ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2019, № 6, с. 12–19

УДК 539.3

ВОЛНА РАЗГРУЗКИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СЕТИ

© 2019 г. Дж. Г. Агаларов[a], Т. Дж. Гасанова[b], Г. А. Мамедова[a,*]

[a] *Институт математики и механики Национальной академии наук Азербайджана, Баку, Азербайджан*

[b] *Азербайджанский архитектурно-строительный университет, Баку, Азербайджан*

** e-mail: gular-gulshan@rambler.ru*

Поступила в редакцию 02.02.2019 г.
После доработки 16.02.2019 г.
Принята к публикации 28.02.2019 г.

На основе уравнений движения сети в общем случае строятся уравнения движения цилиндрической сети.

Определяются варианты распространения волн в случае основы сети из упругих волокон. Решена задача о распространении волн разгрузки в предварительно натянутой сети. Задача решается методом характеристик. Задача иллюстрируется расчетами.

Ключевые слова: сеть, волна, скорость, деформация, радиус

DOI: 10.1134/S0572329919050027

Введение. В статьях [1–6] были исследованы волны в сетях в прямоугольной декартовой системе координат. Здесь исследуются волны в цилиндрической системе координат. Очевидно при растяжении цилиндрическая сеть будет сужаться; помещенная на жесткую трубу она при движении будет подвергаться действию сил трения между ней и трубой. Во избежание этого сеть помещается на винтовую трубу специального профиля, представляющую винтовой цилиндр с пористым наполнителем (Рудольф). На рис. 1 цифрой *1* – помечена сеть, *2* – пористый наполнитель. Такие трубы применяются, в частности при бурении и промывке скважин. Практически эти явления могут иметь место в гибких трубопроводах.

Цель работы – состоит в исследовании волн в цилиндрических сетях. Учитывая множество вариантов распространения волн в цилиндрических сетях делается попытка решения задачи о непрерывных волнах.

1. Общие уравнения движения сети. Уравнение движения сети в пространстве, построенном на основе теории Рахматуллина Х.А., с учетом реакции поддерживающего тела и геометрические соотношения будут иметь вид, в отличие от [7, 8],

$$\frac{\partial}{\partial s_1}(\sigma_1\bar{\tau}_1) + \frac{\partial}{\partial s_2}(\sigma_2\bar{\tau}_2) = 2\rho\frac{\partial^2\bar{r}}{\partial\tau^2} + p\bar{n}$$

$$(1 + e_1)\,\bar{\tau}_1 = \frac{\partial\bar{r}}{\partial s_1};\quad (1 + e_2)\,\bar{\tau}_2 = \frac{\partial\bar{r}}{\partial s_2} \tag{1.1}$$

Здесь $\bar{r}$ – радиус вектор частицы сети, p – сила реакции опоры;

e_1, e_2 – относительные удлинения соответствующих нитей;

s_1, s_2 – Лагранжевы координаты частиц нитей;

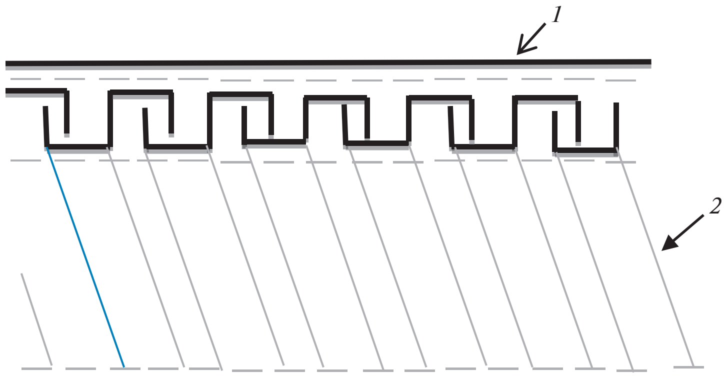

Рис. 1

σ_1, σ_2 – условные напряжения, определяемые как сумма натяжений отдельных нитей одного семейства (пересекающих участок нити другого семейства), отнесение к первоначальной длине рассматриваемого элемента.

(Такое распределение массы и усилий допустимо при достаточно густой сети),

ρ – масса сети, приходящая на единицу площади в начальном состоянии;

$\overline{\tau}_1$, $\overline{\tau}_2$ – единичные векторы, касательные к нитям;

$\overline{n}$ – нормаль к поверхности основания.

2. Координатная система. За базис цилиндрической системы принимаются: единичный вектор $\overline{i}$ – параллельный оси цилиндра, $\overline{j}$ – единичный вектор касательной к поперечному сечению цилиндра, $\overline{k}$ – единичный вектор, перпендикулярный к предыдущим.

Тогда

$$\overline{\tau}_1 = \cos\gamma_1\overline{\iota} + \sin\gamma_1\overline{j}; \quad \overline{\tau}_2 = \cos\gamma_2\overline{\iota} + \sin\gamma_2\overline{j}$$

где $\gamma_{1,2}$ – углы нитей, образованные с осью цилиндра

Производные

$$\frac{\partial\overline{\tau}_1}{\partial s_1} = \cos\gamma_1\frac{\partial\overline{\iota}}{\partial s_1} + \overline{\iota}\frac{\partial(\cos\gamma_1)}{\partial s_1} + \sin\gamma_1\frac{\partial\overline{j}}{\partial s_1} + \overline{j}\frac{\partial(\sin\gamma_1)}{\partial s_1}$$

$$\frac{\partial\overline{\tau}_2}{\partial s_2} = \cos\gamma_2\frac{\partial\overline{\iota}}{\partial s_2} + \overline{\iota}\frac{\partial(\cos\gamma_2)}{\partial s_2} + \sin\gamma_2\frac{\partial\overline{j}}{\partial s_2} + \overline{j}\frac{\partial(\sin\gamma_2)}{\partial s_2}$$

Или учитывая

$$\frac{\partial\overline{\iota}}{\partial s_1} = \frac{\partial\overline{\iota}}{\partial s_2} = 0; \quad \frac{\partial\overline{j}}{\partial s_1} = -\frac{\sin\gamma_1}{r}\overline{\kappa}; \quad \frac{\partial\overline{j}}{\partial s_2} = -\frac{\sin\gamma_2}{r}\overline{\kappa}$$

Получим

$$\frac{\partial\overline{\tau}_1}{\partial s_1} = \frac{\partial(\cos\gamma_1)}{\partial s_1}\overline{\iota} - \frac{(\sin\gamma_1)^2}{r}\overline{\kappa} + \frac{\partial(\sin\gamma_1)}{\partial s_1}\overline{j}$$

$$\frac{\partial\overline{\tau}_2}{\partial\sigma_2} = \frac{\partial(\cos\gamma_2)}{\partial s_2}\overline{\iota} - \frac{(\sin\gamma_2)^2}{r}\overline{\kappa} + \frac{\partial(\sin\gamma_2)}{\partial s_2}\overline{j} \qquad (2.1)$$

Также учитывая $\vec{r} = x\vec{\imath} + r\vec{\kappa}$, имеем

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t}\vec{\imath} + r\frac{\partial \vec{\kappa}}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t}\vec{\imath} + r\omega\vec{j}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\bar{\imath} + r\frac{\partial \omega}{\partial t}\bar{j} + r\omega\frac{\partial \bar{j}}{\partial t} \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\bar{\imath} + r\varepsilon\vec{j} + r\omega^2\vec{\kappa} \tag{2.2}$$

x – координата вдоль оси цилиндра, ω – угловая скорость, ε^* – угловое ускорение.

3. Уравнения движения цилиндрической сети. Подставив (2.1) и (2.2) в (1.1) получим

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial s_1}(\sigma_1 \cos\gamma_1) + \frac{\partial}{\partial s_2}(\sigma_2 \cos\gamma_2) = 2\rho\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \\
\frac{\partial}{\partial s_1}(\sigma_1 \sin\gamma_1) + \frac{\partial}{\partial s_2}(\sigma_2 \sin\gamma_2) = r\varepsilon^* \\
-\frac{\sigma_2}{r}\sin^2\gamma_2 - \frac{\sigma_2}{r}\sin^2\gamma_2 = p + 2\rho r\omega^2
\end{gathered} \tag{3.1}$$

Далее рассматривается симметричное расположение правых и левых волокон. Тогда уравнения (3.1), учитывая

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma, \quad \gamma_1 = -\gamma_2 = \gamma, \quad \omega = 0, \quad \varepsilon = 0$$

примут вид

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial s}(\sigma\cos\gamma) = \rho\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \\
-2\sigma\sin\gamma = p
\end{gathered} \tag{3.2}$$

4. Геометрические соотношения. Определим производную радиуса-вектора $\vec{r}$ по s. Обозначив $\vec{r} = x\vec{i} + r\vec{k}$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial s}\bar{\imath} + \frac{\partial \kappa}{\partial s}r = \frac{\partial x}{\partial s}\bar{\imath} + \frac{\partial y}{\partial s}\bar{j}$$

y – круговая координата, где согласно (1.1) и (2.1)

$$(1+e_1)\cos\gamma_1\vec{\imath} + (1+e_1)\sin\gamma_1\vec{j} = \frac{\partial r}{\partial s_1}$$

$$(1+e_2)\cos\gamma_2\vec{\imath} + (1+e_2)\sin\gamma_2\vec{j} = \frac{\partial r}{\partial s_2}$$

$$(1+e)\cos\gamma = \frac{\partial x}{\partial s} \tag{4.1}$$

$$(1+e)\sin\gamma = \frac{\partial y}{\partial s} \tag{4.2}$$

Поскольку сеть не вращается, то $y = \text{const}$ (по времени)

$$\frac{\partial((1+e)\sin\gamma)}{\partial t} = 0$$

или

$$(1+e_0)\sin\gamma_0 = (1+e)\sin\gamma \tag{4.3}$$

где e_0 и γ_0 значения параметров в начальном состоянии.

Полагая материал сети линейно упругим, т.е. $\sigma = \mathrm{E}\cdot\varepsilon$, систему (3.2), (4.1) и (4.3) можно свести к одному квазилинейному уравнению второго порядка.

То есть из (3.2) следует

$$\mathrm{E}\cdot\frac{\partial e}{\partial s}\cos\gamma + \mathrm{E}\cdot e\cdot\frac{\partial}{\partial s}\cos\gamma = \rho\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \tag{4.4}$$

или учитывая

$$\frac{\mathrm{E}}{1+e}\cdot\frac{\partial e}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial s}+\mathrm{E}\cdot e\cdot\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{1+e}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}\right)=\rho\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \tag{4.5}$$

Или

$$\frac{\mathrm{E}}{1+e}\cdot\left(1-\frac{e}{1+e}\right)\cdot\frac{\partial e}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\mathrm{E}\cdot e}{1+e}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}=\rho\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \tag{4.6}$$

Из (4.3) и (4.1)

$$(1+e)^2=\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2+(1+e_0)^2\sin^2\gamma_0 \tag{4.7}$$

откуда

$$\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2=(1+e)^2-(1+e_0)^2\sin^2\gamma_0 \tag{4.8}$$

или

$$(1+e)\frac{\partial e}{\partial s}=\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \tag{4.9}$$

Подставив (4.9) в (4.6), получим

$$\frac{\mathrm{E}}{1+e}\cdot\left(1-\frac{e}{1+e}\right)\cdot\frac{1}{1+e}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}+\frac{\mathrm{E}\cdot e}{1+e}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}=\rho\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

или

$$\frac{\mathrm{E}}{1+e}\cdot\left[\frac{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2}{(1+e)^2}+e\right]\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}=\rho\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

или

$$\frac{{a_0}^2}{1+e}\cdot\left[\frac{\left(\frac{\partial x}{\partial \sigma}\right)^2}{(1+e)^2}+e\right]\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}=\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \tag{4.10}$$

Подставив (4.8) $\partial x/\partial s$ в (4.10), получим

$$a_0^2\cdot\left[1-\frac{(1+e_0)^2\sin^2\gamma_0}{(1+e)^3}\right]\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \tag{4.11}$$

Подставив (4.7) в (4.11), получим

$$a_0^2\cdot\left[1-\frac{(1-e_0)^2\sin^2\gamma_0}{\left(\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2+(1+e_0)^2\sin^2\gamma_0}\right)^3}\right]\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \tag{4.12}$$

Последнее уравнение представляет собой квазилинейное уравнение в частных производных.

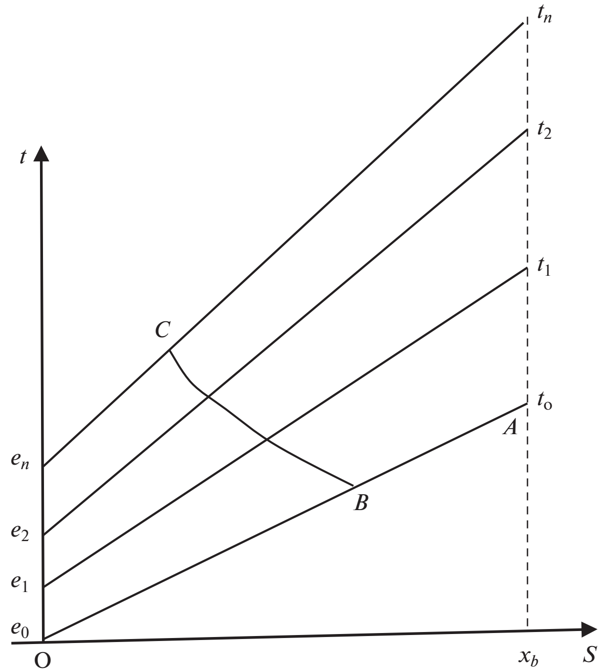

Рис. 2

Коэффициент при $\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}$ в (4.11) с ростом $\frac{\partial x}{\partial s}$ растет, поэтому скорость волн с ростом деформации увеличивается, что ведет к образованию ударных волн [9]. Непрерывные волны будут возникать при разгрузке предварительно растянутого цилиндра. Рассмотрим этот случай (рис. 2). Здесь применяется метод характеристик.

Из точки 0 волна распространяется с максимальной скоростью $a(e_0)$, поскольку волны с меньшей деформацией распространяются с меньшей скоростью и не будут влиять на состояние на фронте.

Пусть цилиндр находится в растянутом состоянии e_0.

На границе цилиндр разгружается, т.е. конец его движется со скоростью ϑ.

Характеристики уравнения (4.9) имеют вид, где

$$ds = adt \tag{4.13}$$

$$ds = -adt \tag{4.14}$$

Условия на характеристиках

$$dx_t = adx_s \quad \left(\frac{\partial x}{\partial s} = x_s,\ \frac{\partial x}{\partial t} = x_t\right) \tag{4.15}$$

и

$$dx_t = -adx_S \tag{4.16}$$

$$a = a_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{(1-e_0)^2 \sin^2\gamma_0}{\left(\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + (1+e_0)^2 \sin^2\gamma_0}\right)^3}}$$

Фронт волны разгрузки движется с скоростью $a(e_0)$. В области SOA (рис. 2) состояние покоя. Из условия на отрицательной характеристике ВС следует $x_t = -\int_{x_s^0}^{x_s} a dx_s$; дифференцируя в направлении положительной характеристики имеем $dx_t = -a dx_s$.

Сравнивая с (4.15) получим $x_t = \text{const}, x_s = \text{const}$ т.е. на положительных характеристиках x_t и x_s постоянны.

Из (4.13) имеем, учитываем постоянство x_s на характеристике

$$x = a(t - t_0) \tag{4.17}$$

На $x = 0$ выбираем t_0 и определяем ε.

Из (4.17)

$$t_0 = t - \frac{x}{a}$$

и соответственно

$$\vartheta = \vartheta_0(t_0) \quad \text{или} \quad \vartheta = \vartheta_0\left(\tau - \frac{x}{a}\right) \tag{4.18}$$

Рассмотрим примеры: $\gamma_0 = \frac{\pi}{4}$ и $\gamma_0 = \frac{\pi}{6}$, $e_0 = 0.1$, $a_0 = 5000$ м/с.

График $a(x_s) = a(\varepsilon)$ $(x_s = \varepsilon)$, $f(\varepsilon)$ показан на рис. 3 и график $e(\varepsilon)$, $m(\varepsilon)$ показан на рис. 4.

Пусть на границе $s = 0$ цилиндр разгружается со скоростью $\vartheta(t)$.

На границе $s = 0$ также имеет место

Из (4.18),

$$\vartheta(t) = -\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} a(x_s) dx_s \tag{4.19}$$

где ϑ – функция верхнего предела интеграла.

Уравнение (4.19) является уравнением для определения осевой деформации сети $x_s = \varepsilon$ (в отличие от деформации волокон e), приближенно представив интеграл (4.12) в виде суммы имеем

$$\vartheta = -\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} a(\eta) d\eta \tag{4.20}$$

$$\vartheta = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} a(\eta) d\eta$$

$$\vartheta_0 = a(\varepsilon_0)\Delta\varepsilon$$

$$\vartheta_1 = (a(\varepsilon_0) + a(\varepsilon_1)) \cdot \Delta\varepsilon$$

$$\vartheta_2 = (a(\varepsilon_0) + a(\varepsilon_1) + a(\varepsilon_2)) \cdot \Delta\varepsilon$$

....

$$\vartheta_n = (a(\varepsilon_0) + a(\varepsilon_1) + \dots + a(\varepsilon_n)) \cdot \Delta\varepsilon$$

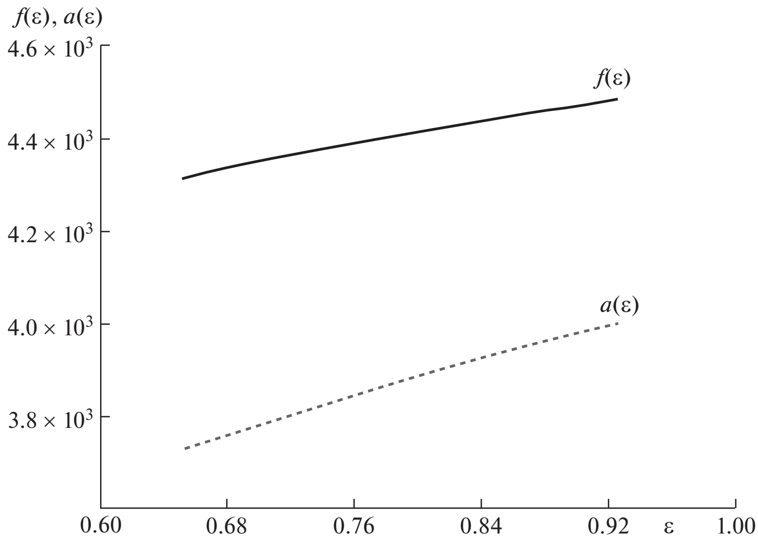

Рис. 3

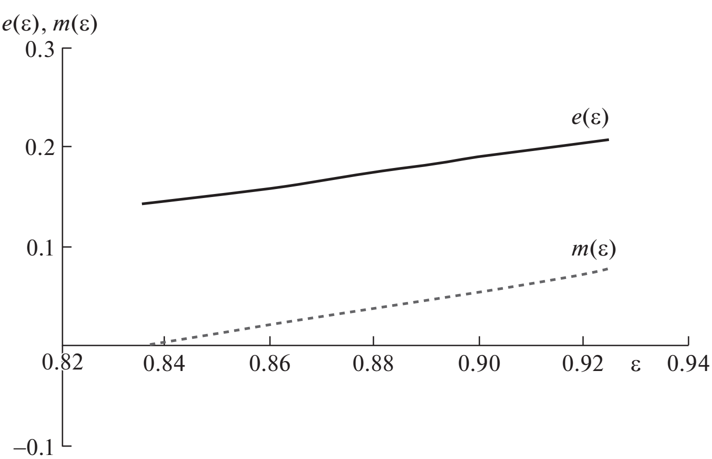

Рис. 4

или

$$\vartheta = f(\varepsilon)$$

т.е. обратную зависимость $\varepsilon \to \vartheta$ на границе. Поскольку положительные характеристики прямолинейны, можно определить ε во всей области движения. Функциональная зависимость скорости движения – скорость волны и деформация для данного примера представлена в табл. 1

$$\vartheta_n = f(\varepsilon_0 - \varepsilon) \tag{4.21}$$

для $\gamma_0 = \pi/4$ для $\gamma_0 = \pi/6$.

Задавая на границе скорость движения конца сети как функцию времени можно определить деформацию как функцию времени на конце сети и выше-

Таблица 1

ε_0	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	ε_6	ε_7	ε_8	ε_9	ε_{10}	ε_{11}
0.925	0.900	0.875	0.85	0.825	0.800	0.775	0.750	0.725	0.700	0.675	0.650
$e(\varepsilon_0)$	$e(\varepsilon_1)$	$e(\varepsilon_2)$	$e(\varepsilon_3)$	$e(\varepsilon_4)$	$e(\varepsilon_5)$	$e(\varepsilon_6)$	$e(\varepsilon_7)$	$e(\varepsilon_8)$	$e(\varepsilon_9)$	$e(\varepsilon_{10})$	$e(\varepsilon_{11})$
0.209	0.190	0.171	0.152	0.134	0.116	0.098	0.081	0.063	0.046	0.030	0.014
ϑ_0	ϑ_1	ϑ_2	ϑ_3	ϑ_4	ϑ_5	ϑ_6	ϑ_7	ϑ_8	ϑ_9	ϑ_{10}	ϑ_{11}
39.98	79.75	119.3	158.63	197.72	236.82	275.67	314.27	352.62	390.70	428.51	466.04
$a(\varepsilon_0)$	$a(\varepsilon_1)$	$a(\varepsilon_2)$	$a(\varepsilon_3)$	$a(\varepsilon_4)$	$a(\varepsilon_5)$	$a(\varepsilon_6)$	$a(\varepsilon_7)$	$a(\varepsilon_8)$	$a(\varepsilon_9)$	$a(\varepsilon_{10})$	$a(\varepsilon_{11})$
3.998×10^3	3.977×10^3	3.955×10^3	3.933×10^3	3.909×10^3	3.885×10^3	3.860×10^3	3.835×10^3	3.808×10^3	3.781×10^3	3.753×10^3	3.724×10^3

Таблица 2

ε_0	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	ε_6	ε_7	ε_8	ε_9	ε_{10}	ε_{11}
0.925	0.92	0.915	0.910	0.905	0.900	0.895	0.890	0.885	0.880	0.875	0.870
$e(\varepsilon_0)$	$e(\varepsilon_1)$	$e(\varepsilon_2)$	$e(\varepsilon_3)$	$e(\varepsilon_4)$	$e(\varepsilon_5)$	$e(\varepsilon_6)$	$e(\varepsilon_7)$	$e(\varepsilon_8)$	$e(\varepsilon_9)$	$e(\varepsilon_{10})$	$e(\varepsilon_{11})$
0.076	0.072	0.068	0.063	0.059	0.055	0.050	0.046	0.042	0.038	0.034	0.029
ϑ_0	ϑ_1	ϑ_2	ϑ_3	ϑ_4	ϑ_5	ϑ_6	ϑ_7	ϑ_8	ϑ_9	ϑ_{10}	ϑ_{11}
44.81	89.59	134.5	179.09	223.8	268.49	313.15	357.79	402.4	446.98	491.54	536.07
$a(\varepsilon_0)$	$a(\varepsilon_1)$	$a(\varepsilon_2)$	$a(\varepsilon_3)$	$a(\varepsilon_4)$	$a(\varepsilon_5)$	$a(\varepsilon_6)$	$a(\varepsilon_7)$	$a(\varepsilon_8)$	$a(\varepsilon_9)$	$a(\varepsilon_{10})$	$a(\varepsilon_{11})$
4.481×10^3	4.478×10^3	4.476×10^3	4.474×10^3	4.471×10^3	4.469×10^3	4.466×10^3	4.464×10^3	4.461×10^3	4.458×10^3	4.456×10^3	4.453×10^3

указанным образом всюду в области SOt. Для примера возьмем $\vartheta = bt$ тогда $t = f(\varepsilon)/b$.

В зависимости от распределения скорости на границе определяется распределение деформации постоянной на характеристиках (рис. 3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Agalarov J.H., Gulieva M.A.* Movement equation of a net in the plane // Изв. АН Азерб., сер. физ.-мат. наук, жур. “Математика и механика”. 1998. Т. XVIII. № 2. С. 103–105.
2. *Seyfullayev A.I., Gulieva M.A.* To the solution of the equilibrium problem of the net // Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics of AS of Azerbaijan. Baku, 2000. V. XIII. P. 144–147.
3. *Агаларов Д.Г., Сейфуллаев А.И., Кулиева М.А.* Численное решение одной плоской задачи равновесия сети // Механика, машиностроение. 2001. № 1. С. 3–4.
4. *Gulieva M.A.* Tension of a rectangular net fastened from two adjacent sides // Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, 2002. V. XVI (XXIV). P. 156–160.
5. *Agalarov J.H., Gulieva M.A.* Waves of strong breaks in nets // Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, 2002. V. XVII (XXV). P. 135–137.
6. *Агаларов Д.Г.* Исследование движения сетей при ударе // Известия Академии Наук Азербайджанской ССР, Серия физико-технических и математических наук. 1982. № 6. С. 38–41.
7. *Рахматулин Х.А.* Об ударе по гибкой нити // ПММ. 1947. Т. 10. № 3. С. 379–382.
8. *Agalarov J.H., Efendiev A.N.* The propagation of nonlinear waves in a structure consisting of net system // Rakenteiden mekaniika seura RY Finish association for structural mechanics, 1988. V. 21. № 2. P. 3–10.
9. *Баренблат Г.И.* О распространении мгновенных возмущений в среде с нелинейной зависимостью напряжений от деформаций // ПММ. 1953. Т. 17. № 4. С. 455–460.