ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2019, № 6, с. 20–29

УДК 551.24 + 51-72;539.3

ДИНАМИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ НА ТРУБОПРОВОД С УЧЕТОМ СУХОГО ТРЕНИЯ НА ЕГО ПОВЕРХНОСТИ

А. Н. Филиппов

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования “Российский государственный университет нефти и газа (национальный исследовательский университет) имени И.М. Губкина”, Москва, Россия

e-mail: filippov.a@gubkin.ru

Поступила в редакцию 09.01.2019 г.
После доработки 09.01.2019 г.
Принята к публикации 30.01.2019 г.

Получено точное аналитическое решение задачи о волновом движении трубчатого полубесконечного стержня, взаимодействующего с окружающей его упругой средой по закону сухого трения Кулона, при действии на его торце экспоненциально падающей динамической нагрузки (моделирование подрыва заряда ВВ) и в случае удара жестким телом конечной массы по этому торцу. Исследована картина волнового движения в зависимости от параметров нагружения: определены передний и задний фронты упругой волны, найдено распределение остаточных деформаций при ее прохождении по стержню. Полученные результаты могут быть использованы при расчете деформации нефте- и газопроводов в случае ударных нагружений.

Ключевые слова: упругая волна, волна остановки, сухое трение, ударная нагрузка, среда Винклера

DOI: 10.1134/S0572329919050076

1. Введение. На практике часто приходится сталкиваться с проблемами расчета волновых процессов в телах удлиненной формы, находящихся в контакте с окружающей средой или другими телами. При этом, как правило, картина движения качественно (не говоря уже о количественной стороне вопроса) зависит от вида, характера и степени взаимодействия названных объектов. К задачам подобного рода можно отнести движение заглубленного в грунт трубопровода, исследование процесса забивки свай, скольжение протяженных тел в каналах при воздействии ударной нагрузки, динамическое контактное взаимодействие армирующих волокон и матрицы композитных материалов и т.п. Поскольку решение таких задач в точной постановке даже в рамках линейной теории упругости встречает значительные математические трудности, то обычный подход к преодолению последних основывается на включении в уравнения движения исследуемого тела реакций контактирующих с ним объектов.

Ряд интересных и важных задач в случае взаимодействия упругого стержня и жесткой среды при постоянной по величине силе сухого трения, действующей на контактной поверхности при наличии относительного движения, детально исследован в работах [1–12], в том числе применительно к заглубленному в грунт трубопроводу [4, 11]. В упомянутых работах сила трения не зависела от деформации ни самого стержня, ни окружающей его среды. В работе [13] этот пробел был устранен, и сила сухого трения в динамическом режиме была принята пропорциональной продольной деформации стержня в случае его сжатия из-за наличия окружающей стержень среды типа Винклера [14]. В монографии Л.В. Никитина [15] приведен детальный обзор работ, опубликованных до 1997 года, и даны точные аналитические решения задач статики и динамики упругих и упругопластических тел с сухим трением, в том числе по моделированию ударного воздействия на трубопровод, находящийся в упругой среде. Следует отметить, что все краевые задачи в [15] были рассмотрены в одномерной постановке. В последние годы интерес к задачам подобного типа не ослабевает: в работе [16], например, представлены модели сейсмического режима и блоковой динамики, основанные на фрикционных автоколебаниях в системах с нелинейным сухим трением. При этом получено семейство моделей Барриджа и Кнопова для описания генерации землетрясений при относительном движении бортов разлома. Развиваются двумерные модели динамики стержней [17], в том числе с учетом деформации окружающей среды [18] при наличии сухого трения на боковой поверхности. Рассматривается и совместное движение пары контактирующих стержней [19]. Однако решение краевых задач ведется в основном численными методами. Между тем наличие аналитических решений даже в простых случаях позволяет верифицировать численные алгоритмы и схемы.

В данной работе применительно к перечисленным выше явлениям используется модель взаимодействия длинного тонкого упругого тела (трубчатого стержня) с окружающей его упругой же средой, представляющей собой линейное винклеровское основание, предложенная в работе [13]. При этом в случае проскальзывания между телом и средой, на поверхности контакта действует сила сухого трения, величина которой зависит от амплитуды проходящего по трубе импульса напряжений.

2. Постановка задачи и анализ решения. Одномерное уравнение движения тонкого однородного линейно-упругого трубчатого стержня, взаимодействующего по закону сухого трения Кулона с окружающей его средой типа Винклера, имеет следующий вид [13]:

$$a_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\kappa\lambda \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.1}$$

где x — продольная лагранжева координата, t — время, $u(t, x)$ — продольное перемещение плоских сечений стержня, $a_0 = \sqrt{E/\rho}$ — эффективная скорость звука, ρ, E и ν — средние плотность материала трубы (с учетом ее содержимого), модуль Юнга и коэффициент Пуассона, $\lambda = k\nu q/\rho$ — постоянная, имеющая размерность ускорения, q — радиальная жесткость винклеровской “постели”. Отметим, что в случае проскальзывания имеем $\kappa = \operatorname{sign} \partial u/\partial t$, а в случае покоя функция $\kappa(x)$ находится в процессе решения и определяет ту часть предельной силы трения, которая необходима для поддержания равновесия в каждом сечении стержня. Уравнение (2.1) моделирует динамику заглубленного в грунт трубопровода в случае деформации сжатия, когда не возникает зон потери контакта трубопровода с окружающей его средой.

Предполагается, что в начальный момент времени полубесконечный трубчатый стержень был не напряжен, не деформирован и $\kappa = 0$:

$$u(0, x) = \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0, \quad x > 0 \tag{2.2}$$

Здесь рассматриваются только сжимающие нагрузки, которые не приводят к прерыванию контакта стержня и среды. В этом наиболее простом случае можно строго показать, что передний фронт упругой волны как сильного, так и слабого разрывов распространяется со скоростью звука a_0[1]. Поэтому, в квазилинейном дифференциальном уравнении (2.1) следует положить $\kappa = \mathrm{H}\left(t - x/a_0\right)$, избавившись таким образом от нелинейности ($\mathrm{H}(t)$ – единичная функция Хевисайда).

Для дальнейшего рассмотрения удобно ввести безразмерные переменные:

$$\tilde{t} = t\frac{\lambda}{a_0}, \quad \tilde{x} = x\frac{\lambda}{a_0^2}, \quad \tilde{u} = u\frac{\lambda}{a_0^2}$$

При этом уравнение движения (2.1) запишется в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\mathrm{H}(t - x)\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.3}$$

Здесь и всюду далее тильда над безразмерными величинами опущена.

В случае задания динамических граничных условий на конце $x = 0$ трубы

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = -f(t)\cdot \mathrm{H}(t), \quad t \geq 0, \quad f(t) \geq 0 \tag{2.4}$$

при нулевых начальных условиях (2), решение для деформации $\varepsilon(t,x) = \partial u(t,x)/\partial x$, построенное методом преобразований Лапласа, имеет следующий вид [13]:

$$\varepsilon(t,x) = -\mathrm{e}^{-x}\left\{f(t - x) - x\int\limits_x^t \frac{J_1(\sqrt{\tau^2 - x^2})}{\sqrt{\tau^2 - x^2}} f(t - \tau)\,d\tau\right\}\mathrm{H}(t - x) \tag{2.5}$$

и справедливо лишь в примыкающей к переднему фронту $t = x$ области фазовой плоскости (t,x), в которой скорости сечений

$$\begin{aligned} v(t,x) = \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{H}(t - x)\Bigg\{ & f(t - x) - \int\limits_x^t \frac{J_1(\sqrt{\tau^2 - x^2})}{\sqrt{\tau^2 - x^2}} f(t - \tau)\,\tau d\tau + \\ & + \int\limits_x^t \left(\int\limits_x^\tau J_0(\sqrt{\xi^2 - x^2}) f(\tau - \xi)\,d\xi\right) d\tau + \\ & + \int\limits_x^t \left(-f(\tau - x) + x\int\limits_x^\tau \frac{J_1(\sqrt{\xi^2 - x^2})}{\sqrt{\xi^2 - x^2}} f(\tau - \xi)\,d\xi\right) d\tau \Bigg\} \end{aligned} \tag{2.6}$$

положительны. Границей этой области (в общем случае, частью ее границы) является ближайшая к фронту волны кривая $t = \varphi(x)$, вдоль которой скорость $v = \partial u/\partial t$ обращается в ноль (здесь и далее J_n – функция Бесселя n-го порядка 1-го рода). Для каждого конкретного вида нагрузки $f(t)$, линия $t = \varphi(x)$ – фронт остановки сечений (задний фронт упругой волны) определяется численно с использованием метода Ньютона для решения неявного параметрического уравнения $v(\varphi(x), x) = 0$.

3. Динамическое воздействие на торец стержня убывающей во времени нагрузкой. При задании экспоненциально падающей концевой нагрузки

$$f(t) = A\exp(-ct), \quad t \geq 0, \quad A, c = \mathrm{const} \geq 0 \tag{3.1}$$

[1] *Филиппов А.Н.* Одномерные упругие волны в стержне и пластинке с учетом нелинейного взаимодействия с окружающей средой. Дисс. ... канд-та физ.-мат. наук. М., 1985. 120 с.

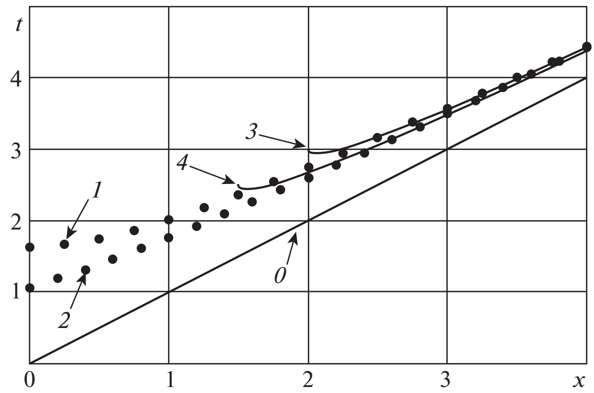

Рис. 1

хорошо описывающей изменение давления на конце трубчатого стержня при детонации накладного заряда ВВ, фронт остановки $t = \varphi(x)$ находится из следующего неявного уравнения:

$$\begin{aligned} &\exp(-c(\varphi(x) - x)) + cJ_0(\sqrt{\varphi^2(x) - x^2}) - \\ &- c^2 \int_x^{\varphi(x)} J_0(\sqrt{\tau^2 - x^2}) \exp(-c(\varphi(x) - \tau))\, d\tau + \\ &+ \int_x^{\varphi(x)} \left\{ J_0(\sqrt{\tau^2 - x^2}) + x \frac{J_1(\sqrt{\tau^2 - x^2})}{\sqrt{\tau^2 - x^2}} \right\} (1 - \exp(-c(\varphi(x) - \tau)))\, d\tau = 1 \end{aligned} \quad (3.2)$$

На рис. 1 представлены расчеты фронта остановки $t = \varphi(x)$ для значений c равных 0 (точки *1*, соответствующие ступенчатой нагрузке $f(t) = A\,\mathrm{H}(t)$) и 0.5 (точки *2*). Прямая *0* определяет передний фронт волны $t = x$. Увеличение параметра c (более быстрое падение во времени концевой нагрузки) приводит к более раннему прохождению фронтом остановки сечений стержня. При больших значениях t и x ($t > x$) имеет место асимптотика:

$$\varphi(x) - x \cong 1 - \sqrt{1 - \frac{4}{x + 2(1 + c^2)}} \quad (3.3)$$

которая для фронтов *1* и *2* показана соответственно кривыми *3* и *4*, и с высокой точностью приближает $t = \varphi(x)$ при $x > 2.5$. Несмотря на то, что скорость заднего фронта $t = \varphi(x)$ упругой волны остается все время больше скорости распространения переднего фронта $t = x$, он не может догнать передний фронт и истощения волны не происходит. Как показывает анализ, после прохождения фронта остановки $t = \varphi(x)$ в стержне устанавливается состояние статического равновесия между силами упругости и трения, определяемое уравнением

$$\frac{d\varepsilon^*}{dx} + 2\kappa(x)\varepsilon^*(x) = 0 \quad (3.4)$$

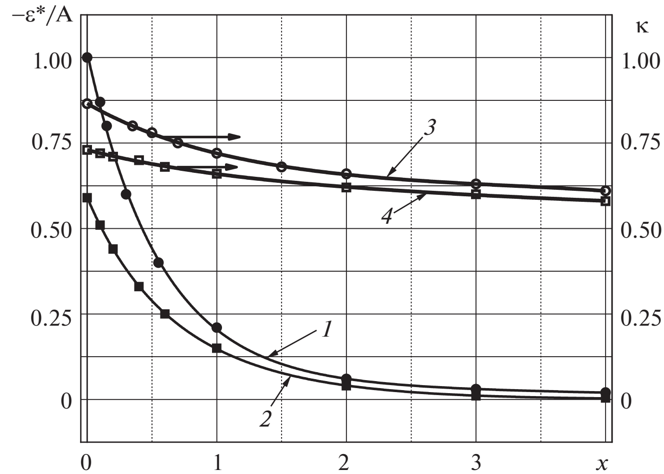

Рис. 2

где обозначено $\varepsilon^*(x) = \varepsilon(\varphi(x), x)$, а $\kappa(x)$ определяет долю от предельной (максимальной силы) трения покоя. Приведенные остаточные распределения деформаций $-\varepsilon^*(x)/A$ и функция $\kappa(x)$ в случае $c = 0$ и $c = 0.5$ показаны на рис. 2 (кривые *1*, *3* и *2*, *4*, соответственно). Гиперболический характер сближения переднего $t = x$ и заднего $t = \varphi(x)$ фронтов (см. формулу (3.3)) выявляет существенное отличие используемой здесь модели от развитой ранее в работах [1–12], где для рассматриваемого типа нагрузки (3.1) передний и задний фронты волны истощаются на конечном расстоянии от торца стержня. Падение остаточных напряжений по длине стержня происходит экспоненциально, а сила трения покоя по мере удаления от торца стремится к половине своего предельного значения и убывает более медленно. Заметим также, что первым останавливается концевое сечение стержня, а дальше фронт установки с ускорением распространяется вглубь.

4. Удар жестким телом по торцу стержня. Изменим граничное условие задачи. Пусть в полубесконечный трубчатый стержень попадает летящее со скоростью $v_0 = \mathrm{const}$ абсолютно жесткое тело массы m. Краевое условие запишется при этом в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,0) = s\frac{\partial u}{\partial x}(t,0), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,0) = B \tag{4.1}$$

где введены безразмерные параметры $s = FE/(m\lambda) = \mathrm{const}$ и $B = v_0/a_0$ (F — площадь поперечного сечения стержня). Решение задачи (2.1), (4.1) при нулевых начальных условиях (2.2) строится операционным методом и для деформации и скорости имеет следующий вид (при $s > 2$):

$$\varepsilon(t,x) = -B\exp(-x)\,\mathrm{H}(t-x)\left\{J_0(\sqrt{t^2-x^2}) - (s-1)\frac{\mathrm{sh}(\omega(t-x))}{\omega} + \right.$$

$$\left. + (s-1)\int_x^t \left((s-1)J_0(\sqrt{\tau^2-x^2}) + x\frac{J_1(\sqrt{\tau^2-x^2})}{\sqrt{\tau^2-x^2}}\right)\times\frac{\mathrm{sh}(\omega(t-\tau))}{\omega}d\tau\right\}$$

$$
\begin{gathered}
v(t,x) = B\frac{\exp(-x)}{s-2}\mathrm{H}(t-x)\left\{\int\limits_x^t \left(1-(s-1)^2\operatorname{ch}(\omega(t-\tau))\right)J_0(\sqrt{\tau^2-x^2})d\tau - \right.\\
\left. -1+(s-1)\operatorname{ch}(\omega(t-x)) + x\int\limits_x^t (1-(s-1)\operatorname{ch}(\omega(t-\tau)))\frac{J_1(\sqrt{\tau^2-x^2})}{\sqrt{\tau^2-x^2}}d\tau\right\}
\end{gathered}
\tag{4.2}
$$

где $\omega = \sqrt{s^2-2s}$. Следует отметить, что в случае $0 < s < 2$, ω является чисто мнимым числом, но формальная подстановка $\omega = i\sqrt{2s-s^2}$ с последующими алгебраическими преобразованиями приводит (4.2) к виду, не содержащему комплексных величин:

$$
\begin{gathered}
\varepsilon(t,x) = -B\exp(-x)\mathrm{H}(t-x)\left\{J_0(\sqrt{t^2-x^2}) - (s-1)\frac{\sin((t-x)\sqrt{2s-s^2})}{\sqrt{2s-s^2}} + \right.\\
\left. + (s-1)\int\limits_x^t \left((s-1)J_0(\sqrt{\tau^2-x^2}) + x\frac{J_1(\sqrt{\tau^2-x^2})}{\sqrt{\tau^2-x^2}}\right)\cdot\frac{\sin((t-\tau)\sqrt{2s-s^2})}{\sqrt{2s-s^2}}d\tau\right\}
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
v(t,x) = B\frac{\exp(-x)}{2-s}\mathrm{H}(t-x)\cdot\\
\cdot\left\{1+\int\limits_x^t ((1-s)^2\cos(\sqrt{2s-s^2}(t-\tau))-1)J_0(\sqrt{\tau^2-x^2})d\tau + \right.\\
+ (1-s)\cos(\sqrt{2s-s^2}(t-x)) - \\
\left. - x\int\limits_x^t ((1-s)\cos(\sqrt{2s-s^2}(t-\tau))+1)\frac{J_1(\sqrt{\tau^2-x^2})}{\sqrt{\tau^2-x^2}}d\tau\right\}
\end{gathered}
\tag{4.3}
$$

Формулы для “переходного” случая $s = 2$ могут быть получены из формул (4.2) или (4.3) с помощью аккуратного предельного перехода:

$$
\begin{gathered}
\varepsilon(t,x) = -B\exp(-x)\mathrm{H}(t-x)\left\{-(t-x) + J_0(\sqrt{t^2-x^2}) + \right.\\
\left. + \int\limits_x^t \left(J_0(\sqrt{\tau^2-x^2}) + x\frac{J_1(\sqrt{\tau^2-x^2})}{\sqrt{\tau^2-x^2}}\right)(t-\tau)d\tau\right\}\\
v(t,x) = B\exp(-x)\mathrm{H}(t-x)\left\{1+(t-x)^2 - \int\limits_x^t J_0(\sqrt{\tau^2-x^2})\cdot\right.\\
\left.\cdot(2+(t-\tau)^2)d\tau - x\int\limits_x^t \frac{J_1(\sqrt{\tau^2-x^2})}{\sqrt{\tau^2-x^2}}(1+(t-\tau)^2)d\tau\right\}
\end{gathered}
$$

В частном случае $s = 1$ выражения для деформации и скорости (4.3) существенно упрощаются:

$$
\begin{gathered}
\varepsilon(t,x) = -B\exp(-x)J_0(\sqrt{t^2-x^2})\mathrm{H}(t-x)\\
v(t,x) = B\exp(-x)\mathrm{H}(t-x)\left\{1-\int\limits_x^t\left(J_0(\sqrt{\tau^2-x^2}) + x\frac{J_1(\sqrt{\tau^2-x^2})}{\sqrt{\tau^2-x^2}}\right)d\tau\right\}
\end{gathered}
\tag{4.4}
$$

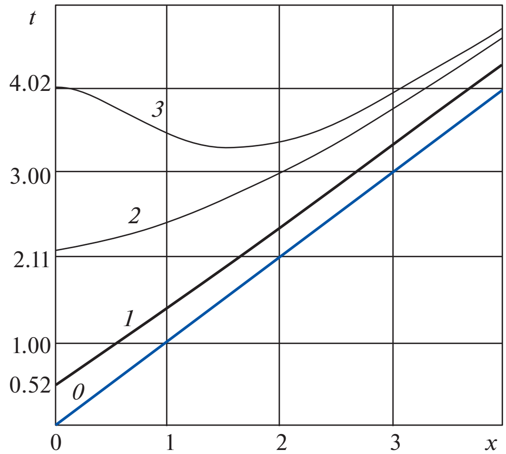

Рис. 3

Из формулы для деформации следует, что фронт смены ее знака представляет собой гиперболу $\sqrt{t^2 - x^2} = \mu_1$, где $\mu_1 = 2.4048$ – первый нуль функции Бесселя J_0. Однако, прежде чем успеет пройти этот фронт, пройдет фронт остановки сечений стержня $t = \varphi(x,1)$ (он располагается между кривыми *1* и *2* на рис. 3), так что деформации останутся сжимающими.

Анализ показывает, что при $s > s_*$ в стержне существует лишь одна область движения, задний фронт $t = \varphi(x,s)$ которой для различных значений s изображен на рис. 3 (кривая *0* – передний фронт $t = x$ упругой волны, кривые *1*, *2*, *3* – задние фронты для значений $s = 3.5$; 0.3 и 0.08, соответственно). Остаточные распределения приведенных деформаций $-\varepsilon^*(x,s)/B$ по области застоя и графики функций $\varkappa(x,s)$, определяемые из уравнения (10), при тех же s представлены на рис. 4 (кривые *1*, *2*, *3* – для $-\varepsilon^*/B$ и *4*, *5*, *6* – для κ). Значение s_* определяется как наименьший параметр, при котором уравнение $d\varphi(x,s)/dx = -1$ имеет хотя бы одно решение: оценка дает $0.05 < s_* < 0.08$. Отметим, что асимптотическое разложение функции $t = \varphi(x,s)$ при больших значениях x имеет вид:

$$\varphi(x,s) \cong x + \frac{2s + x - 2\sqrt{2sx - \omega^2}}{\omega^2 + (s - x/2)^2}.$$

Приведенная выше формула при $x > 5$ для $s > s_*$ с точностью не хуже 2% описывает истинную кривую.

Интересно заметить, что при условии $s_* < s < s_0$ ($s_0 \approx 0.188$) первым останавливается не концевое, а некоторое сечение внутри стержня с последующим распространением области застоя в обе стороны (см., например, кривую *3* на рис. 3); при этом распределение сил трения по длине стержня является немонотонным (кривая *6* на рис. 4). В случае же $0 \le s \le s_*$ в стержне возникнут зоны вторичного движения, решение задачи в которых должно строиться отдельно. Поясним эту ситуацию на примере случая, когда $s = 0$, что соответствует удару по трубчатому стержню бесконечной массой (удар

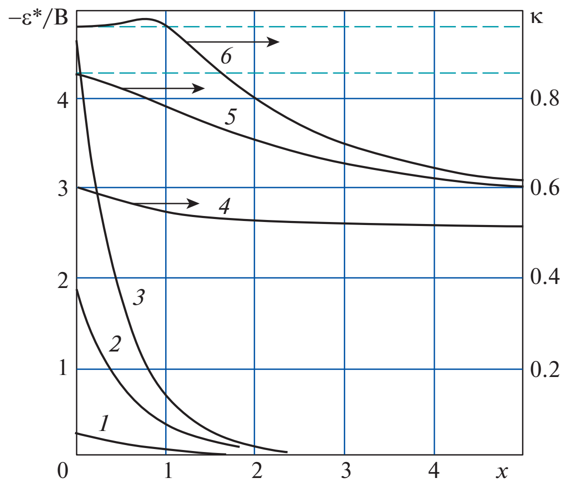

Рис. 4

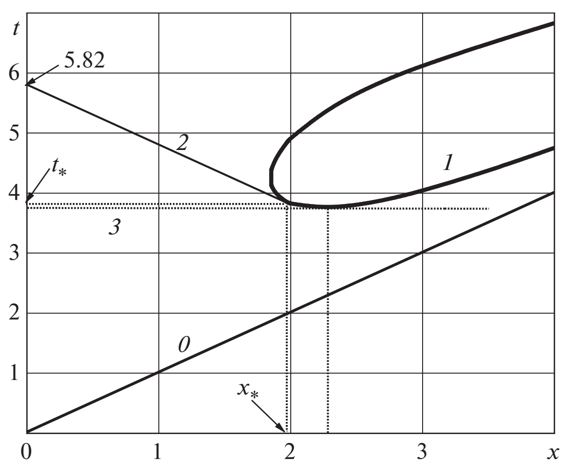

Рис. 5

стержня о неподвижную жесткую преграду). Тогда выражения для деформации и скорости значительно упрощаются:

$$\varepsilon(t,x) = -B\exp(-x)\,\mathrm{H}(t-x)\left\{(t-x) + J_0(\sqrt{t^2-x^2}) + \right.$$

$$\left. + \int_x^t \left(J_0(\sqrt{\tau^2-x^2}) - x\frac{J_1(\sqrt{\tau^2-x^2})}{\sqrt{\tau^2-x^2}} \right)(t-\tau)\,d\tau \right\}$$

$$v(t,x) = B\exp(-x)\left\{1 - x\int_x^t \frac{J_1(\sqrt{\tau^2-x^2})}{\sqrt{\tau^2-x^2}}\,d\tau\right\}\mathrm{H}(t-x) \tag{4.5}$$

Примерная картина волнового движения для этого случая показана на рис. 5. Первым здесь останавливается сечение $x \approx 2.3$, где касательная к фронту остановки $t = \varphi(x, 0)$ горизонтальна (пунктирная прямая *3*). Далее фронт остановки (кривая *1*) распространяется в обе стороны, достигая в сечении $x_* \approx 1.97$ в момент времени $t_* \approx 3.85$ максимальной скорости упругой волны и асимптотически приближаясь к переднему фронту (прямая *0*). При этом решение (4.5) остается справедливым ниже характеристики $t + x = t_* + x_* \approx 5.82$ (прямая *2*) и фронта остановки $t = \varphi(x, 0)$ (кривая *1*). На рис. 5 для наглядности показана вся кривая, на которой скорость (4.5) формально обращается в ноль. При этом верхняя часть этой кривой ($t > 3.85$) должна быть отброшена, как не имеющая физического смысла. В области выше характеристики $t + x = t_* + x_*$ и фронта остановки $t = \varphi(x, 0)$ решение должно строиться с учетом возникновения вторичной упругой волны, бегущей с переменной скоростью по предварительно поджатому стержню. Фронт вторичной волны заранее неизвестен и должен определяться из решения задачи. Этому будет посвящена следующая статья.

5. Заключение. Представлено точное аналитическое решение краевой задачи о распространении упругой волны в трубчатом полубесконечном стержне, взаимодействующем с окружающей средой по закону сухого трения, при действии на его торце экспоненциально убывающей во времени динамической нагрузки, а также в случае удара жестким телом конечной массы по этому торцу. Подробно исследована картина волнового движения в зависимости от параметров нагружения. Определены передний и задний фронты упругой волны, найдено распределение остаточных деформаций после прохождения фронта остановки сечений. Полученные результаты могут быть использованы при расчете деформации нефте- и газопроводов в случае ударных нагружений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00138).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Никитин Л.В.* Распространение волн в упругом стержне при наличии сухого трения // Инж. ж. 1963. Т. 3. Вып. 1. С. 126–130.
2. *Никитин Л.В., Тюреходжаев А.Н.* Поведение под нагрузкой упругого стержня, заглубленного в грунт // Проблемы механики горных пород. Алма-Ата: Наука, 1966. С. 304–311.
3. *Никитин Л.В.* Удар жестким телом по упругому стержню с внешним сухим трением // Инж. ж. МТТ. 1967. № 2. С. 166–170.
4. *Ильюшин А.А., Рашидов Т.Р.* О действии сейсмической волны на подземный трубопровод // Изв. АН УзССР. Сер. техн. наук. 1971. Т. 1. С. 3–11.
5. *Тарханов Г.В.* Распространение волн по упругому полубесконечному стержню при наличии сухого трения // Виброакустическая активность механизмов с зубчатыми передачами. М.: Наука, 1971. С. 184–187.
6. *Никитин Л.В.* Продольные колебания упругих стержней при наличии сухого трения // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 6. С. 137–145.
7. *Тарханов Г.В.* Влияние предварительного смещения на распространение упругой волны по стержню при наличии сухого трения // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 2. С. 173–178.
8. *Веклич Н.А., Малышев Б.М.* Распространение волн в упругих стержнях, находящихся в среде с сухим трением // Задачи механики твердого деформируемого тела. М.: МГУ, 1985. С. 64–99.
9. *Никитин Л.В., Тюреходжаев А.Н.* Демпфирование сухим трением динамических нагрузок в волокнистом композите // Механика композитных материалов. 1986. № 1. С. 28–37.
10. *Никитин Л.В.* Динамика упругих стержней с внешним сухим трением // Успехи механики. 1988. Т. 11. Вып. 4. С. 53–106.

11. *Никитин Л.В., Рашидов А.Т.* Трубопровод под воздействием стационарного конечного импульса в окружающей среде // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела. Алма-Ата: Гылым, 1992. С. 12–18.
12. *Mogilevsky R.I., Ormonbekov T.O., Nikitin L.V.* Dynamics of rods with interfacial dry friction // J. Mech. Behav. Mater. 1993. V. 5. № 1. P. 85–93.
13. *Филиппов А.Н.* Распространение продольных упругих волн в стержне, окруженном средой типа Винклера // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1983. № 1. С. 74–78.
14. *Winkler E.* Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit mit besonderer Rücksicht auf ihre Anwendung in der Technik. Prag: H. Dominicus, 1867. 431 p.
15. *Никитин Л.В.* Статика и динамика твердых тел с внешним сухим трением. М.: Московский лицей, 1998. 261 с.
16. *Захаров В.С.* Модели сейсмотектонических систем с сухим трением // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 4. Геология. 2011. № 1. С. 22–28.
17. *Александрова Н.И.* Численно-аналитическое исследование процесса ударного погружения трубы в грунт с сухим трением. Ч. I: Внешняя среда не деформируема // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископ. 2012. № 5. С. 104–119.
18. *Александрова Н.И.* Численно-аналитическое исследование процесса ударного погружения трубы в грунт с сухим трением. Ч. II. Внешняя среда деформируема // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископ. 2013. № 3. С. 91–106.
19. *Яновская Е.А., Сосенушкин Е.Н., Иванова О.К.* Динамическая модель распространения волн от ударного импульса в составном стержне с учетом трения // Изв. Самарского НЦ РАН. 2016. Т. 18. № 1–2. С. 349–357.