

УДК 539.37

ИЗГИБ И СТЕСНЕННОЕ КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

© 2019 г. В. Л. Присекин^а, Г. И. Расторгуев^{а,*}

^а Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия

* e-mail: rastorguev@adm.nstu.ru

Поступила в редакцию 05.10.2018 г.

После доработки 05.10.2018 г.

Принята к публикации 18.10.2018 г.

Приведен вывод уравнений равновесия изгиба и кручения тонкостенного стержня с произвольным контуром поперечного сечения. Элементы конструкции стержня – пояса лонжеронов и стрингера – обладают жесткостью на растяжение–сжатие, а панели воспринимают только сдвиг. Панели соединяют пояса, что обеспечивает совместное деформирование всех элементов стержня. Перемещения поясов определяет гипотеза плоских сечений. При стесненном кручении перемещения поясов зависят от геометрических параметров и могут не совпадать с плоскостью поперечного сечения. Если на стержень действует только крутящий момент, то внутренние силы в поясах удовлетворяют уравнениям: сумма сил и суммы изгибающих моментов равны нулю. Ранг матрицы уравнений равен трем, поэтому в работе предложено образовать группы с разным числом поясов, и для каждой из них формировать уравнения равновесия стесненного кручения тонкостенного стержня. Это своеобразная форма уравнений равновесия поясов. Рассмотрены примеры кручения стержней.

Ключевые слова: крыло, тонкостенный стержень, гипотеза плоских сечений, гипотеза недеформируемости контура поперечного сечения, депланации, уравнения равновесия, изгиб, стесненное кручение

DOI: 10.1134/S0572329919050155

1. Введение. Исследованию изгиба и кручения тонкостенного стержня с произвольным контуром поперечного сечения посвящено много работ [1–13]. В большинстве этих работ предполагается, что продольные силовые элементы работают на растяжение–сжатие, а обшивка и стенки лонжеронов – на сдвиг. Другой путь упрощения базируется на концепции замены стержня эквивалентным ортотропным стержнем (см., например, [14, 15]).

Наиболее полный учет дискретности подкрепляющего набора основывается на процедуре “склейки” решений для оболочки и набора по участкам [16–20] или с использованием дельта-функции Дирака для записи переменной жесткости тонкостенной подкрепленной конструкции [18, 20–22].

Несмотря на развитие вычислительных методов, в частности, МКЭ применительно к тонкостенным конструкциям [23–25], упрощенный подход при оценке прочности и жесткости авиационных конструкций достаточно широко применяется. В настоящей работе, как и в [1–12], предполагается, что элементы конструкции стержня – пояса лонжеронов и стрингера – обладают жесткостью на растяжение–сжатие, а панели представлены поясами и плоскими полосами жесткими только на сдвиг. Каждая панель или полоса соединяет два пояса, что обеспечивает совместное деформирование всех элементов стержня. Гипотеза плоских сечений определяет перемещения поясов

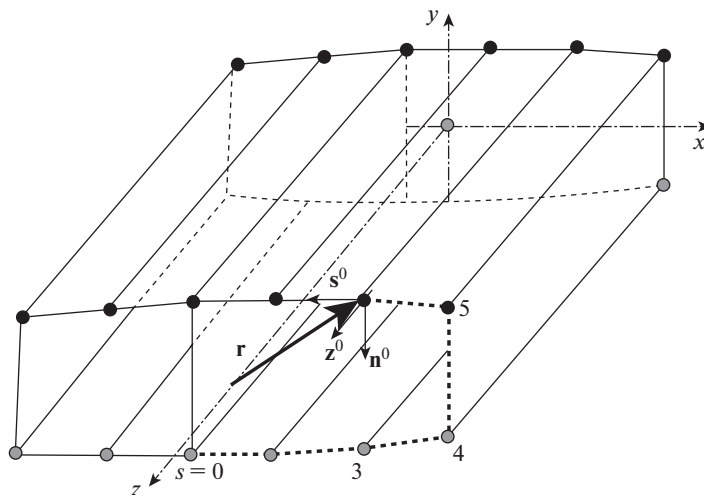


Рис. 1

стержня. При кручении стержня из-за формы контура поперечного сечения возникают внутренние силы в поясах N_j , которые удовлетворяют трем однородным уравнениям равновесия: $\sum N_j = 0$, $\sum N_j y_j = 0$, $-\sum N_j x_j = 0$. Анализ уравнений приводит к выводу: все пояса следует разделить на группы численностью $j = 4, 5, \dots, n$. Тогда перемещения поясов каждой группы выразим вектором-столбцом $\mathbf{\beta}^T(z) = \{\beta_4 \beta_5 \dots \beta_n\}$, где $\beta_j(z)$ – степень свободы поясов группы j из-за стеснения депланаций. В работе на основе принципа возможных перемещений получены дифференциальные уравнения равновесия изгиба и кручения тонкостенного стержня.

2. Постановка задач и основные уравнения. Крыло самолета большого удлинения представляет пример типичной конструкции тонкостенного стержня. Такая конструкция изображена на рис. 1. Поперечное сечение стержня представляет собой многосвязный замкнутый контур, образованный панелями крыла и стенками лонжеронов. Эти части конструкции соединяют пояса лонжеронов, и стрингеров. Для замкнутого контура количество панелей и стенок лонжеронов равно или больше числа поясов.

Примем, что оси x, y, z образуют правую ортогональную систему координат. Плоскости $z = 0$ и $z = l$ определяют границы стержня. Начало осей координат расположено в центре тяжести поперечного сечения, а орты $\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0$ совпадают с осями главных моментов инерции стержня. Форма стержня – это линейчатая поверхность, образующие которой параллельны оси z . Для решения задачи изгиба и кручения стержня с произвольным контуром поперечного сечения примем допущение: панели, стенки лонжеронов представлены системой поясов, работающих на растяжение, и плоских полос, воспринимающих только сдвиг. На рис. 2 показана схема замены панели толщиной h_0 и поперечным размером b_0 на систему k_0 полос шириной b_0/k_0 с двумя поясами на границе площадью $b_0 \cdot h_0/2k_0$ каждая. На границе соединения полос следует сложить площади поясов. Размеры полос по оси z и модуль сдвига материала соответствуют панели. Предложенная расчетная схема конструкции позволяет сформировать уравнения

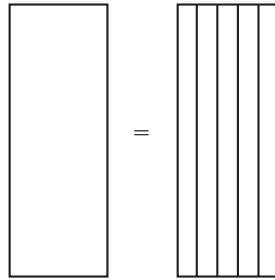


Рис. 2

равновесия тонкостенного стержня, основанные на кинематических гипотезах. Отметим, что дальше полосы будем называть панелями.

В произвольном поперечном сечении положение точек панелей и поясов определено координатами s, z , где z — это расстояние от начала координат до плоскости сечения, а s — длина контура поперечного сечения от начальной точки $s = 0$, при обходе контура в направлении против вращения часовой стрелки. Точку $s = 0$ совмещают с одним из поясов стержня. Введем номера поясов: номер 1 присвоим поясу с координатой $s = 0$. Затем, при обходе контура поперечного сечения стержня в направлении увеличения s , номера поясов представляют ряд натуральных чисел до значения n . На рис. 1 множество s изображено пунктирной линией, начиная с точки $s = 0$, и показана часть номеров поясов. Обозначим через F_i площадь, x_i, y_i — координаты центра тяжести пояса с номером i ($i = 1, 2, \dots, n$). Панелям так же присвоим номера $k = 1, 2, \dots, m$. Следует отметить, что положение поясов определено в главной центральной системе координат x, y, z . Итог преобразований — это формирование таблицы поясов, их площадей, координат, и таблицы панелей, с указанием номеров примыкающих поясов.

Теория стесненного кручения была построена для расчета тонкостенного стержня, имеющего четыре пояса, что привело к понятию бимоента как системы уравновешенных сил. Здесь для расчета произвольного стержня применен принцип возможных перемещений, с помощью которого получены уравнения равновесия произвольного стержня, учитывающие изгиб и кручение конструкции.

Определение перемещений поясов и панелей выполним на основе двух допущений: гипотезы плоских сечений и гипотезы недеформируемости контура поперечного сечения. Пусть $U(z), V(z), W(z)$ — проекции перемещения поперечного сечения по направлению ортов $\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0, \mathbf{z}^0$, а $\theta(z)$ — угол поворота сечения в радианах относительно оси z . Введем координаты точек контура $x = x_0(s), y = y_0(s)$, которые являются дифференцируемыми функциями переменной s . Обозначим символом $v(s, z)$ перемещение по направлению орта \mathbf{z}^0 точек панелей и поясов стержня. Тогда вектор Δ полного перемещения точек стержня, с учетом поворота поперечного сечения на угол $\theta(z)$, в декартовой системе координат имеет вид:

$$\Delta = (U - y_0 \cdot \theta)\mathbf{x}^0 + (V + x_0 \cdot \theta)\mathbf{y}^0 + v(s, z)\mathbf{z}^0 \tag{2.1}$$

Принято допущение $\theta(z) < 0.1$, поэтому $\sin \theta \approx \theta, \cos \theta \approx 1$. Перемещение v образовано двумя компонентами $v(s, z) = w(s, z) + \zeta(s, z)$, где $w(s, z) = W - y_0 dV/dz - x_0 dU/dz$ — перемещение, выраженное гипотезой плоских сечений, перемещение $\zeta(s, z)$ — это отклонение от плоскости (депланации). Отметим, что $w(s, z)$ определяет

только деформацию удлинения, деформация сдвига панелей в соответствии с гипотезой плоских сечений, равна нулю. Для упрощения записи производные функций, зависящих от одной переменной, будем обозначать верхним символом “штрих” $dU/dz = U'$, $dx/ds = x'$, $d^2x/ds^2 = x''$.

Локальную систему координат определим вектором $\mathbf{r} = x_0\mathbf{x}^0 + y_0\mathbf{y}^0$, направленным из начала координат, в сечении z до точки s контура рис. 1. Перемещения и деформации элементов конструкции определим ортами правой системы координат \mathbf{s}^0 , \mathbf{n}^0 , \mathbf{z}^0 :

$$\mathbf{s}^0 = \mathbf{r}' = x'_0\mathbf{x}^0 + y'_0\mathbf{y}^0, \quad \mathbf{n}^0 = -y'_0\mathbf{x}^0 + x'_0\mathbf{y}^0, \quad \mathbf{z}^0 = \mathbf{s}^0 \cdot \mathbf{n}^0 \quad (2.2)$$

Орт \mathbf{s}^0 касается контура поперечного сечения в точке s и направлен против вращения часовой стрелки относительно оси z , как это показано на рис. 1. Орт \mathbf{n}^0 направлен по нормали к панели. Проекция вектора перемещений (2.1) на орты (2.2) определяют перемещения точек панелей в локальной системе координат: $u = \Delta\mathbf{s}^0$, $v = \Delta\mathbf{n}^0$, $\mathbf{u}(s, z) = \Delta\mathbf{z}^0$. Выразим перемещения точек панелей и поясов в поперечном сечении z :

$$u = Ux'_0 + Vy'_0 + \rho\theta, \quad v = -Uy'_0 + Vx'_0 + \kappa\theta, \quad \mathbf{u}(s, z) = w(s, z) + \zeta(s, z) \quad (2.3)$$

Здесь $\rho = x_0y'_0 - x'_0y_0$ — это длина перпендикуляра из начала осей координат до линии касательной к контуру в точке s , $\kappa = x_0x'_0 + y_0y'_0$. Перемещения (2.3) определяют деформации поясов ε_z и сдвига панелей γ :

$$\varepsilon_z = \partial w(s, z)/\partial z + \partial \zeta(s, z)/\partial z, \quad \varepsilon_s = \partial u/\partial s, \quad \gamma = \partial u/\partial z + \partial v(s, z)/\partial s \quad (2.4)$$

Подставляя перемещения (2.1), (2.3) в определение γ (2.4), получим выражение сдвига панели: $\gamma = \rho\theta' + \partial \zeta(s, z)/\partial s$. Относительное удлинение панелей в направлении орта \mathbf{s}^0 равно нулю $\varepsilon_s = 0$, что соответствует гипотезе недеформируемости контура поперечного сечения. Гипотеза плоских сечений определяет напряжения, уравнивающие внешние силы. В зонах ограничения перемещений ζ возникает дополнительное взаимно уравновешенное напряженное состояние.

Деформацию сдвига $\gamma_k(z)$ панели k в сечении z определим как среднее значение γ по координате s (на рис. 3 линия интегрирования показана пунктиром):

$$\gamma_k = b_k^{-1} \int_0^{b_k} (\partial \zeta(s, z)/\partial s + \rho\theta') ds$$

Здесь b_k — размер панели по направлению орта \mathbf{s}^0 . Вычисленный интеграл определяет деформацию сдвига панели:

$$\gamma_k = b_k^{-1} (\zeta_j - \zeta_i + \omega_k\theta') \quad (2.5)$$

Для плоской панели принято обозначение: $\omega_k = \rho_k b_k$. Деформацию сдвига всех панелей выразим вектором-столбцом:

$$\boldsymbol{\gamma}_0 = \mathbf{D}_b^{-1} (\mathbf{S}\boldsymbol{\zeta}_0 + \omega\theta')$$

Здесь введены векторы-столбцы: $\boldsymbol{\zeta}_0^T = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ — депланации поясов $\zeta_i(z)$, $i = 1, 2, \dots, n$; $\boldsymbol{\gamma}_0^T = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)$ — сдвиг панелей γ_i $i = 1, 2, \dots, m$; $\boldsymbol{\omega}^T = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m)$ — площадей ω_i . Определены диагональная матрица \mathbf{D}_b с элементами на главной диагонали b_j , $j = 1, 2, \dots, m$ и матрица \mathbf{S} , размерностью m строк (число панелей) и n столбцов (число поясов). Произведение $\mathbf{S}\boldsymbol{\zeta}_0$ выражает разность перемещения поясов в сечении z , соединяемых панелью. Число панелей, примыкающих к одному поясу, опреде-

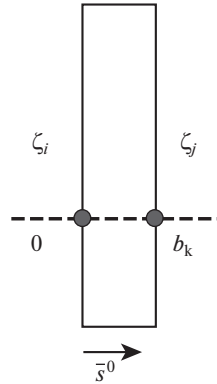


Рис. 3

лено конструкцией стержня. Для каждой панели в строке k указывается номер i первого пояса при обходе контура поперечного сечения по направлению \vec{s}^0 и номер j второго. В эту строку k матрицы \mathbf{S} в столбец i заносится -1 , а для столбца j задается $+1$. Матрица \mathbf{S} введена для формирования уравнений равновесия стержня. Программа расчета деформаций и внутренних сил основана на таблице соединения панелей и поясов. Образец такой таблицы приведен в первом примере (табл. 1).

Дальнейшие вычисления выполнены с учетом принятых допущений. Выразим напряжения в поясах и потоки касательных сил в панелях:

$$\sigma_j = [E/(1 - \nu^2)]\epsilon_j, \quad \sigma_s = \nu\sigma_j, \quad \tau_k = G\gamma_k, \quad q_k = h_k\tau_k$$

Здесь введены: E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона, G – модуль сдвига, q_k – поток касательных сил в сечении панели k , h_k – толщина панели. Напряжение σ_s не учитывают в уравнениях равновесия панелей, так как возможные деформации $\delta\epsilon_s = 0$ и работа этих сил на возможных перемещениях равна нулю [26].

Формулы (2.1) определяют перемещения поясов $w_j(z)$ при условии, что центры тяжести поясов совпадают с контуром поперечного сечения: $x_j = x_0(s_j)$, $y_j = y_0(s_j)$. Перемещения поясов, определяемые гипотезой плоских сечений, имеют вид $w_j = \{1 \ y_j \ x_j\} \mathbf{f}$. Здесь $\mathbf{f}^T = \{W \ -V \ -U\}$ – это вектор-столбец перемещений и углов поворота поперечного сечения.

Таблица 1

k	i	j
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	1

Для вывода уравнений равновесия тонкостенного стержня сформируем матрицы и вектора-столбцы, выражающие свойства поясов и панелей:

$$\Upsilon_0 = \begin{bmatrix} 1 & y_1 & x_1 \\ 1 & y_2 & x_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & y_n & x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_0 = \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_n \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{D}_F = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & F_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_h = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & h_m \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Перемещения поясов, относительные деформации и усилия определены гипотезой плоских сечений:

$$\mathbf{w} = \Upsilon_0 \mathbf{f}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \Upsilon_0 \mathbf{f}, \quad \boldsymbol{\sigma} = [E/(1 - \nu^2)] \Upsilon_0 \mathbf{f}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{D}_E \Upsilon_0 \mathbf{f} \quad (2.7)$$

Здесь приняты обозначения: $\mathbf{D}_E = [E/(1 - \nu^2)] \mathbf{D}_F$, \mathbf{N} – вектор-столбец усилий в поясах. Учет поясов лонжеронов, как правило, приводит к расчёту конструкции стержня из разных материалов, что усложняет вычисления. Для решения упругих задач принципиальных сложностей не возникает. Отметим основное свойство матрицы Υ_0 . Введем вектор-столбец $\mathbf{R}^T = \{R_1, R_2, \dots, R_n\}$ проекций произвольных сил на ось z , тогда произведение $\mathbf{R}^T \Upsilon_0 = \{\sum R_j, \sum R_j y_j, -\sum R_j x_j\}$ определяет равнодействующую всех сил R_j и их моменты относительно осей x, y . Если силы R_j взаимно уравновешены, то для такой группы сил \mathbf{R} имеем тождество:

$$\mathbf{R}^T \Upsilon_0 = \{0 \ 0 \ 0\} \quad (2.8)$$

Тонкостенный стержень имеет n степеней свободы перемещения поясов относительно оси z , что соответствует числу поясов. Три степени свободы представлены функциями $U(z), V(z), W(z)$, которые выражают перемещения всех поясов. Оставшиеся $(n - 3)$ степени свободы перемещений поясов используем для формирования напряженного состояния, не учитываемого гипотезой плоских сечений. Описание стеснения деформации в поперечных сечениях стержня ранее было определено функциями $\xi_0^T(z) = \{\xi_1(z), \xi_2(z), \dots, \xi_n(z)\}$. Однако, из этих n функций лишь $(n - 3)$ могут быть произвольными, так как усилия в поясах должны удовлетворять условиям (2.8). Это вызывает сложности формирования и решения уравнений равновесия. Параметры $\xi_0(z)$ представим в виде произведения произвольных функций $\beta_j(z)$ на группу j перемещений поясов, удовлетворяющих условию (2.8). Число групп равно $(n - 3)$. Для их построения определим матрицу $\lambda_0 = \mathbf{D}_F \Upsilon_0$. Преобразование $\xi_0(z)$ в линейно независимые группы выполним с помощью матрицы λ_1 размерностью $n \cdot (n - 3)$:

$$\lambda_0 = \begin{bmatrix} F_1 & F_1 y_1 & F_1 x_1 \\ F_2 & F_2 y_2 & F_2 x_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ F_n & F_n y_n & F_n x_n \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = \begin{bmatrix} \lambda_{1,4} & \lambda_{1,5} & \lambda_{1,6} & \dots & \lambda_{1,n} \\ \lambda_{2,4} & \lambda_{2,5} & \lambda_{2,6} & \dots & \lambda_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n,4} & \lambda_{n,5} & \lambda_{n,6} & \dots & \lambda_{n,n} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Элементы столбцов матрицы $\lambda_1 = [\mathbf{c}_4, \mathbf{c}_5, \dots, \mathbf{c}_n]$ – это неизвестные величины. Из формулы (2.8) следует, что минимальное число ненулевых сил равно 4. Номера столбцов матрицы λ_1 начинаются с $j = 4$. Поэтому примем условие: число неизвестных элементов в столбце \mathbf{c}_j равно номеру столбца j . Вычислим первые четыре элемента столбца $\lambda_{i,4}$, $i = 1, \dots, n$, а остальным элементам присвоим нулевые значе-

ния. Три уравнения для элементов столбца получим из условия ортогональности столбца \mathbf{c}_4 и матрицы λ_0 :

$$\mathbf{c}_4^T \lambda_0 = \{ 0 \ 0 \ 0 \} \quad (2.10)$$

Имеем три уравнения (2.10) для вычисления четырех неизвестных $\lambda_{i,4}$. Условие нормировки $|\lambda_{i,4}| \leq 1$ элементов столбца \mathbf{c}_4 дополняет эту систему уравнений. В результате задача сводится к решению системы уравнений с четырьмя неизвестными. На этом определение элементов столбца \mathbf{c}_4 матрицы λ_1 завершено. Отметим, что после вычисления элементы строки \mathbf{c}_4^T следует умножить на диагональную матрицу \mathbf{D}_F .

Как и в расчете \mathbf{c}_4 , элементам $\lambda_{i,5}$ пятого столбца с индексом $i \geq 6$ присвоим нулевые значения. Для вычисления первых пяти элементов $\lambda_{i,5}$ столбца \mathbf{c}_5 к трем строкам $\lambda_0^T = (\mathbf{D}_F \Upsilon_0)^T$ добавим строку из вычисленных элементов столбца \mathbf{c}_4 . Выполняя условие ортогональности \mathbf{c}_5 к четырем строкам λ_0^T , сформируем четыре уравнения. Пятое уравнение – это условие нормировки $|\lambda_{i,5}| \leq 1$. После определения элементов \mathbf{c}_5^T умножить на матрицу \mathbf{D}_F . Процесс вычисления матрицы λ_1 завершается определением элементов последнего столбца \mathbf{c}_n .

Матрица λ_1 образована столбцами:

$$\lambda_1 = [\mathbf{c}_4 \ \mathbf{c}_5 \ \dots \ \mathbf{c}_n] \quad (2.11)$$

Условие ортогональности выполняется для каждого столбца, поэтому произведение матриц Υ_0 и λ_1 равно нулю и образует нулевую матрицу размерностью $3 \cdot (n - 3)$:

$$\Upsilon_0^T \lambda_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Отсюда следует, что любой столбец j матрицы λ_1 с произвольным множителем скалярного типа $[E/(1 - \nu^2)] \cdot \beta'_j(z)$ определяет взаимно уравновешенную систему сил, удовлетворяющих тождеству (2.8). Для вывода уравнений равновесия тонкостенного стержня введем матрицу $\Upsilon_1 = \mathbf{D}_F^{-1} \cdot \lambda_1$, элементы которой – безразмерные величины, а Υ_1 представляет аналог матрицы Υ_0 , так как определяет перемещения и удлинения поясов, обусловленные стеснением деформации:

$$\xi_\beta = \Upsilon_1 \beta, \quad \epsilon_0 = \Upsilon_1 \beta' \quad (2.13)$$

Здесь $\beta(z)$ – вектор-столбец, компоненты которого являются функциями z $\beta(z)^T = \{\beta_4(z), \beta_5(z), \dots, \beta_n(z)\}$. В развернутом виде имеем перемещения поясов $\xi_\beta = \sum_{j=4}^n \mathbf{c}_j \beta_j(z)$ и деформацию $\epsilon_0 = \sum_{j=4}^n \mathbf{c}_j \beta'_j(z)$. Выразим напряжения в поясах и усилия, из-за ограничения деформации:

$$\sigma_0 = [E/(1 - \nu^2)] \epsilon_0, \quad \mathbf{N}_0 = \Lambda_1 \beta', \quad \Lambda_1 = \mathbf{D}_E \Upsilon_1 \quad (2.14)$$

Здесь через \mathbf{N}_0 обозначен вектор-столбец усилий в поясах, обусловленных деформацией. Представим матрицу Λ_1 набором столбцов $\Lambda_1 = [E/(1 - \nu^2)] \lambda_1 = [E/(1 - \nu^2)] [\mathbf{c}_4, \mathbf{c}_5, \dots, \mathbf{c}_n]$,

где \mathbf{c}_j определяют согласно (2.11) матрицу λ_1 . Тогда усилия в поясах стержня выразим суммой:

$$\mathbf{N}_0 = [E/(1 - \nu^2)] \sum_{j=4}^n \mathbf{c}_j \beta'_j(z) \quad (2.15)$$

Члены ряда (2.15) $[E/(1 - \nu^2)] \mathbf{c}_j \beta'_j(z)$ сохраняют все установленные выше свойства для произвольного значения z . Например, из формулы (2.12) следует:

$$\{\mathbf{c}_j \beta'_j(z)\}^T \Upsilon_0 = \{0 \ 0 \ 0\}$$

Для сходимости вычислений столбцов матрицы λ_1 необходимо перенумеровать пояса стержня, сохраняя их положение на контуре поперечного сечения. Номер 1 присвоить поясу с наибольшей площадью F_{\max} , расположенному на максимальном удалении от центра осей координат. Затем, при обходе контура в положительном направлении, присвоить номер 2, ближайшему поясу с площадью F_{\max} , а наиболее удаленной группе поясов F_{\max} – номера 3, 4. Этот процесс напоминает сортировку поясов с убыванием площадей и расстояний от центра координат. Процесс замены номеров завершается на последней строке матрицы Υ_0 . Необходимо стремиться к равномерному заполнению контура новыми номерами поясов. Затем обновляются все таблицы и матрицы исходных данных.

Для вывода уравнений равновесия стержня, нагруженного распределенными силами и моментами, приведем формулы деформаций и напряжений в поясах и панелях:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \Upsilon_0 \mathbf{f} + \Upsilon_1 \boldsymbol{\beta}', \quad \boldsymbol{\gamma}_0 = \mathbf{D}_b^{-1} (\mathbf{S} \Upsilon_1 \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\omega} \theta'), \quad \boldsymbol{\sigma} = [E/(1 - \nu^2)] \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\tau} = G \boldsymbol{\gamma}_0 \quad (2.16)$$

Выразим так же силы в поясах и потоки касательных сил в панелях:

$$\mathbf{N}_s = \mathbf{N} + \mathbf{N}_0 = \mathbf{D}_E (\Upsilon_0 \mathbf{f} + \Upsilon_1 \boldsymbol{\beta}'), \quad \mathbf{q} = \mathbf{D}_G \mathbf{D}_b^{-1} (\mathbf{S} \Upsilon_1 \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\omega} \theta') \quad (2.17)$$

Отметим, что усилия в поясах \mathbf{N}_s (2.17) определены гипотезой плоских сечений \mathbf{N} и деформацией \mathbf{N}_0 .

3. Уравнения равновесия тонкостенного стержня. Вывод уравнений равновесия тонкостенного стержня основан на принципе возможных перемещений [26]: если тело находится в состоянии равновесия, то разность работ внутренних сил δB и поверхностных δA на возможных перемещениях равна нулю: $\delta B - \delta A = 0$. В этой формулировке под поверхностными силами подразумеваются распределенные по оси z силы и моменты статически эквивалентные поверхностным силам:

$$\oint_0^l (\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} + \delta \boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\tau}) h ds dz - \int_0^l (p_z \delta W + p_y \delta V + p_x \delta U + \mu_z \delta \theta) dz - \delta \theta M_z \Big|_{z=l} = 0$$

Здесь M_z – внешний крутящий момент на конце стержня $z = l$; p_x, p_y, p_z – распределенные по оси z силы, μ_z – распределенный крутящий момент.

Возможные перемещения $\Upsilon_0 \delta \mathbf{f} + \Upsilon_1 \delta \boldsymbol{\beta}$ и $\delta \theta$ определяют возможные деформации удлинения $\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \Upsilon_0 \delta \mathbf{f} + \Upsilon_1 \delta \boldsymbol{\beta}'$ и сдвига $\delta \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{D}_b^{-1} (\mathbf{S} \Upsilon_1 \delta \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\omega} \delta \theta')$, необходимые для вычисления работ внутренних сил. Преобразуем интегралы по объему поясов и панелей стержня. При вычислении интеграла по панелям контура следует, после перехода границы панели, заменить бесконечно малый элемент интеграла $h ds$ на площадь, прилегающую к панели пояса:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^l \delta \mathbf{f}^T \Upsilon_0^T \mathbf{D}_E \Upsilon_0 \mathbf{f} dz + \int_0^l \delta \boldsymbol{\beta}^T \Upsilon_1^T \mathbf{D}_E \Upsilon_1 \boldsymbol{\beta}' dz + \\
 & + \int_0^l \delta \boldsymbol{\beta}^T \Upsilon_1^T \mathbf{S}^T \mathbf{D}_G \mathbf{D}_b^{-1} (\mathbf{S} \Upsilon_1 \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\omega} \theta') dz + \int_0^l \delta \theta' \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{D}_G \mathbf{D}_b^{-1} (\mathbf{S} \Upsilon_1 \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\omega} \theta') dz - \\
 & - \int_0^l (\delta W p_z + \delta V p_y + \delta U p_x + \delta \theta \mu_z) dz - \delta \theta M_z \Big|_{z=l} = 0
 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Результат преобразования разности работ на возможных перемещениях в соответствии с положениями вариационного исчисления это дифференциальные уравнения равновесия и естественные граничные условия.

Приведем уравнения изгиба тонкостенного стержня:

$$EF_0 W'' + p_z = 0, \quad EJ_x V'''' - p_y = 0, \quad EJ_y U'''' - p_x = 0$$

Возможные варианты граничных условий определены заданием на расчет конструкции:

$$\begin{aligned}
 \delta W (EF_0 W'')|_0 = 0, \quad \delta V' (EJ_x V''')|_0 = 0, \quad \delta V (EJ_x V''')|_0 = 0 \\
 \delta U' (EJ_y U''')|_0 = 0, \quad \delta U (EJ_y U''')|_0 = 0
 \end{aligned}$$

Для рассматриваемой задачи на границе $z = 0$ примем условие заделки стержня: $W = 0$, $V = 0$, $V' = 0$, $U = 0$, $U' = 0$. В сечении $z = l$ выполним условие свободного конца стержня – внешние силы и изгибающие моменты равны нулю: $W' = 0$, $V'' = 0$, $V''' = 0$, $U'' = 0$, $U''' = 0$.

Дифференциальные уравнения равновесия для степеней свободы поясов разрешены относительно старших производных:

$$\mathbf{J}_\beta \boldsymbol{\beta}'' - \mathbf{P} \boldsymbol{\beta} - \mathbf{C}^T \theta' = 0 \quad (3.2)$$

Здесь $\boldsymbol{\beta}$ вектор-столбец функций порядка $n - 3$, $\mathbf{J}_\beta = \Upsilon_1^T \mathbf{D}_E \Upsilon_1$ диагональная матрица порядка $(n - 3)$, однако, из-за ошибок округления при вычислении матрицы Υ_1 , внедиагональные элементы по сравнению с диагональными представляют величины порядка $\approx 10^{-15}$, $\mathbf{C} = \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{D}_G \mathbf{D}_b^{-1} \mathbf{S} \Upsilon_1$ вектор-строка порядка $n - 3$, $\mathbf{P} = \Upsilon_1^T \mathbf{S}^T \mathbf{D}_G \mathbf{D}_b^{-1} \mathbf{S} \Upsilon_1$ матрица порядка $(n - 3) \cdot (n - 3)$, θ' – погонный угол кручения стержня. Преобразуем уравнение равновесия (3.2) к виду: $\Upsilon_1^T (\mathbf{N}'_0 - \mathbf{S}^T \mathbf{q}) = 0$. Это уравнение показывает, что пояса нагружены потоками касательных сил панелей, формируемых матрицей \mathbf{S}^T . Решение системы уравнений (3.2) удовлетворяет граничным условиям:

$$\delta \boldsymbol{\beta}^T (\mathbf{J}_\beta \boldsymbol{\beta}')|_0 = 0 \quad (3.3)$$

Для задачи стесненного кручения стержня примем, что в сечении $z = 0$ степени свободы перемещений равны нулю $\boldsymbol{\beta} = 0$, а в сечении $z = l$ отсутствуют внешние силы, приложенные к поясам: $\boldsymbol{\beta}' = 0$. На стержень в сечении $z = l$ действует сосредоточенный крутящий момент M_z и распределенный крутящий момент μ_z , определяющий изменение потока касательных сил в панелях:

$$\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{q}' + \mu_z = 0$$

Заменим в этом уравнении поток касательных сил \mathbf{q} , согласно формулам (2.17), и получим уравнение кручения стержня:

$$J_\omega \theta'' + \mathbf{C} \boldsymbol{\beta}' + \mu_z = 0 \quad (3.4)$$

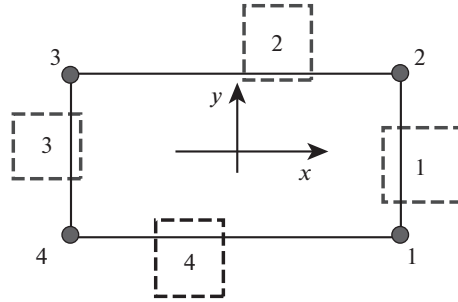


Рис. 4

Здесь $J_\omega = \omega^T \mathbf{D}_G \mathbf{D}_b^{-1} \omega$ – скалярный параметр, $\mathbf{C}\beta'$ – произведение вектора-строки на вектор-столбец. Уравнение (3.4) определяет угол кручения стержня относительно оси z . Для однозначности решения дифференциального уравнения примем граничные условия: в сечении $z = 0$ угол кручения равен нулю $\theta(0) = 0$, а в сечении $z = l$, в соответствии с преобразованием разности работ (3.1), выполняется граничное условие:

$$J_\omega \theta'(l) + \mathbf{C}\beta(l) = M_z \Big|_{z=l} \quad (3.5)$$

Приведем вывод уравнений равновесия стержня, когда распределенный крутящий момент $\mu_z = 0$ и на стержень в сечении $z = l$ действует только сосредоточенный крутящий момент M_z . В этом случае уравнение равновесия (3.4) можно интегрировать и получить решение $J_\omega \theta'(z) + \mathbf{C}\beta(z) = \text{const}$. Согласно граничному условию (3.5) значение $\text{const} = M_z$, поэтому в любой точке z осевой линии стержня выполняется уравнение:

$$J_\omega \theta'(z) + \mathbf{C}\beta(z) = M_z \quad (3.6)$$

Выразим погонный угол кручения:

$$\theta'(z) = (M_z - \mathbf{C}\beta(z))/J_\omega \quad (3.7)$$

Исключая угол θ' из уравнения (3.2) получим систему $n - 3$ дифференциальных уравнений для степеней свободы $\beta(z)$:

$$\mathbf{J}_\beta \beta'' - (\mathbf{P} - \mathbf{C}^T \mathbf{C}/J_\omega) \beta = \mathbf{C}^T M_z / J_\omega \quad (3.8)$$

Решение системы уравнений удовлетворяет граничным условиям (3.3): $\beta(0) = 0$ и $\beta'(l) = 0$. Эти условия определяют функции $\beta(z)^T = \{\beta_4(z), \beta_5(z), \dots, \beta_n(z)\}$, затем по формуле (3.7) вычислим погонный гол $\theta'(z)$, и по формулам (2.17) найдем потоки касательных сил:

$$\mathbf{q} = \mathbf{L}\beta + \mathbf{g}\theta' \quad (3.9)$$

Здесь введены обозначения $\mathbf{L} = \mathbf{D}_G \mathbf{D}_b^{-1} \mathbf{S} \mathbf{Y}_1$, $\mathbf{g} = \mathbf{D}_G \mathbf{D}_b^{-1} \omega$

На основе полученных уравнений изучим частные случаи кручения тонкостенных стержней.

4. Численные результаты и их анализ. Пример 1. Кручение стержня с замкнутым контуром поперечного сечения. Стержень состоит из четырех поясов и четырех панелей. В SI заданы следующие параметры: $E = 0.72 \times 10^{11}$ Па, $G = 0.27 \times 10^{11}$ Па, $\nu = 0.3$, $l = 1$ м, $F_{1-4} = 2 \times 10^{-4}$ м², $b_1 = b_3 = 0.1$ м, $b_2 = b_4 = 0.3$ м, $M_z = 1.2 \times 10^4$ Нм. Поперечное сечение стержня показано на рис. 4 с номерами поясов и панелей. Номера пане-

лей обведены пунктирными квадратами. Последовательность соединения панелей и поясов приведена в табл. 1, которая является основой для формирования матрицы S . Поперечное сечение стержня имеет две оси симметрии. На стержень в сечении $z = l$ действует только внешний крутящий момент M_z .

Матрицы Υ_0 и Υ_1 имеют вид:

$$\Upsilon_0 = \begin{bmatrix} 1 & -0.05 & 0.15 \\ 1 & 0.05 & 0.15 \\ 1 & 0.05 & -0.15 \\ 1 & -0.05 & -0.15 \end{bmatrix}, \quad \Upsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Степень свободы $\beta_4(z)$ представляет перемещения поясов вектора-столбца Υ_1 . Отметим, что параметры J_β , P , C для числа поясов $n = 4$ – скалярные величины. Матрица Υ_1 состоит из одного столбца, у матрицы Υ_0 второй и третий столбцы образованы координатами y_j , x_j поясов стержня.

Уравнение равновесия поясов (3.8) имеет второй порядок относительно степени свободы β_4

$$J_\beta \beta_4'' - (P - C^2 J_\omega^{-1}) \beta_4 = C M_z J_\omega^{-1} \quad (4.2)$$

Решение уравнения (4.2), удовлетворяющее граничным условиям $\beta_4(0) = 0$ и $\beta_4'(l) = 0$, имеет вид:

$$\beta_4(z) = \beta_0 \{1 - \text{ch}(\lambda(l - z))/\text{ch}(\lambda l)\} \quad (4.3)$$

Здесь приняты обозначения: $\lambda = \sqrt{K}$, $K = (P J_\omega - C^T C) [J_\omega J_\beta]^{-1}$. Отметим, что параметр $\beta_0 = (-C^T M_z) [P J_\omega - C^T C]^{-1}$ – это частное решение уравнения (4.2), оно определяет депланацию свободного стержня при кручении моментом. Приведем значения параметров решения (4.3) $\lambda = 6.124$ и $\beta_0 = 3.70 \times 10^{-4}$. Матрица Υ_1 состоит из одного столбца (4.1), поэтому перемещения поясов отличаются лишь знаком. Степень свободы β_4 определяет перемещение поясов $\xi_\beta = \Upsilon_1 \beta_4(z)$. В сечении $z = l$ параметр $\beta_4(l) = 3.69 \times 10^{-4}$, а в заделке равен нулю. Погонный угол кручения θ' имеет в заделке минимальное значение 0.0741, а в сечении $z = l$ достигает величины 0.0987. Для свободного стержня, нагруженного крутящим моментом M_z , погонный угол имеет величину 0.0988, что почти совпадает с полученным решением.

Усилия в поясах образуют взаимно уравновешенные силы, называемые бимоментом, и определяются формулой $N_0 = D_E \Upsilon_1 \beta_0 \lambda \text{sh}(\lambda(l - z))/\text{ch}(\lambda l)$. Модуль сил имеет наибольшее значение в заделке $|N_i| = 3.27 \cdot 10^4 \text{ H}$, $i = 1, \dots, 4$, на свободном конце $z = l$ силы равны нулю $N_0 = 0$.

Формула (3.9) определяет поток касательных сил q . Для изучаемого стержня q – это вектор-столбец четвертого порядка, элементы которого – потоки касательных сил в панелях стержня. На рис. 5 и далее в тексте заменены обозначения потоков касательных сил q_i , $i = 1, \dots, 4$ на $q1, \dots, q4$. На конце стержня в сечении $z = l$ потоки в панелях достигают значений $q1 = 2.004E5$, $q2 = 1.996E5$. Эти величины почти не отличаются от потоков при кручении свободного стержня $q0 = M_z/2\Omega$ Н/м. Однако, в сечении $z = 0$ потоки определены гипотезой недеформируемости контура поперечного сечения. При повороте сечения вблизи плоскости $z = 0$ сдвиги панели 1 пропорциональны $\rho_1 = x_2 = 0.15$, а панели 2 – $\rho_2 = y_2 = 0.05$, как это следует из матрицы Υ_0 (4.1). Поэто-

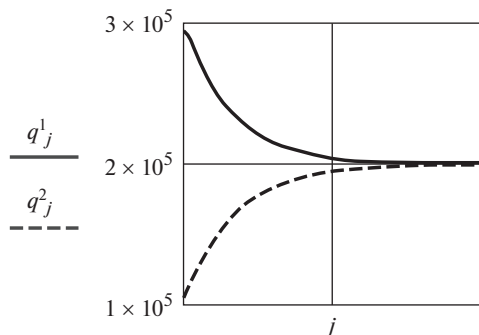


Рис. 5

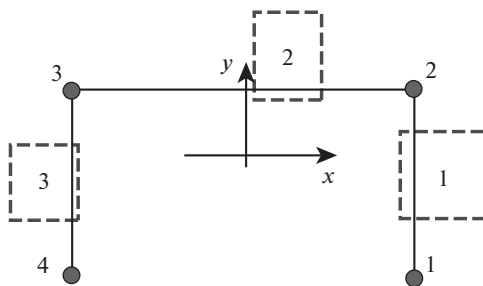


Рис. 6

му отношение потоков $q_1 = 3E5$, $q_2 = 1E5$ равно отношению ρ_1/ρ_2 . Зависимость потоков касательных сил от переменной z изображена на рис. 5.

Пример 2. Стержень с открытым контуром поперечного сечения. Контур стержня показан на рис. 6. Форма сечения – швеллер из четырех поясов и трех панелей. Поперечное сечение имеет одну ось симметрии, центр тяжести расположен вблизи стенки швеллера. Приведем параметры стержня: $l = 1$ м, $F_1 = F_4 = 6 \times 10^{-4}$ м², $F_2 = F_3 = 14 \times 10^{-4}$ м², $b_1 = b_3 = 0.1$ м, $b_2 = 0.3$ м, $h_1 = h_3 = 0.011$ м, $h_2 = 0.0065$ м, $M_z = 1.2 \times 10^4$ Нм. Свойства материала стержня даны в первом примере. Для расчета перемещений поясов следует учесть толщины панелей, сформировать матрицы \mathbf{D}_G , \mathbf{D}_b размерностью $3 \cdot 3$, матрицу \mathbf{S} $3 \cdot 4$ и вектор-столбец ω третьего порядка. Элементы матриц Υ_0 и Υ_1 отличаются от (4.1):

$$\Upsilon_0 = \begin{bmatrix} 1 & -0.07 & 0.15 \\ 1 & 0.03 & 0.15 \\ 1 & 0.03 & -0.15 \\ 1 & -0.07 & -0.15 \end{bmatrix}, \quad \Upsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.429 \\ 0.429 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Степень свободы $\beta_4(z)$ удовлетворяет уравнению (4.2), приведенному в примере 1. Эта функция определяет перемещения и усилия в поясах стержня. Теперь перемещения поясов стержня выражены произведением $\xi_\beta(z) = \Upsilon_1 \beta_4(z)$. Усилия в поясах имеют вид $\mathbf{N}_0(z) = \mathbf{D}_E \Upsilon_1 \beta_0 \cdot \lambda \operatorname{sh}(\lambda(l-z)) / \operatorname{ch}(\lambda l)$. В сечении $z = 0$ усилия $\mathbf{N}_0(0)$ принимают значе-

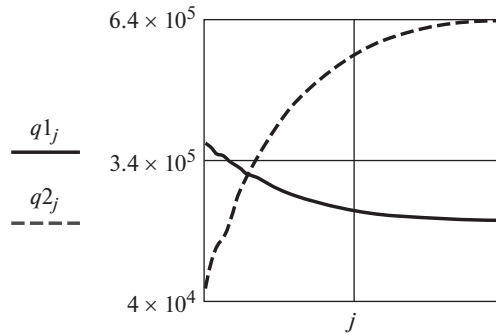


Рис. 7

ния $\pm 1.015 \times 10^5$, а в сечении $z = l - N_0(l) = 0$. Погонный угол кручения в точке $z = 0$ равен $\theta' = 8.67 \times 10^{-3}$, затем этот параметр увеличивается и на конце стержня достигает значения $\theta' = 6.27 \times 10^{-2}$. Полученные оценки свидетельствует о малой жесткости на кручение стержня с открытым контуром поперечного сечения.

Изменение потоков касательных сил q_1, q_1, q_3 в сечениях стержня показано на рис. 7. Отметим, что потоки в полках швеллера $q_1 = q_3$ всегда равны, но закон их изменения существенно отличается от потока q_2 в стенке. Величины потоков приведены в табл. 2. Анализ данных показывает, что в сечении $z = 0$ поток в панели 2 почти на порядок меньше, чем в панелях 1 и 3. В окрестности сечения $z = 0$ деформация сдвига панелей пропорциональна произведению $\rho \cdot \theta'$. Для панелей 1 и 3 первый множитель равен $\rho_1 = x_2 = 0.15$, а для панели 2 равен $\rho_2 = y_2 = 0.03$. Эти координаты из матрицы Υ_0 формул (4.6). Если учесть толщины панелей, то отношение потоков равно $\rho_1 h_1 / \rho_2 h_2 = q_1 / q_2 = 8.46$, что подтверждает полученную оценку потоков касательных сил. С удалением от заделки поток q_2 увеличивается, и в сечении $z = l$ почти в три раза превосходит потоки в полках швеллера. Отметим, что момент потоков касательных сил в любом сечении стержня постоянный и удовлетворяет уравнению $\omega^T \mathbf{q} = M_z$.

5. Заключение. Эта работа вызвана распространенным мнением о том, что не существует уравнений равновесия, описывающих деформацию произвольного тонкостенного стержня в задаче стесненного кручения [27]. По-видимому, в основе этого вывода сформировалось понятие бимоента как единственного представителя взаимно уравновешенного напряженного состояния поясов. Следует так же отметить и незавершенность исследований стесненного кручения тонкостенных стержней. В данной работе получены уравнения равновесия для изучения изгиба и кручения стержней с произвольным контуром поперечного сечения и на их основе получены численные результаты.

Таблица 2

z	q_1	q_2	q_3
0	3.86×10^5	4.57×10^4	3.86×10^5
1	2.10×10^5	6.35×10^5	2.10×10^5

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Уманский А.А. Кручение и изгиб тонкостенных авиаконструкций. М.: Оборонгиз, 1939. 112 с.
2. Ададуров Р.А. Определение касательных напряжений в тонкостенных конструкциях вблизи заделки // М.: Труды ЦАГИ. 1947. Вып. 615. 13 с.
3. Балабух Л.И. Расчет на прочность конических кессонов // М.: Труды ЦАГИ. 1947. Вып. 640. 54 с.
4. Феофанов А.Ф. Расчет тонкостенных конструкций. М.: Оборонгиз, 1958. 330 с.
5. Справочная книга по расчету самолета на прочность / Астахов М.Ф., Караваяев А.В., Макаров С.Я. и др. М.: Гос. изд-во оборонной промышленности. 1954. 701 с.
6. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. М.: Физматгиз, 1959. 574 с.
7. Образцов И.Ф. Методы расчета на прочность кессонных конструкций типа крыла. М.: Оборонгиз, 1960. 312 с.
8. Рабинович И.М. Основы строительной механики стержневых систем. М.: Гос. изд-во литературы по строительству, архитектуре и строит. материалам. 1960. 519 с.
9. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах / Под ред. Биргера И.А. и Пановко Я.Г. М.: Машиностроение, 1968. Т. 1. 831 с.
10. Кузьмин Н.А., Лукаш П.А., Милековский И.Е. Расчет конструкций из тонкостенных конструкций и оболочек. М.: Госстройиздат, 1960. 264 с.
11. Джанелидзе Г.Ю. К теории тонких и тонкостенных стержней // Прикладная математика и механика. 1949. Вып. 6. Т. 13. С. 597–608.
12. Присекин В.Л., Галкина А.П. Расчет крыльев малого удлинения в условиях ползучести // Известия вузов. Авиационная техника. 1970. № 1. С. 76–78.
13. Лещенко А.П. Новые начала строительной механики тонкостенных конструкций. М.: Стройиздат, 1995. 719 с.
14. Жилин П.А. Линейная теория ребристых оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1970. № 4. С. 150–162.
15. Yang B., Zhou J. Analysis of ring-stiffened cylindrical shells // Journal of Applied Mechanics. 1995. V. 62. P. 1005–1014.
16. Общая нелинейная теория упругих оболочек / Черных К.Ф. [и др.]. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2002. 388 с.
17. Волчков Ю.М., Дергилева Л.А. Решение контактных задач на основе уточненной теории пластин и оболочек // ПМТФ. 2008. Т. 49. № 5. С. 169–176.
18. Семенов А.А. Алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных ортотропных оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2014. № 1. С. 49–63.
19. Дудченко А.А. Прочность и проектирование авиационных конструкций из композиционного материала. М.: Изд-во МАИ, 2007. 199 с.
20. Образцов И.Ф., Онанов Г.Г. Строительная механика скошенных тонкостенных систем. М.: Машиностроение, 1973. 660 с.
21. Новицкий В.В. Дельта-функция и ее применение в строительной механике // Расчет пространственных конструкций. 1962. Вып. 8. С. 207–245.
22. Дудченко А.А., Сергеев В.Н. Нелинейные уравнения конической оболочки, подкрепленной дискретным набором шпангоутов // Вестник ПНИПУ. Механика. 2017. № 2. С. 78–98.
23. Martin G.V. Matrix load analysis method for flexible aircraft structures // SAE Techn. Pap. Ser. 1981. N 810610. 12 p.
24. Rajasekaran S. Finite element analysis of thin-walled for open cross sections // Structural Engineering Report / Department of Civil Engineering. University of Alberta. Edmonton. Canada. 1971. № 34. Sept. P. 144–160.
25. Серпик И.Н., Швыряев М.В. Конечно-элементное моделирование работы тонкостенных стержней открытого профиля для расчета пластинчато-стержневых систем // Известия вузов. Авиационная техника. № 1. С. 33–41.
26. Присекин В.Л., Расторгуев Г.И. Основы метода конечных элементов в механике деформируемых тел. Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. техн. ун-та, 2010. 237 с.
27. Ватин Н.И., Рыбаков В.А. Расчет металлоконструкций: седьмая степень свободы // Строй-профиль. 2007. № 2 (56). С. 60–63.