

УДК 531.46

ДИНАМИКА НЕОДНОРОДНОГО ШАРА НА ВИБРИРУЮЩЕМ ОСНОВАНИИ С ДВУХКОМПОНЕНТНЫМ ВЯЗКИМ ТРЕНИЕМ

© 2019 г. А. И. Муницын^{a,*}, М. А. Муницына^b

^a Национальный исследовательский университет “Московский энергетический институт”,
Москва, Россия

^b Московский физико-технический институт (государственный университет), Москва, Россия
* e-mail: munitsyn@rambler.ru

Поступила в редакцию 26.12.2017 г.

После доработки 26.12.2017 г.

Принята к публикации 11.06.2018 г.

Рассматривается задача о вынужденных колебаниях тяжелого неоднородного шара на горизонтальном основании. Предполагается, что основание движется по гармоническому закону в горизонтальном направлении, а в точке контакта между поверхностью тела и основанием действуют сила и момент вязкого трения. Выведены уравнения движения механической системы, решение которых получено методом осреднения. Построены зависимости амплитуд колебаний для частот возбуждения близких к собственной частоте колебаний неоднородного шара на абсолютно гладком основании. Обнаружены как плоские, так и пространственные режимы колебаний.

Ключевые слова: опорная плоскость, вязкое трение, нелинейные колебания, метод осреднения

DOI: 10.1134/S0572329919050131

Исследованию задачи о движении твердого тела на опорной поверхности посвящено достаточно большое число публикаций, подробный обзор которых можно найти в [1]. Качественный анализ динамически симметричного неоднородного шара на неподвижном основании проведен в работе [2]. Полагалось, что центр масс шара лежит на оси динамической симметрии и не совпадает с его геометрическим центром. Та же задача для тела состоящего из двух шаровых сегментов рассматривалась в [3]. Для технических приложений большой интерес представляет исследование динамики тел на вибрирующем основании, связанные с задачами вибротранспортировки [2] и сейсмостойчивости [5–7].

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о движении тяжелого неоднородного динамически симметричного шара радиуса R на вибрирующей в горизонтальном направлении абсолютно жесткой плоскости. Центр масс шара C лежит на оси динамической симметрии на расстоянии c_0 от геометрического центра O . Введем подвижную систему координат $Sx_1x_2x_3$, так что ось Sx_3 проходит через точку O .

Из теорем об изменении количества движения и кинетического момента твердого тела получаем уравнения

$$m\dot{\mathbf{v}} + [\boldsymbol{\omega}, m\mathbf{v}] = -mg\boldsymbol{\gamma} - N + \mathbf{F}^0 \quad (1.1)$$

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}] = [\mathbf{r}, N\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{F}^0] + M^0 \quad (1.2)$$

Здесь m – масса тела, \mathbf{v} и $\boldsymbol{\omega}$ – векторы скорости центра масс и угловой скорости соответственно, g – ускорение свободного падения, N – нормальная составляющая реакции опорной плоскости, $\mathbf{J} = \text{diag}(J_1, J_1, J_3)$ – центральный тензор инерции шара, \mathbf{F}^0 – сила трения скольжения, M^0 – момент трения верчения. Вектор восходящей вертикали $\boldsymbol{\gamma}$ и радиус-вектор точки касания сферической поверхности с опорной плоскостью \mathbf{r} , связаны соотношениями

$$r_1 = -R\gamma_1, \quad r_2 = -R\gamma_2, \quad r_3 = c_0 - R\gamma_3$$

Введем еще один вектор $\boldsymbol{\tau}$, ортогональный вектору $\boldsymbol{\gamma}$, вдоль которого происходит движение опорной плоскости. При рассмотрении более сложных законов движения основания, можно ввести еще один вектор $\mathbf{n} = [\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\tau}]$.

Условия постоянства векторов $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{\tau}$ в системе координат $Cx_1x_2x_3$ имеют вид

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} + [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}] = 0 \quad (1.3)$$

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} + [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\tau}] = 0 \quad (1.4)$$

В случае абсолютно жесткой опорной плоскости уравнение связи имеет вид

$$(\mathbf{u}, \boldsymbol{\gamma}) = 0 \quad (1.5)$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{v} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}] - V_1 \cdot \boldsymbol{\tau} - V_2 \cdot \mathbf{n}$ – скорости точки контакта сферической поверхности тела с опорной плоскостью (скорость проскальзывания), $V_1(t) = Q_1 \cos(\theta_0 t - \varphi_{01})$ – скорость опорной плоскости вдоль вектора $\boldsymbol{\tau}$, $V_2(t) = Q_2 \cos(\theta_0 t - \varphi_{02})$ – скорость опорной плоскости вдоль вектора \mathbf{n} , $Q_1, Q_2, \varphi_{01}, \varphi_{02}$ – амплитуды и фазы скоростей, θ_0 – частота колебаний опорной плоскости.

При заданной модели трения система (1.1)–(1.5) замкнута относительно переменных $\mathbf{v}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\tau}$ и N . В отличие от случая движения тела на неподвижном основании [2], в систему уравнений входит вектор $\boldsymbol{\tau}$, задающий направление движения основания.

Введем безразмерное время $t_* = t\Omega_0$, где $\Omega_0 = (mgc_0/J_1)^{1/2}$ – собственная частота колебаний неоднородного шара на абсолютно гладком основании при отсутствии вращения вокруг оси Cx_3 , а все линейные размеры отнесем к величине c_0 – расстоянию между центром масс и геометрическим центром сферической поверхности. Ограничимся рассмотрением малых амплитуд колебаний шара и будем полагать малыми величинами порядка ε компоненты вектора нормали к опорной плоскости γ_1, γ_2 , вектора направления движения основания τ_3 и все компоненты вектора угловой скорости и скорости центра масс. Безразмерные силу трения и момент трения полагаем величинами порядка ε^2 .

Из уравнения (1.5) можно выразить компоненту скорости центра масс v_3 и с помощью третьего уравнения (1.1) исключить из системы уравнений нормальную реакцию N . Из условия нормировки вектора $\boldsymbol{\gamma}$ выражаем $\gamma_3 = (1 - \varepsilon^2 \gamma_1^2 - \varepsilon^2 \gamma_2^2)^{1/2}$, а из условия ортогональности векторов $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{\tau}$ находим $\tau_3 = -\varepsilon(\gamma_1 \tau_1 + \gamma_2 \tau_2) / \gamma_3$.

В результате преобразований получаем систему девяти уравнений

$$\begin{aligned} \dot{v}_i - \varepsilon f_i + (-1)^i \varepsilon v_{3-i} (\omega_3 + \varepsilon \gamma_{3-i} \omega_{3-i}) + \\ + \varepsilon^2 [\omega_1 \omega_2 \gamma_{3-i} + \gamma_i (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + f_3 - \omega_i^2 - 2\omega_{3-i}^2 + (-1)^i v_i \omega_{3-i})] = 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_i - (-1)^i [\gamma_{3-i} - \varepsilon \delta \beta_1 f_{3-i} + \varepsilon (\beta_2 - 1) \omega_3 \omega_{3-i}] - \\ - (-1)^i \varepsilon^2 \beta_1 [\gamma_{3-i} (\omega_1^2 + \omega_2^2 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2 + \delta f_3) - M \gamma_i] = 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\dot{\omega}_3 - \varepsilon^2 \beta_1 / \beta_2 [M + (1 + \delta)(\gamma_2 f_1 - \gamma_1 f_2)] = 0 \quad (1.8)$$

$$\dot{\gamma}_i - (-1)^i [\omega_{3-i} - \varepsilon \omega_3 \gamma_{3-i} - \varepsilon^2 \omega_{3-i} (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)] = 0 \quad (1.9)$$

$$\dot{\tau}_i - (-1)^i [-\varepsilon \omega_3 \tau_{3-i} - \varepsilon^2 \omega_{3-i} (\gamma_1 \tau_1 + \gamma_2 \tau_2)] = 0 \quad (1.10)$$

В (1.6)–(1.10) $i = 1, 2$, введены следующие безразмерные параметры $\beta_1 = mc_0^2/J_1$, $\beta_2 = J_3/J_1$, $\delta = (R - c_0)/c_0$, безразмерные силы и момент трения $f_i = \varepsilon^2 mc_0 \Omega_0^2 f_i^0$, ($i = 1, 2, 3$), $M = \varepsilon^2 mc_0^2 \Omega_0^2 M^0$, и оставлены слагаемые не выше второго порядка малости.

Полученные уравнения справедливы для любой модели трения. Для модели обобщенного вязкого трения [9] силы трения скольжения и момент трения верчения определяются следующими формулами

$$\mathbf{F}^0 = -k_f^0 \mathbf{u}, \quad M^0 = -k_m^0(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma})$$

В безразмерном виде, с учетом введенных выше допущений и обозначений последние формулы принимают вид

$$\begin{aligned} f_1 &= -k_f [v_1 - \delta \omega_2 + V_2 \tau_2 - V_1 \tau_1 + \varepsilon(1 + \delta) \gamma_2 \omega_3] \\ f_2 &= -k_f [v_2 + \delta \omega_1 + V_1 \tau_2 - V_2 \tau_1 - \varepsilon(1 + \delta) \gamma_1 \omega_3] \\ M &= -k_m [\omega_3 + \varepsilon(\gamma_1 \omega_1 + \gamma_2 \omega_2)], \quad f_3 = 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

В (1.11) оставлены слагаемые первого порядка малости и введены безразмерные коэффициенты трения $k_f = \varepsilon k_f^0 / m \Omega_0$, $k_m = \varepsilon k_m^0 / m \Omega_0 c_0^2$, которые полагаем малыми величинами порядка ε .

Система уравнений (1.6)–(1.10) с учетом принятой модели трения (1.11) образует замкнутую систему. Одно уравнение в данной системе является “лишним”, поскольку должно выполняться очевидное условие $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}) = 1$. Так, например, при численном интегрировании системы уравнений последнее условие можно использовать для контроля точности получаемого решения.

2. Осредненные уравнения. При $\varepsilon = 0$ система (1.6)–(1.10) описывает движение неоднородного шара на абсолютно гладком основании. Порождающее решение имеет вид

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= A_1 \cos(\psi_1), & \gamma_2 &= A_2 \cos(\psi_2) \\ \omega_1 &= A_1 \sin(\psi_1), & \omega_2 &= -A_2 \sin(\psi_2) \\ \tau_1 &= T \cos(\psi_3), & \tau_2 &= -T \sin(\psi_3) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь $\psi_i = t + \phi_i$, $i = 1, 2$, при этом v_1, v_2 и ω_3 – постоянные величины, в исходных уравнениях (1.6) и (1.8) они являются медленными функциями времени, причем скорость изменения ω_3 имеет порядок ε^2 .

В зависимости от значений амплитуд и фаз решение (2.1) соответствует либо плоскому движению тела, либо пространственному. Например, при $A_2 = 0$ и $\psi_3 = 0$ имеем колебания твердого тела в плоскости образованной векторами $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{\tau}$, а при $A_2 = A_1$, $\phi_2 = \phi_1 + \pi/2$ и $\psi_3 = \varepsilon \omega_3 t + \phi_3$ получаем прецессию твердого тела на опорной плоскости.

При решении исходной системы уравнений (1.6)–(1.10) ограничимся рассмотрением главного резонанса. Введем малую частотную расстройку $\varepsilon \lambda = \theta - 1$, так что $\psi_i(t) = (1 + \varepsilon \lambda)t + \phi_i(t)$, $i = 1, 2$, и малую частоту вращения $\varepsilon \mu$, так что $\psi_3(t) = \varepsilon \mu t + \phi_3(t)$. Здесь $\theta = \theta_0/\Omega_0$ – безразмерная частота колебаний основания. Решение будем искать в виде (2.1), полагая амплитуды A_2, A_1, T и фазы колебаний ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 функциями времени. После подстановки в уравнения с учетом принятой модели трения (1.11) получа-

ем систему уравнений в медленных переменных, которую не приводим, ввиду ее громоздкости.

После применения процедуры осреднения получаем следующую систему уравнений для медленных переменных $A_1, A_2, T, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \omega_3, v_1, v_2$

$$\begin{aligned} \dot{A}_i = & \frac{1}{2} \varepsilon (-1)^i [\omega_3 A_{3-i} (\beta_2 - 2) \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon \omega_3 A_{3-i} \beta_1 k_3 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] + \\ & + \frac{1}{2} \varepsilon^2 (-1)^i A_i A_{3-i}^2 \left(\beta_1 - \frac{1}{4} \right) \sin(2\varphi_1 - 2\varphi_2) - \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} - \frac{1}{2} \varepsilon \delta k_f \beta_1 [Q_i T \cos \varphi_3 \sin(\varphi_i - \varphi_{0i}) + (-1)^i Q_{3-i} T \sin \varphi_3 \sin(\varphi_i - \varphi_{0,3-i}) + \delta A_i] \\ \dot{\varphi}_i = -\varepsilon \lambda - \frac{1}{4} \varepsilon^2 \left[A_i^2 \left(\beta_1 + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} A_{3-i}^2 \right] + \\ + \varepsilon \omega_3 \frac{A_{3-i}}{2A_i} (\beta_2 - 2) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - \frac{1}{4} \varepsilon^2 A_{3-i}^2 \left(\beta_1 - \frac{1}{4} \right) \cos(2\varphi_1 - 2\varphi_2) - \\ - \varepsilon^2 \frac{1}{2A_i} (-1)^i [\omega_3 A_{3-i} \beta_1 k_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] - \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$- \varepsilon \delta \beta_1 k_f \frac{T}{2A_i} [Q_i \cos \varphi_3 \cos(\varphi_i - \varphi_{0i}) - (-1)^i Q_{3-i} \sin \varphi_3 \cos(\varphi_i - \varphi_{0,3-i})]$$

$$i = 1, 2$$

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_3 = & \varepsilon^2 k_f (1 + \delta) \frac{\beta_1}{2\beta_2} T [Q_1 (A_1 \sin \varphi_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_{01}) + A_2 \cos \varphi_3 \cos(\varphi_2 - \varphi_{01}))] + \\ & + \varepsilon^2 k_f (1 + \delta) \frac{\beta_1}{2\beta_2} T [Q_2 (A_1 \cos \varphi_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_{02}) - A_2 \sin \varphi_3 \cos(\varphi_2 - \varphi_{02}))] \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$- \varepsilon^2 \frac{\beta_1}{\beta_2} k_m \omega_3 + 2\varepsilon^2 \frac{\beta_1}{\beta_2} A_1 A_2 k_3 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$\dot{\varphi}_3 = \varepsilon \left(-\mu + \omega_3 + \frac{1}{2} \varepsilon A_1 A_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \right) \quad (2.5)$$

$$\dot{T} = 0 \quad (2.6)$$

$$\dot{v}_i = -\varepsilon k_f v_i - \varepsilon (-1)^i v_{3-i} [\omega_3 + 1/2 \varepsilon A_1 A_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)], \quad i = 1, 2 \quad (2.7)$$

Здесь введено обозначение $k_3 = k_f \delta (1 + \delta) - k_m$.

Прежде всего, отметим, что скорость центра масс v_1, v_2 входит только в уравнения (2.7), так что эти две переменные можно исключить из рассмотрения.

Из уравнения (2.6) имеем $T = \text{const}$. Как следует из (2.1), модуль единичного вектора τ определяется как $(T^2 + \varepsilon^2 \tau_3^2)^{1/2}$. Учитывая, что в осредненных уравнениях (2.2)–(2.4) оставлены слагаемые не выше второго порядка малости, полагаем в дальнейшем $T = 1$. Из уравнения (2.5), в случае установившихся колебаний, следует формула для определения частоты

$$\mu = \omega_3 - 1/2 \varepsilon A_1 A_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$

В первом приближении эта частота совпадает с частотой вращения тела вокруг оси Sx_3 . Фаза φ_3 определяется точкой начала отсчета времени и выбором осей Sx_1 и Sx_2 .

Для случая вибрации основания вдоль вектора τ , решение системы уравнений (2.2)–(2.7) достаточно просто получается в предположении, что движение тела проис-

ходит в плоскости возбуждения колебаний. Полагая $Q_2 = \varphi_{01} = A_2 = \omega_3 = v_2 = 0$, $T = 1$ для установившихся колебаний, получаем систему нелинейных уравнений

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \delta k_f \beta_1 [Q_1 \cos \varphi_3 \sin \varphi_1 + \delta A_1] &= 0 \\ -\frac{1}{2} \delta k_f \beta_1 Q_1 \sin \varphi_3 \sin \varphi_2 &= 0 \\ -\lambda - \frac{1}{4} A_1^2 (\beta_1 + 1/4) - \delta \beta_1 k_f \frac{Q_1}{2A_1} \cos \varphi_3 \cos \varphi_1 &= 0 \\ \delta \beta_1 k_f \frac{Q_1}{2A_1} \sin \varphi_3 \cos \varphi_2 &= 0 \\ \frac{\beta_1}{2\beta_2} k_f (1 + \delta) Q_1 A_1 \sin \varphi_3 \cos \varphi_1 &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Кроме того, из (2.5) следует $\mu = 0$, из (2.7) – $v_1 = 0$. Три уравнения в (2.8) обращаются в тождества при $\varphi_3 = 0$, из первого и третьего уравнений получаем фазу и частотную расстройку, как функцию амплитуды колебаний

$$\sin \varphi_1 = -\delta A_1 / Q_1, \quad \lambda = -\frac{1}{4} A_1^2 \left(\beta_1 + \frac{1}{4} \right) \pm \frac{1}{2} \delta \beta_1 k_f (Q_1^2 / A_1^2 - \delta^2)^{1/2} \quad (2.9)$$

Равенство нулю фазы φ_3 означает, что в исходном положении ось Cx_1 подвижной системы координат совпадает с вектором τ . При произвольном положении твердого тела относительно неподвижной системы координат, получаем то же решение (2.9), но под A_1 , φ_1 подразумеваем амплитуду и фазу колебаний проекции восходящей вертикали на ось твердого тела расположенную в плоскости векторов γ и τ и ортогональную оси Cx_3 .

Далее в уравнениях (2.2)–(2.4) полагаем $\varphi_3 = 0$, после чего система несколько упрощается, и получаем систему пяти уравнений относительно A_1 , A_2 , φ_1 , φ_2 , φ_3 .

$$\begin{aligned} \dot{A}_i &= \frac{1}{2} (-1)^i [\omega_3 A_{3-i} (\beta_2 - 2) \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \omega_3 A_{3-i} \beta_1 k_3 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] + \\ &+ \frac{1}{2} (-1)^i A_i A_{3-i}^2 \left(\beta_1 - \frac{1}{4} \right) \sin(2\varphi_1 - 2\varphi_2) - \\ &- \frac{1}{2} \delta k_f \beta_1 [Q_i \cos \varphi_3 \sin(\varphi_i - \varphi_{0i}) + \delta A_i] \\ \dot{\varphi}_i &= -\lambda - \frac{1}{4} \left[A_i^2 \left(\beta_1 + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} A_{3-i}^2 \right] + \\ &+ \omega_3 \frac{A_{3-i}}{2A_i} (\beta_2 - 2) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - \frac{1}{4} A_{3-i}^2 \left(\beta_1 - \frac{1}{4} \right) \cos(2\varphi_1 - 2\varphi_2) - \\ &- \frac{1}{2A_i} (-1)^i \omega_3 A_{3-i} \beta_1 k_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \delta \beta_1 k_f \frac{1}{2A_i} [Q_i \cos \varphi_3 \cos(\varphi_i - \varphi_{0i})] \\ & \quad i = 1, 2 \\ \dot{\omega}_3 &= -\frac{\beta_1}{\beta_2} k_m \omega_3 + 2 \frac{\beta_1}{\beta_2} A_1 A_2 k_3 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \\ &+ k_f (1 + \delta) \frac{\beta_1}{\beta_2} [Q_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_{01}) + Q_2 A_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_{02})] \end{aligned} \quad (2.10)$$

Скорость центра масс может быть получена из (2.7).

В общем случае не удается получить аналитического решения системы (2.10) при нулевой левой части, то есть для случая установившихся колебаний. Численное решение системы нелинейных алгебраических уравнений получено методом продолжения решения по параметру. Ранее этот метод успешно применялся к решению задач меньшей размерности [9, 10], подробное описание метода можно найти в [11].

Пусть для системы уравнений $U_i(\mathbf{r}, \lambda) = 0$ при некотором значении λ^k известно приближенное решение $\mathbf{r}^k = (A_1^k, A_2^k, \varphi_1^k, \varphi_2^k, \varphi_3^k)^\top$, тогда для значения $\lambda^{k+1} = \lambda^k + \Delta\lambda$ приближенное решение представляется в виде $\mathbf{r}^{k+1} = \mathbf{r}^k + \Delta\mathbf{r}$. Подставляя в систему (2.10) и линеаризуя полученные уравнения, определяем приращения неизвестных из системы

$$\mathbf{G}\Delta\mathbf{r} = \mathbf{p}^k + \mathbf{R}^k, \quad \mathbf{p}^k = (0, 0, \lambda^k, \lambda^k, 0)^\top \quad (2.11)$$

где \mathbf{R}^k – вектор невязки на предыдущем шаге решения, элементы матрицы \mathbf{G} имеют вид $g_{ij} = dU_i/dr_j$. Знак действительной части всех собственных значений матрицы \mathbf{G} позволяет сделать вывод об устойчивости решения. Решение системы нелинейных уравнений (2.10) сводится к решению последовательности систем линейных уравнений (2.11). На каждом шаге вычислений контролируется величина невязки, и если относительная погрешность превышает заданную точность, то шаг варьируемой переменной уменьшается. В точках ветвления решений за независимый параметр принимается переменная, с наибольшим по модулю приращением на предыдущем шаге, что позволяет найти все существующие решения.

3. Результаты численного моделирования. В качестве примера рассмотрим шар со следующими безразмерными геометрическими характеристиками $\beta_1 = 4$, $\beta_2 = 1$, $\delta = 0.2$. Безразмерные амплитуды скорости движения основания полагаем $Q_1 = 0.015$, $Q_2 = 10^{-8}$ и фазы $\varphi_{01} = 0$, $\varphi_{02} = \pi/2$.

Здесь вводится дополнительное предположение о наличии малой составляющей скорости основания в направлении \mathbf{n} , поскольку на практике такая составляющая всегда существует. Коэффициент трения скольжения примем $k_f = 0.1$ и рассмотрим влияние коэффициента трения верчения на решение задачи.

При относительно больших значениях $k_m > 0.00041$ движение тела происходит исключительно в плоскости возбуждения колебаний и зависимость амплитуды A_1 от частотной расстройки λ совпадает с (2.9), при этом $A_2 \ll A_1$, $\omega_3 = 0$. При меньших значениях k_m происходит качественное изменение результатов решения.

На рис. 1 приведены зависимости амплитуд колебаний твердого тела A_1 , A_2 (кривые 1 и 2) и угловой скорости вращения ω_3 (кривая 3) от частотной расстройки λ для $k_m = 0.00035$. Устойчивые решения показаны жирной линией, неустойчивые – тонкой. Зависимость амплитуды колебаний в плоскости возбуждения $A_1(\lambda)$ определяется формулой (2.9), но это решение на участке этой кривой между точками В и Д является неустойчивым. Второе решение между точками В и Д соответствует пространственному движению твердого тела. Тело вращается вокруг оси Sx_3 и в то же время точки этой оси движутся по эллипсам, большая ось которых несколько отклонена от вектора вдоль которого движется основание. Такое движение тела можно назвать псевдопрецессией.

Уменьшение коэффициента трения верчения приводит к увеличению диапазона частотной расстройки, в которой происходит псевдопрецессия. При этом происходит еще одно качественное изменение полученных результатов. Те же зависимости амплитуд колебаний твердого тела (кривые 1 и 2) и угловой скорости вращения (кривая 3) от

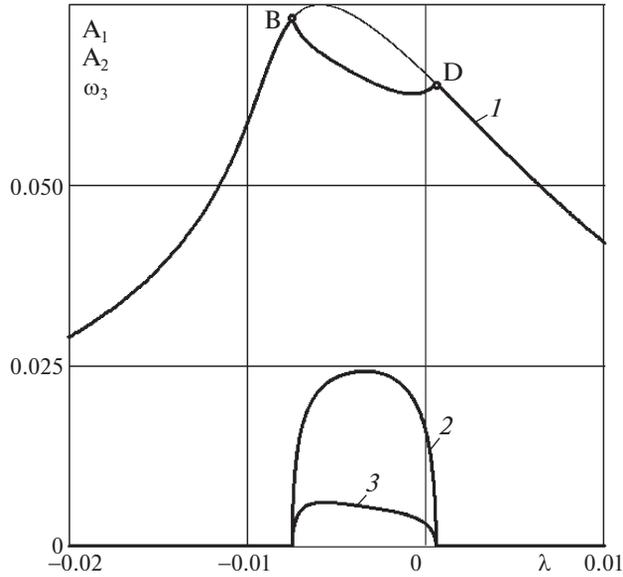


Рис. 1

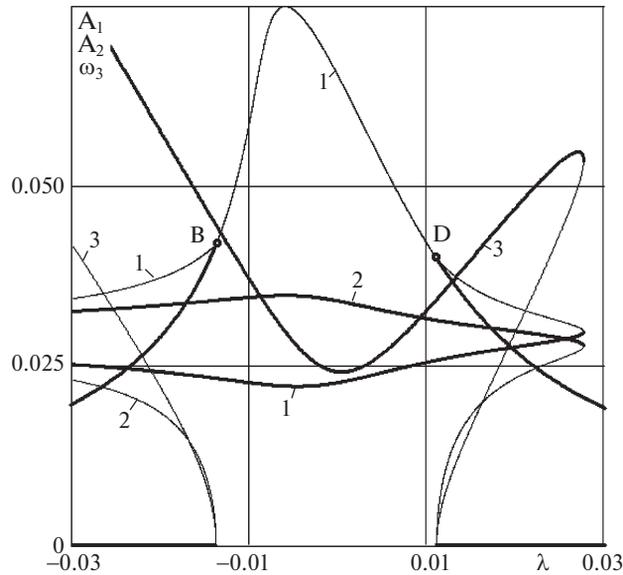


Рис. 2

частотной расстройки для $k_m = 0.00012$ приведены на рис. 2. Кривые, соответствующие устойчивому пространственному движению тела, частично расположены правее точки D, так что в этом диапазоне частотной расстройки возможны как движения твердого тела в плоскости возбуждения колебаний, так и псевдопрецессия тела. При

отсутствии трения верчения ($k_m = 0$) амплитуды колебаний и частота вращения неограниченно возрастают.

Сам факт существования пространственного движения неоднородного шара при вибрации опорной поверхности вдоль прямой не вызывает сомнений и наблюдается в простейшем натурном эксперименте. Количественные результаты требуют уточнения и экспериментальной проверки, в первую очередь из-за того, что коэффициенты трения могут быть заданы только очень приближенно. Неоднозначен и выбор модели трения. Рассмотренная в данной работе модель двухкомпонентного вязкого трения позволила получить относительно простое решение задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (18-01-00335, 19-01-00140) и Программы № 29 Президиума РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Маркеев А.П.* Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”. Институт компьютерных исследований, 2014. 492 с.
2. *Каранетян А.В.* Глобальный качественный анализ динамики китайского волчка (тип-топ) // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 3. С. 33–41.
3. *Зобова А.А., Каранетян А.В.* Анализ стационарных движений волчка тип-топ // ПММ. 2009. Т. 73. Вып. 6. С. 867–877.
4. *Блехман И.И., Джанелидзе Г.Ю.* Вибрационное перемещение. М.: Наука, 1964. 410 с.
5. *Housner J.* The behavior of inverted pendulum structures during earthquakes // *Bullet. Seismologic. Soc. Amer.* 1963. V. 53. № 2. P. 403–417.
6. *Hogan S.G.* The many steady state responses of a rigid block under harmonic forcing. *Earthquake Eng. Struct. Dyn.* 1990. V. 19. P. 1057–1071.
7. *Pena F., Prieto F., Lourenco P.B.* On the dynamics of rocking motions of single rigid-block structures // *Earthquake Engineer. Structur. Dynam.* 2007. V. 36. P. 2383–2399.
8. *Collini L., Garziera R., Riabova K., Tasora A., Munitsyna M.* Oscillation Control of Rocking-Block-Type Building by the Addition of a Turned Pendulum // *Shock and Vibration.* 2016. V. 2016. P. 838–557.
9. *Муницына М.А.* Двухкомпонентная модель вязкого трения // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник докладов. 2015. С. 2668–2670.
10. *Муницын А.И.* Нелинейные колебания нити с натяжным устройством // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 2. С. 24–30.
11. *Муницын А.И.* Нелинейные колебания стержня с близкими значениями осевых моментов инерции поперечного сечения // ПММ. 2009. Т. 73. Вып. 3. С. 427–438.
12. *Гуляев В.И., Баженов В.А., Попов С.Л.* Прикладные задачи теории нелинейных колебаний механических систем. М.: Высш. шк., 1989. 383 с.