

УДК 621.391;629.78

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ АППРОКСИМАЦИИ  
ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ ПАРАМЕТРОВ  
ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЛИНИИ**

© 2019 г. П. А. Кучеренко<sup>a,\*</sup>, С. В. Соколов<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Ростовский государственный университет путей сообщения,  
Ростов-на-Дону, Россия

\* e-mail: pavelpost83@mail.ru

Поступила в редакцию 22.12.2018 г.

После доработки 10.02.2019 г.

Принята к публикации 04.03.2019 г.

Рассматривается решение задачи синтеза аналитической аппроксимации зависимостей долготы от широты на геодезической линии сфероид и ортодромии сферы Земли. Найденные функциональные зависимости позволяют существенно сократить приборный состав измерительно-навигационного комплекса и вычислительные затраты при решении задач навигации.

*Ключевые слова:* ортодромическая траектория, сфероид, аппроксимация функциональной зависимости

DOI: 10.1134/S057232991905009X

**Введение.** Одной из основных проблем в современной теории навигации является сокращение размерности системы дифференциальных уравнений, описывающих динамику навигационного вектора, без потери точности решения задачи навигации. Это обусловлено как существенной нелинейностью навигационных уравнений, так и необходимостью их интегрирования в реальном времени. Радикальным путем решения этой проблемы является использование функциональных зависимостей между навигационными переменными (в частности, между долготой и широтой), существующих при движении объекта по локсодромической или ортодромической траекториям [1, 2]. При этом, если на сфере подобные зависимости известны для обеих видов траекторий, то для сфероида на сегодняшний день аналитическая зависимость существует только для локсодромической траектории [1, 2].

**1. Постановка задачи.** В связи с этим, рассмотрим далее построение функциональной зависимости между долготой и широтой для геодезической линии на сфероиде, что позволит решить в самом общем случае не только проблему уменьшения размерности навигационных уравнений для различных навигационных приложений, но и ряд других задач геодезии, связанных с использованием геодезической линии [3]. Синтез данной зависимости будем рассматривать для геодезической долготы и приведенной широты (однозначно определяющей геодезическую широту [3]), используя следующие обозначения переменных:  $A$  – текущий азимут геодезической линии,  $u$  – приведенная геодезическая широта,  $L$  – геодезическая долгота,  $e$  – второй эксцентриситет ( $e^2 = 0,0067385254$  (эллипсоид Красовского)),  $a$  – большая полуось эллипса,  $ds$  – дифференциал линии на эллипсоиде.

**2. Решение задачи на сфероиде.** Для решения поставленной задачи используем известные уравнения связи навигационных переменных  $A$ ,  $u$ ,  $L$ , справедливые для любых кривых на сфероиде [3]:

$$\frac{dL}{ds} = \frac{\sin A}{a \cos u} \quad (2.1)$$

$$\frac{du}{ds} = \frac{v}{a} \cos A \quad (2.2)$$

и только для геодезической линии [3]:

$$\frac{dA}{ds} = \frac{v}{a} \operatorname{tgu} \sin A \quad (2.3)$$

где

$$v = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}}$$

Предварительно найдем зависимость текущего азимута геодезической линии  $A$  от приведенной широты  $u$ . Используя уравнение Клеро для приведенной широты [3]

$$\cos u \cdot \sin A = \phi$$

где  $\phi = \cos u_*$  или  $\phi = \sin A_*$ ,  $u_*$  – приведенная широта наиболее удаленной от экватора точки геодезической линии,  $A_*$  – азимут геодезической линии в точке пересечения ее с экватором, имеем соотношения

$$\sin A = \frac{\phi}{\cos u} \Rightarrow A = \arcsin \frac{\phi}{\cos u}$$

откуда также вытекают другие соотношения, необходимые для дальнейшего решения задачи:

$$\cos A = \sqrt{1 - \left(\frac{\phi}{\cos u}\right)^2} = \frac{\sqrt{\cos^2 u - \phi^2}}{\cos u} \quad (2.4)$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{\phi}{\sqrt{\cos^2 u - \phi^2}} \quad (2.5)$$

Данные соотношения могут быть получены и другим путем – делением уравнения (2.3) на (2.2) с последующим интегрированием полученного дифференциального уравнения:

$$\frac{dA}{du} = \operatorname{tg} A \operatorname{tgu} \Rightarrow \int_{A_0}^A \operatorname{ctg} A dA = \int_{u_0}^u \operatorname{tgu} du \Rightarrow \ln \frac{\sin A}{\sin A_0} = \ln \frac{\cos u_0}{\cos u}$$

где  $u_0$  – приведенная широта начальной точки геодезической линии,  $A_0$  – азимут геодезической линии в начальной точке, откуда имеем

$$\sin A = \frac{\sin A_0 \cos u_0}{\cos u} = \frac{\phi}{\cos u}$$

где постоянная Клеро уже приобретает новое выражение:

$$\sin A_0 \cdot \cos u_0 = \phi$$

Здесь необходимо отметить, что данное выражение постоянной Клеро (в отличие от приведенных выше традиционных выражений) позволяет решить задачу определения азимута  $A_1$  конечной точки с приведенной широтой  $u_1$  геодезической линии ко-

нечной длины без традиционного знания долготы конечной точки и длины геодезической линии (зная только параметры начальной точки  $A_0, u_0$ ):

$$A_1 = \arcsin \frac{\sin A_0 \cos u_0}{\cos u_1}$$

Для дальнейшего решения задачи разделим уравнение (2.1) на уравнение (2.2):

$$\frac{dL}{du} = \frac{\operatorname{tg} A}{v \cos u}$$

откуда с учетом (2.5):

$$\frac{dL}{du} = \frac{\operatorname{tg} A}{v \cos u} = \frac{\phi \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}}{\cos u \sqrt{\cos^2 u - \phi^2}} \quad (2.6)$$

Уравнение (2.6), определяющее точную дифференциальную функциональную зависимость геодезической долготы от приведенной широты для геодезической линии, наиболее целесообразно использовать в дискретных системах ориентации и навигации – тогда текущее значение долготы определяется в явном виде текущим значением приведенной широты и значениями долготы и приведенной широты, полученными на предыдущем  $(k - 1)$ -м шаге:

$$L_k = L_{k-1} + \frac{\phi \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u_k}}{\cos u_k \sqrt{\cos^2 u_k - \phi^2}} (u_k - u_{k-1})$$

Для непрерывных систем зависимость геодезической долготы от приведенной широты является уже интегральной:

$$L(u) = L_0 + \int_{u_0}^u \frac{\phi \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u_k}}{\cos u_k \sqrt{\cos^2 u_k - \phi^2}} du \quad (2.7)$$

Графическое ее изображение, дающее представление об общем характере функции  $L(u)$ , приведено на рис. 1 (для значений исходных параметров  $L_0 = 0.3$ ,  $u_0 = 0.01$ ,  $A_0 = 0.3$ ).

Так как непосредственное вычисление интеграла (2.7) не представляется возможным, рассмотрим возможность упрощения его подынтегрального выражения:

$$\begin{aligned} \frac{\phi \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}}{\cos u \sqrt{\cos^2 u - \phi^2}} &= \frac{e\phi \sqrt{\frac{e^{-2} - \cos^2 u}{\cos^2 u - \phi^2}}}{\cos u} = \frac{e\phi \sqrt{-1 + \frac{e^{-2} - \phi^2}{\cos^2 u - \phi^2}}}{\cos u} \approx \\ &\approx \frac{e\phi \sqrt{\frac{e^{-2} - \phi^2}{\cos^2 u - \phi^2}}}{\cos u} = \frac{e\phi \sqrt{e^{-2} - \phi^2}}{\cos u \sqrt{\cos^2 u - \phi^2}} \end{aligned}$$

где пренебрежено 1 по сравнению со слагаемым

$$\frac{e^{-2} - \phi^2}{\cos^2 u - \phi^2}$$

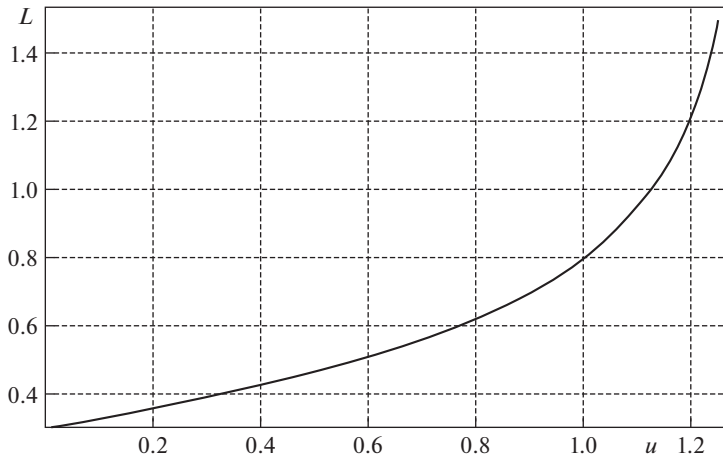


Рис. 1

в силу превосходства последнего более, чем на 2–3 порядка. Тогда, интегрируя обе части упрощенного уравнения (2.6), имеем [4]:

$$\begin{aligned}
 L'(u) &= L_0 + \int_{u_0}^u \frac{e\phi\sqrt{e^{-2} - \phi^2}}{\cos u \sqrt{\cos^2 u - \phi^2}} du = \\
 &= L_0 + \frac{e\phi\sqrt{e^{-2} - \phi^2}}{\sqrt{1 - \phi^2}} \int_{u_0}^u \frac{du}{\cos u \sqrt{1 - \frac{1}{1 - \phi^2} \sin^2 u}} = \\
 &= L_0 + e\phi\sqrt{k^2(e^{-2} - \phi^2)} \int_{u_0}^u \frac{du}{\cos u \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} = \\
 &= L_0 - \frac{1}{2k^*} \ln \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} - k^* \sin u}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} + k^* \sin u} \Big|_{u_0}^u \cdot e\phi\sqrt{k^2(e^{-2} - \phi^2)}, \\
 k^2 &= \frac{1}{1 - \phi^2}, \quad k^* = \sqrt{1 - k^2}
 \end{aligned}$$

где через  $L'$  обозначена искомая аппроксимация функции долготы  $L$ .

Так как параметр  $k^* = \sqrt{1 - k^2}$  является комплексным, то представляя его в виде  $k^* = i\nu$ ,  $\nu = \sqrt{k^2 - 1}$ , преобразуем логарифм в правой части полученного выражения следующим образом [4]:

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2k^*} \ln \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} - k^* \sin u}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} + k^* \sin u} &= \frac{1}{2i\nu} \ln \frac{1 + i \frac{\nu \sin u}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}}}{1 - i \frac{\nu \sin u}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}}} = \\
 &= \frac{1}{\nu} \operatorname{arctg} \frac{\nu \sin u}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} = \frac{\sqrt{1 - \phi^2}}{\phi} \operatorname{arctg} \frac{k\phi \sin u}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}}
 \end{aligned}$$

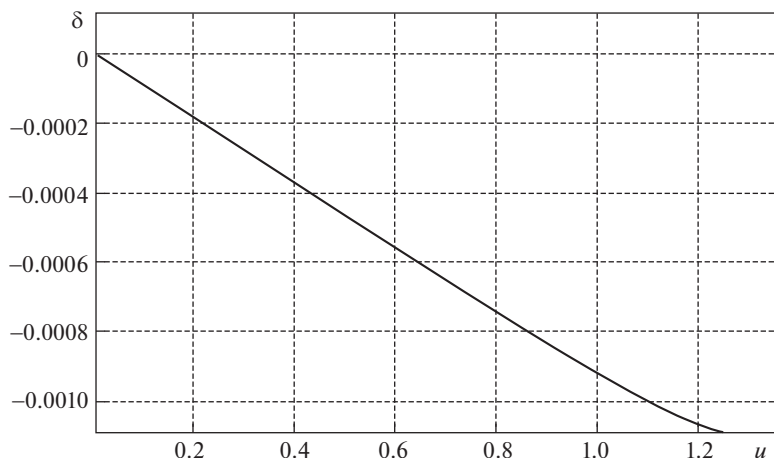


Рис. 2

С учетом данного преобразования окончательно определяется аппроксимация искомой связи геодезической долготы с приведенной широтой:

$$L'(u) = L_0 + \sqrt{1 - e^2 \phi^2} \left[ \operatorname{arctg} \frac{k\phi \sin u}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} - \operatorname{arctg} \frac{k\phi \sin u_0}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u_0}} \right] \quad (2.8)$$

На рис. 2 приведен график характерного изменения ошибки аппроксимации

$$\delta(u) = L(u) - L'(u)$$

в зависимости от широты  $u$  (для аналогичных значений параметров  $L_0 = 0.3$ ,  $u_0 = 0.01$ ,  $A_0 = 0.3$ ).

Если в низких широтах (точнее, для небольшого изменения широты при движении по геодезической линии) ошибка аппроксимации невелика (что позволяет использовать выражение (2.8) в высокоточных навигационных алгоритмах), то в высоких широтах (точнее, для большого изменения широты при движении по геодезической линии) она может достигать сотен метров, что резко снижает класс точности навигационной системы или ограничивает интервал ее движения с использованием (2.8). Для уменьшения погрешности аппроксимации  $\delta$  функции  $L(u)$  воспользуемся одним из широко применяемых методов регрессионного анализа — методом наименьших квадратов (МНК) для полиномиальной модели. Как показал эксперимент, приемлемая для многих современных навигационных систем метровая точность может быть достигнута при использовании данного метода за счет аппроксимации погрешности  $\delta(u)$ ,  $u \in [0, \pi/2]$  полиномом не выше пятого порядка. Конкретный вид полученной для рассматриваемого примера модели, построенной по методу МНК и аппроксимирующей погрешность  $\delta(u)$  (рис. 2), определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned} \delta'(u) = & 0.00026 \cdot u^5 - 0.00064 \cdot u^4 + 0.0006 \cdot u^3 - \\ & - 0.00023 \cdot u^2 + 0.00092 \cdot u + 83 \cdot 10^{-7} \end{aligned}$$

В этом случае скорректированная аппроксимирующая зависимость геодезической долготы от приведенной широты  $L^*(u)$  запишется в виде

$$L^*(u) = L'(u) + \delta'(u)$$

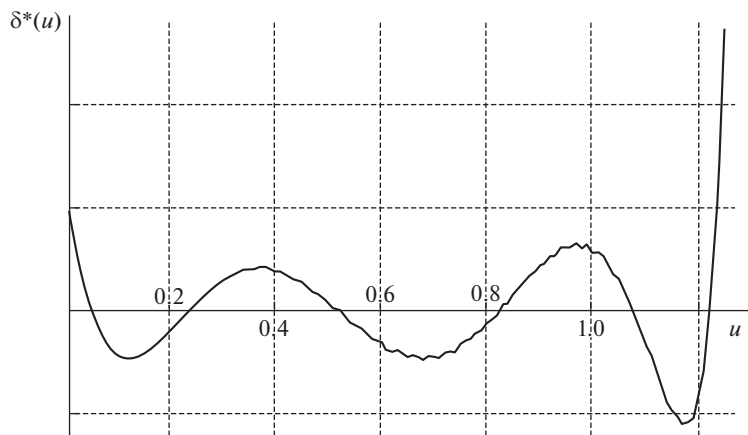


Рис. 3

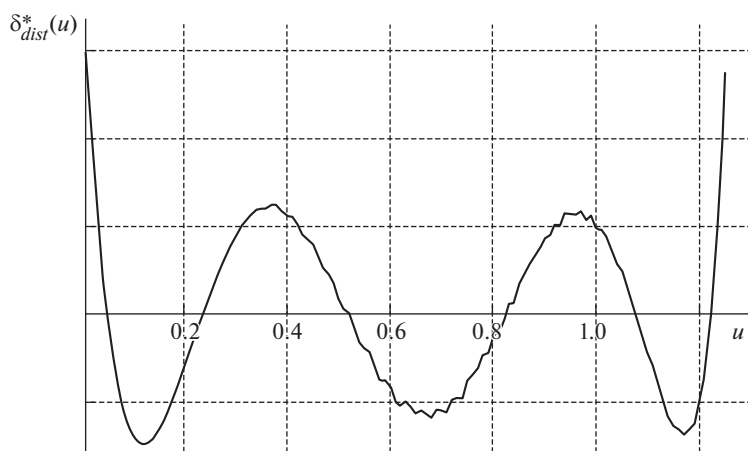


Рис. 4

а результирующая погрешность аппроксимации определится как

$$\delta^*(u) = L(u) - L^*(u)$$

На рис. 3 представлен график полученной для рассматриваемого примера результирующей погрешности аппроксимации  $\delta^*(u)$ .

На рис. 4 показана зависимость  $\delta_{dist}^*(u)$  значений указанной погрешности аппроксимации от широты, но уже не в радианах, а в метрах погрешности расстояния, откладываемого вдоль дуг соответствующих горизонтальных сечений (параллелей) исследуемого сфероида Земли (эллипсоида Красовского).

Анализируя график на рис. 4, можно отметить дополнительное уменьшение величины погрешности при увеличении значений широты за счет уменьшения длин дуг параллелей сфероида Земли при перемещении от экватора к полюсам.

Также следует отметить, что в общем случае аппроксимирующее выражение (2.8) зависит от начальных значений азимута  $A_0$  и широты  $u_0$  и, следовательно, точность аппроксимации также будет являться их функцией. Результаты численного моделирования показали, что для различных значений  $A_0$  и  $u_0$  зависимости  $\delta = f(u)$  отличаются друг от друга, хотя и совпадают по виду с рис. 2. При этом показанная выше точность аппроксимации, требуемая во многих практически важных навигационных приложениях, оказалась здесь также достижима за счет аппроксимации погрешности полиномом не выше пятого порядка, что для современных бортовых вычислителей трудностей не представляет.

В завершение рассмотрения данной аппроксимации следует отметить, что учитываемая известную связь приведенной ( $u$ ) и геодезической ( $B$ ) широт [3]

$$\sin u = \frac{\sin B}{\sqrt{1 + e^2 \cos^2 B}}$$

из (2.8) можно легко получить следующую связь геодезической долготы и геодезической широты.

$$\begin{aligned} L' - L_0 &= \sqrt{1 - e^2 \phi^2} \left[ \operatorname{arctg} \frac{k\phi \frac{\sin B}{\sqrt{1 + e^2 \cos^2 B}}}{\sqrt{1 - k^2 \frac{\sin^2 B}{1 + e^2 \cos^2 B}}} - \operatorname{arctg} \frac{k\phi \frac{\sin B_0}{\sqrt{1 + e^2 \cos^2 B_0}}}{\sqrt{1 - k^2 \frac{\sin^2 B_0}{1 + e^2 \cos^2 B_0}}} \right] = \\ &= \sqrt{1 - e^2 \phi^2} \left[ \operatorname{arctg} \frac{k\phi \sin B}{\sqrt{1 + e^2 - (k^2 + e^2) \sin^2 B}} - \operatorname{arctg} \frac{k\phi \sin B_0}{\sqrt{1 + e^2 - (k^2 + e^2) \sin^2 B_0}} \right] \end{aligned}$$

где  $B_0$  — значение широты начальной точки геодезической линии.

**3. Решение задачи на сфере Земли.** Полученные выше результаты интересно далее интерпретировать для сферы и сравнить их с уже известными [1, 5].

Полагая  $e = 0$ , из выражения (2.8) (в данном случае под  $u$  уже понимается географическая широта  $\varphi$ ) находим функциональную связь географической долготы  $\lambda$  и географической широты  $\varphi$  на ортодромии:

$$\lambda(\varphi) = \lambda_0 + \operatorname{arctg} \frac{k\phi \sin \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} - \operatorname{arctg} \frac{k\phi \sin \varphi_0}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi_0}}$$

которая может быть преобразована с учетом введенных ранее обозначений к виду:

$$\begin{aligned} \lambda(\varphi) &= \lambda_0 + \operatorname{arctg} \frac{\sin A_0 \cos \varphi_0 \sin \varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi - (\sin A_0 \cos \varphi_0)^2}} - \operatorname{arctg}(\sin \varphi_0 \operatorname{tg} A_0) = \\ &= \operatorname{arctg} \frac{P \sin \varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi - P^2}} + P_0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$P = \sin A_0 \cos \varphi_0, P_0 = \lambda_0 - \operatorname{arctg}(\sin \varphi_0 \operatorname{tg} A_0)$$

Полученное из дифференциальных уравнений геодезической линии (2.1)–(2.3) соотношение (3.1) не совпадает с традиционной зависимостью долготы  $\lambda$  и широты  $\varphi$  на ортодромии, выведенной с использованием формул сферической тригонометрии [1, 5]:

$$\lambda(\varphi) = \arcsin(J \cdot \operatorname{tg} \varphi) - J_0$$

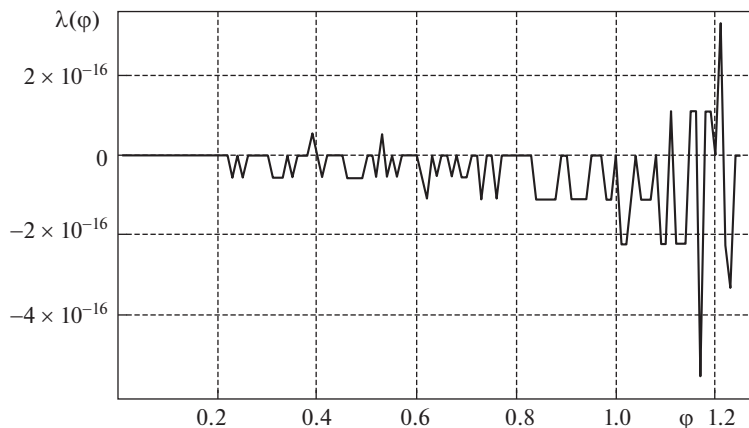


Рис. 5

$$J = \frac{\sin(\lambda_1 - \lambda_0)}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi_0 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1 - 2 \operatorname{tg} \varphi_0 \operatorname{tg} \varphi_1 \cos(\lambda_1 - \lambda_0)}} \quad (3.2)$$

$$J_0 = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \varphi_0 \sin \lambda_1 - \operatorname{tg} \varphi_1 \sin \lambda_0}{\operatorname{tg} \varphi_1 \cos \lambda_0 - \operatorname{tg} \varphi_0 \cos \lambda_1}$$

Принципиальным отличием традиционной связи от (3.1) является ее зависимость от координат как начальной, так и конечной, точек, в то время как выражение (3.1) зависит от координат только начальной точки и начального азимута ортодромии (который и определяет координаты конечной точки). Так как получить аналитический вывод выражения (3.1) из (3.2) (и наоборот) представляется весьма затруднительным, то для проверки их совпадения было выполнено численное моделирование выражений (3.1) и (3.2) для целого ряда значений координат как начальной, так и конечной, точек. Результаты численного эксперимента показали полное совпадение зависимостей (3.1) и (3.2) – их отличие сравнимо с погрешностью вычислений. Типичный график изменения несовпадений значений долготы  $\lambda(\varphi)$ , рассчитанных в соответствии с (3.1) со значениями долготы, определенными согласно (3.2), показан на рис. 5.

**4. Анализ использования полученных результатов.** Одним из наиболее интересных вариантов практического применения полученных результатов является возможность аналитического решения задачи навигации на сфере при наличии измерений только модуля скорости  $V$  объекта, движущегося по ортодромии (что позволяет минимизировать приборный состав измерительного комплекса). Действительно, так как долгота объекта  $\lambda$  – аналитическая функция его широты  $\varphi$ , то для решения задачи достаточно найти только решение уравнения широты

$$\dot{\varphi} = \frac{V_N}{R} = \frac{V \cos A}{R}$$

где  $V_N$  – проекция скорости объекта на плоскость меридиана,  $R$  – радиус Земли, которое на ортодромии трансформируется следующим образом. Так как для геодезической линии на сфере  $\cos A$  определяется выражением (2.4):

$$\cos A = \frac{\sqrt{\cos^2 u - \phi^2}}{\cos u}$$



то уравнение широты приобретает вид:

$$\dot{\varphi} = \frac{V \cos A}{R} = \frac{V \sqrt{\cos^2 \varphi - \phi^2}}{R \cos \varphi} = \frac{V \sqrt{1 - \phi^2 - \sin^2 \varphi}}{R \cos \varphi} \sin u$$

Данное уравнение допускает разделение

$$\frac{d(\sin \varphi)}{\sqrt{1 - \phi^2 - \sin^2 \varphi}} = \frac{V}{R} dt$$

и замену переменных

$$x = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \phi^2}}$$

сводящие задачу к решению табличного интеграла [4] и позволяющие записать результат интегрирования в виде:

$$\arcsin \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \phi^2}} \Big|_{\varphi_0}^{\varphi} = \frac{1}{R} \int_{t_0}^t V dt$$

откуда окончательное решение поставленной задачи может быть представлено как

$$\varphi = \arcsin \left( \sqrt{1 - \phi^2} \sin \left[ \arcsin \frac{\sin \varphi_0}{\sqrt{1 - \phi^2}} + \frac{1}{R} \int_{t_0}^t V dt \right] \right)$$

Полученное выражение совместно с (3.1) представляют собой полное аналитическое решение задачи навигации на ортодромии и могут быть эффективно использованы в практических расчетах.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-07-00994 А) и государственного задания № 1.11772.2018/11.12.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соколов С.В. Аналитические модели пространственных траекторий для решения задач навигации // ПММ. 2015. Вып. 1. С. 24–30.
2. Соколов С.В., Лукаевич В.И., Стажарова Л.Н. Оценка параметров движения объекта интегрированной навигационной системой при использовании информации электронных карт // Авиакосм. приборостр. 2014. № 5. С. 24–33.
3. Морозов В.П. Курс сфероидической геодезии. М.: Недра, 1979. 296 с.
4. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов. М.: Физматлит, 1963. 1100 с.
5. Серапинас Б.Б. Геодезические основы карт. М.: Изд-во МГУ, 2001. 132 с.