 2l/a$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ (s_{11}^{-(n)}\eta_1^{(n)} + s_{13}^{-(n)}\eta_3^{(n)}) \sin\lambda_n(T-t) + (s_{22}^{-(n)}\eta_2^{(n)} + s_{24}^{-(n)}\eta_4^{(n)}) \cos\lambda_n(T-t) + \\ + (s_{31}^{-(n)}\eta_1^{(n)} + s_{33}^{-(n)}\eta_3^{(n)}) f_2 \sin\lambda_n(t_2-t) + (s_{42}^{-(n)}\eta_2^{(n)} + s_{44}^{-(n)}\eta_4^{(n)}) e_2 \cos\lambda_n(t_2-t) \Big\} \sin\frac{\pi n}{l} x;$$

при $2l/a < t \le 4l/a$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \{ (s_{11}^{-(n)}\eta_1^{(n)} + s_{13}^{-(n)}\eta_3^{(n)}) \sin\lambda_n(T-t) + (s_{22}^{-(n)}\eta_2^{(n)} + s_{24}^{-(n)}\eta_4^{(n)}) \cos\lambda_n(T-t) \} \sin\frac{\pi n}{l} x$$

В предположении, что $f_2 = e_1 = 0$, а $f_1 = e_2 = 1$, условия (1.4) и (1.5) принимают вид

$$Q(x,t_1) = \alpha(x), \quad \left.\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t}\right|_{t=t_2} = \beta(x)$$

В этом случае для матриц S_n и S_n^{-1} будем иметь

$$S_n = \begin{pmatrix} \frac{2l}{a} & 0 & \frac{(-1)^n l}{2a} & 0 \\ 0 & \frac{2l}{a} & 0 & \frac{l}{a} \\ \frac{(-1)^n l}{2a} & 0 & \frac{l}{2a} & 0 \\ 0 & \frac{l}{a} & 0 & \frac{l}{a} \end{pmatrix}, \quad S_n^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2a}{3l} & 0 & -\frac{2(-1)^n a}{3l} & 0 \\ 0 & \frac{a}{l} & 0 & -\frac{a}{l} \\ -\frac{2(-1)^n a}{3l} & 0 & \frac{8a}{3l} & 0 \\ 0 & -\frac{a}{l} & 0 & \frac{2a}{l} \end{pmatrix}$$

Отметим, что $\det S_n = \frac{3}{4}\left(\frac{l}{a}\right)^4$. Следовательно, из (2.12) с учетом (2.9) получим

$$\eta_n = \begin{pmatrix} \lambda_n(\varphi_n^{(3)} - \varphi_n^{(0)}) \\ \psi_n^{(3)} - \psi_n^{(0)} \\ \lambda_n[\alpha_n - \varphi_n^{(0)}(-1)^n] \\ \beta_n - \psi_n^{(0)} \end{pmatrix}, \quad S_n^{-1}\eta_n = \begin{pmatrix} \frac{2a}{3l}\lambda_n[\varphi_n^{(3)} - (-1)^n\alpha_n] \\ \frac{a}{l}(\psi_n^{(3)} - \beta_n) \\ \frac{2a}{3l}\lambda_n[4\alpha_n - (-1)^n(\varphi_n^{(3)} + 3\varphi_n^{(0)})] \\ \frac{a}{l}(2\beta_n - \psi_n^{(3)} - \psi_n^{(0)}) \end{pmatrix},$$

Таким образом, имея значение вектора $S_n^{-1}\eta_n$, получим явные выражения для функции управления $u(x,t)$ в виде:

при $0 \le t \le l/a$

$$u(x,t) = \frac{a}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{3}\lambda_n[\varphi_n^{(3)} - (-1)^n\alpha_n]\sin\lambda_n(T-t) + (\psi_n^{(3)} - \beta_n)\cos\lambda_n(T-t) + \right.$$
$$+\frac{2}{3}\lambda_n[4\alpha_n - (-1)^n(\varphi_n^{(3)} + 3\varphi_n^{(0)})]\sin\lambda_n(t_1 - t) +$$
$$\left. + (2\beta_n - \psi_n^{(3)} - \psi_n^{(0)})\cos\lambda_n(t_2 - t)\right\}\sin\frac{\pi n}{l}x;$$

при $l/a < t \le 2l/a$

$$u(x,t) = \frac{a}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{3}\lambda_n[\varphi_n^{(3)} - (-1)^n\alpha_n]\sin\lambda_n(T-t) + (\psi_n^{(3)} - \beta_n)\cos\lambda_n(T-t) + \right.$$
$$\left. + (2\beta_n - \psi_n^{(3)} - \psi_n^{(0)})\cos\lambda_n(t_2 - t)\right\}\sin\frac{\pi n}{l}x;$$

при $2l/a < t \le 4l/a$

$$u(x,t) = \frac{a}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{3}\lambda_n[\varphi_n^{(3)} - (-1)^n\alpha_n]\sin\lambda_n(T-t) + (\psi_n^{(3)} - \beta_n)\cos\lambda_n(T-t)\right\}\sin\frac{\pi n}{l}x$$

Таким образом, имея явные выражения функций управления, с помощью вышеприведенных формул можно найти функцию прогиба стуны.

Заключение. Задача управления колебаниями струны с заданными неразделенными значениями функции прогиба и скоростей в промежуточные моменты времени методом разделения переменных сводится к задаче управления со счетным числом обыкновенных дифференциальных уранений с заданными начальными, конечными и неразделенными многоточечными промежуточными условиями. Задача решается с помощью методов теории управления конечномерными системами с многоточечными промежуточными условиями. В качестве приложения предложенного подхода построено управляющее воздействие для колебания струны с заданными неразделенными значениями прогиба и скоростей точек струны в двух промежуточных моментах времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.
2. *Сиразетдинов Т.К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1977. 480 с.
3. *Знаменская Л.Н.* Управление упругими колебаниями. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 176 с.
4. *Ащепков Л.Т.* Оптимальное управление системой с промежуточными условиями // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 2. С. 215–222.
5. *Барсегян В.Р.* Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. М.: Наука, 2016. 230 с.
6. *Барсегян В.Р.* Задача управления для поэтапно меняющихся линейных систем нагруженных дифференциальных уравнений с неразделенными многоточечными промежуточными условиями // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 6. С. 21–29.
7. *Барсегян В.Р., Барсегян Т.В.* Об одном подходе к решению задач управления динамических систем с неразделенными многоточечными промежуточными условиями // Автоматика и телемеханика. 2015. № 4. С. 3–15.

8. *Барсегян В.Р., Саакян М.А.* Оптимальное управление колебаниями струны с заданными состояниями в промежуточные моменты времении // Известия НАН РА. Механика. 2008. Т. 61. № 2. С. 52–60.
9. *Барсегян В.Р.* Об оптимальном управлении колебаниями мембраны при фиксированных промежуточных состояниях // Уч. записки ЕГУ. 1998. № 1(188). С. 24–29.
10. *Барсегян В.Р.* О задаче граничного управления колебаниями струны с заданными состояниями в промежуточные моменты времени // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник докладов. Казань, 20–24 августа 2015. С. 354–356.
11. *Барсегян В.Р.* Об одной задаче граничного оптимального управления колебаниями струны с ограничениями в промежуточные моменты времени // “Аналитическая механика, устойчивость и управление”: труды XI Международной Четаевской конференции. Т. 3. Ч. I. Казань, 13–17 июня 2017 г. Казань: КНИТУ-КАИ, 2017. С. 119–125.
12. *Корзюк В.И., Козловская И.С.* Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени // I. Труды Ин-та мат. НАН Беларуси. 2010. Т. 18. № 2. С. 22–35.
13. *Корзюк В.И., Козловская И.С.* Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени // II. Труды Ин-та мат. НАН Беларуси. 2011. Т. 19. № 1. С. 62–70.
14. *Макаров А.А., Левкин Д.А.* Многоточечная краевая задача для псевдодифференциальных уравнений в полислое // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія: Математика, прикладна математика і механіка. 2014. № 1120. Вып. 69. С. 64–74.
15. *Асанова А.Т., Иманчиев А.Е.* О разрешимости нелокальной краевой задачи для нагруженных гиперболических уравнений с многоточечными условиями // Вестник Карагандинского университета. Серия Математика. 2016. № 1(81). С. 15–20.
16. *Бакирова Э.А., Кадирбаева Ж.М.* О разрешимости линейной многоточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений // Изв. НАН РК. Сер.физ.-мат. 2016. № 5. С. 168–175.
17. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением, М.: Наука, 1968. 476 с.
18. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 496 с.