

УДК 531.36

**МОДЕЛИРОВАНИЕ МАКСИМАЛЬНОГО ПРОГИБА
СТУПЕНЧАТОГО СТЕРЖНЯ, ИМЕЮЩЕГО НАЧАЛЬНУЮ КРИВИЗНУ,
ПРИ УДАРЕ О ЖЕСТКУЮ ПРЕГРАДУ**

© 2019 г. А. А. Битюрин

*Ульяновский государственный технический университет, Ульяновск, Россия
e-mail: snk_2015@mail.ru*

Поступила в редакцию 15.12.2018 г.

После доработки 15.01.2019 г.

Принята к публикации 19.02.2019 г.

Решение динамических задач продольного удара однородного стержня в нелинейной постановке представляет, как известно, существенные математические трудности. Существующие подходы имеют довольно ограниченное применение главным образом из-за существенной приближенности решения поставленной задачи. Помимо этого такие подходы затрагивают обширный математический аппарат, что затрудняет их использование в инженерных расчетах. Проблема решения задачи продольного удара геометрически неоднородного (ступенчатого) стержня остается далекой от окончательного решения и на сегодняшний день. Решение поставленной задачи осложняется хаотичностью интерференционной картины продольных волн при их переходе через границы однородных участков ступенчатого стержня, в связи с чем деформации и продольные силы по длине стержня быстро меняются во времени. В настоящей работе с применением метода начальных параметров и волновой модели продольного удара делается попытка разработать методику расчета динамического прогиба ступенчатого стержня, совершающего поперечные колебания при продольном ударе о жесткую преграду. Моделируется величина максимального прогиба ступенчатого стержня, имеющего начальную кривизну одного из его участков. Получены результаты моделирования максимального прогиба при различных величинах начальной кривизны и предударной скорости стержня. В ходе обработки результатов моделирования выявлена т.н. “зона максимальных прогибов” – интервал изменения предударной скорости, на котором наблюдается максимальная амплитуда поперечных колебаний искривленного участка ступенчатого стержня. Отмечается возможность проведения расчета амплитуд поперечных колебаний стержней, и стержневых элементов при самых различных схемах закрепления и различном характере предударного состояния. Подчеркивается актуальность применения данной методики в динамических расчетах различных ударных механизмов, а также в инженерных расчетах стержневых систем различного назначения

Ключевые слова: поперечные колебания, прогиб, продольный удар, волновая модель, метод начальных параметров, предударная скорость, стержень

DOI: 10.1134/S0572329919050064

Введение. Задачи расчета на устойчивость и динамический прогиб при поперечных колебаниях в работах [1–6] реализовывались в основном для идеальных стержней постоянной толщины с прямолинейной осью при отсутствии каких-либо посторонних внешних воздействий. Однако в реальной ситуации помимо учета действующей продольной нагрузки, очень часто необходимо учитывать различные дополнительные

факторы, например начальную кривизну. В этом случае решение поставленной задачи усложняется, однако не учет внешних дополнительных факторов из-за неточности расчетов часто будет приводить к преждевременному износу конструкции в процессе эксплуатации, выходу из строя оборудования, а иногда и к аварийной ситуации. Особую важность представляет учет динамического характера продольного нагружения стержня, что приводит к дальнейшему усложнению поставленной задачи, как это было справедливо отмечено в работах [2–6].

Как показал обзор литературы [1–15], проблема продольного изгиба стержня при динамической нагрузке известна довольно широко. Это отражено в работах советских исследователей [2–6], а также в современных исследованиях [7–11]. Основную сложность решения динамических задач представляет их нелинейность. Довольно часто исследователи прибегают к приближенному решению нелинейных дифференциальных уравнений при динамической постановке задачи, либо в некоторых случаях предлагается замена точной нелинейной постановки более приближенной линейной [2–11]. Такой подход оказывается весьма успешным только на узком интервале изменения тех или иных параметров исследуемой системы. В этом случае расхождение с реальными результатами не превышает нескольких процентов. Однако, решение задачи сопровождается громоздкими математическими выкладками, что для проведения расчетов вызывает необходимость применения обширного математического аппарата и не всегда удобно в инженерной практике.

Необходимо отметить, что если рассматривать продольный удар ступенчатого стержня, имеющего несколько однородных участков различной длины и площади сечений, то решение задачи известными методами [2–11] может оказаться невозможным из-за хаотичности интерференционной картины продольных волн при их переходе через границы участков. Таким образом, на сегодняшний день динамическая задача продольного изгиба геометрически неоднородного стержня далека от окончательного решения.

В работе [12] реализована попытка решения задачи продольного изгиба стержня постоянного сечения при продольном горизонтальном ударе об абсолютно жесткую преграду. В постановке задачи учитывался собственный вес стержня, как равномерно распределенная нагрузка. С этой целью совместно применялся метод начальных параметров и волновая модель продольного удара. В настоящей работе этот подход реализован применительно к продольному удару геометрически неоднородного (ступенчатого) стержня, имеющего два участка различной длины и площади поперечных сечений.

1. Постановка задачи. Ниже приводится модель расчета прогиба ступенчатого стержня, состоящего из двух однородных участков, один из которых имеет начальную кривизну, при продольном ударе об абсолютно жесткую преграду. Разработанная математическая модель расчета позволяет учесть силы инерции, действующие на колеблющийся стержень и, вызванные кратковременностью действия ударной силы. Методом начальных параметров рассчитываются максимальное поперечное смещение и скорость сечений стержня, сжатого постоянной продольной силой [13]. Далее с применением волновой модели продольного удара [14, 15] вычисляются продольные силы, возникающие в однородных участках стержня, и рассчитывается время их действия. После прекращения действия продольных сил участки стержня представляют из себя колебательную систему, выведенную из положения равновесия и совершающую затухающие поперечные колебания, имея вначале процесса приобретенную скорость и начальное смещение поперечных сечений.

2. Применение метода начальных параметров. Возникающие продольные силы в ступенчатом стержне массы m и длинами участков l_1 и l_2 соответственно при продольном ударе со скоростью V_0 об абсолютно жесткую преграду, носят кратковременный характер. После прекращения их действия, как уже отмечалось выше, участки стержня

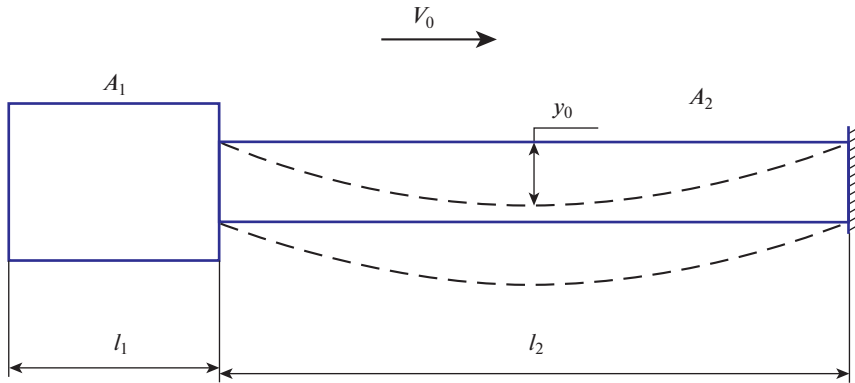


Рис. 1

начинают совершать затухающие поперечные колебания. Для определения максимальной амплитуды поперечных колебаний, которая будет иметь место вначале колебательного процесса (рис. 1), используется дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня постоянного поперечного сечения, несущего равномерно распределенную массу [1]:

$$(dy^4/d\xi^4) + v^2(d^2y/d\xi^2) - u^4y = 0 \quad (2.1)$$

где y – прогиб оси стержня или однородного участка; $\xi = x/l$ – относительная координата;

$$v^2 = Nl^2/EI; \quad u^4 = (m\omega^2l^4/EI) \quad (2.2)$$

N – продольная сила (положительная, если стержень сжат), l – длина стержня или его однородного участка, EI – жесткость стержня при изгибе, m – интенсивность массы, ω – частота свободных колебаний.

В данной задаче уравнение (2.1) используется применительно к каждому из однородных участков в отдельности, площадь поперечных сечений которых A_1 и A_2 соответственно (рис. 1). Один из участков имеет начальную кривизну y_0 (рис. 1).

Составим характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (2.1)

$$\lambda^4 + v^2\lambda^2 - u^4 = 0 \quad (2.3)$$

и его корни будут [13]

$$\lambda_1^2 = -(v^2/2) - \sqrt{(v^4/4) + u^4}, \quad \lambda_2^2 = -(v^2/2) + \sqrt{(v^4/4) + u^4} \quad (2.4)$$

В зависимости от направления продольной силы (сжатие или растяжение) u^4 и v^2 принимают как положительные, так и отрицательные значения, поэтому корни (2.4) могут быть вещественными, чисто мнимыми или комплексными сопряженными числами.

Общий интеграл уравнения (2.1) при отсутствии кратных корней можно записать в виде ряда

$$y = \sum_{j=1,2} (A_j \text{sh} \lambda_j \xi + B_j \text{ch} \lambda_j \xi) \quad (2.5)$$

где A_j, B_j – постоянные интегрирования; λ_j – корни характеристического уравнения (2.4).

Выражение (2.5) для прогибов однородных участков ступенчатого стержня дает возможность составить формулы усилий и углов поворота их сечений, если воспользоваться дифференциальными зависимостями [13]

$$\varphi = (dy/dx), \quad M = -EI(d^2y/dx^2), \quad Q^N = -EI(d^3y/dx^3) \quad (2.6)$$

Здесь φ , M – амплитуды угла поворота и изгибающего момента в сечении; Q^N – амплитуда поперечной силы, перпендикулярной к изогнутой оси стержня [13].

Для удобства обозначения примем

$$\tilde{\varphi} = l\varphi, \quad \tilde{M} = Ml^2/EI, \quad \tilde{Q}^N = Q^N l^3/EI \quad (2.7)$$

Тогда искомые зависимости запишутся в более простой форме

$$\tilde{\varphi} = dy/d\xi, \quad \tilde{M} = -d^2y/d\xi^2, \quad \tilde{Q}^N = -d^3y/d\xi^3 \quad (2.8)$$

или в рядах:

$$\tilde{\varphi} = \sum_{j=1,2} \lambda_j (A_j \operatorname{ch} \lambda_j \xi + B_j \operatorname{sh} \lambda_j \xi) \quad (2.9)$$

$$\tilde{M} = - \sum_{j=1,2} \lambda_j^2 (A_j \operatorname{sh} \lambda_j \xi + B_j \operatorname{ch} \lambda_j \xi) \quad (2.10)$$

$$\tilde{Q}^N = - \sum_{j=1,2} \lambda_j^3 (A_j \operatorname{ch} \lambda_j \xi + B_j \operatorname{sh} \lambda_j \xi) \quad (2.11)$$

Введем вместо Q^N величину Q , обозначающую поперечную силу, перпендикулярную к недеформированной оси стержня, которая определится зависимостью [13]:

$$Q^N = Q \cos \varphi + N \sin \varphi = Q + v^2(EI/l^2)\varphi = Q - \varphi(EI/l^2)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \quad (2.12)$$

Учитывая (2.8) и что $\tilde{Q} = Ql^3/EI$, получим на основании (2.11) и (10) [13]

$$\tilde{Q} = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \sum_{j=1,2} (1/\lambda_j) (A_j \operatorname{ch} \lambda_j \xi + B_j \operatorname{ch} \lambda_j \xi) \quad (2.13)$$

В дальнейшем поставленную задачу удобнее решать методом начальных параметров, как это предлагается В.Г. Чудновским [13]. Для получения формул метода начальных параметров необходимо постоянные интегрирования A_j и B_j выразить через усилия и перемещения сечения стержня, совпадающего с началом координат. Эти усилия и перемещения и будут называться начальными параметрами: y_0 , φ_0 , M_0 и Q_0 (рис. 2). Или введем их приведенные величины: $\tilde{\varphi}_0$, \tilde{M}_0 , \tilde{Q}_0 , определяемые (2.7).

Положив в (2.6)–(2.11) и (2.13) $\xi = 0$, и обозначив $y = y_0$, $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_0$, $\tilde{M} = \tilde{M}_0$, $\tilde{Q} = \tilde{Q}_0$, получим следующую систему уравнений для определения постоянных A_1 , A_2 , B_1 , B_2 :

$$B_1 + B_2 = y_0, \quad A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2 = \tilde{\varphi}_0, \quad -B_1 \lambda^2 - B_2 \lambda_2^2 = \tilde{M}_0, \quad \lambda_1^2 \lambda_2^2 ((A_1/\lambda_1) + (A_2/\lambda_2)) = \tilde{Q}_0 \quad (2.14)$$

Если значения постоянных A_1 , A_2 , B_1 , B_2 , найденные из системы (2.14) подставить в зависимости (2.6), (2.9), (2.10) и (2.13), получим формулы метода начальных параметров [13]:

$$y = -y_0 \lambda_1^2 \lambda_2^2 F_\xi' + \tilde{\varphi}_0 F_\xi^{IV} - \tilde{M}_0 F_\xi^{III} - \tilde{Q}_0 F_\xi'' \quad (2.15)$$

$$\tilde{\varphi} = -y_0 \lambda_1^2 \lambda_2^2 F_\xi'' + \tilde{\varphi}_0 F_\xi^V - \tilde{M}_0 F_\xi^{IV} - \tilde{Q}_0 F_\xi''' \quad (2.16)$$

$$\tilde{M} = y_0 \lambda_1^2 \lambda_2^2 F_\xi''' + \tilde{\varphi}_0 F_\xi^{VI} - \tilde{M}_0 F_\xi^V - \tilde{Q}_0 F_\xi^{IV} \quad (2.17)$$

$$\tilde{Q} = -y_0 \lambda_1^4 \lambda_2^4 F_\xi + \tilde{\varphi}_0 \lambda_1^2 \lambda_2^2 F_\xi^{III} - \tilde{M}_0 \lambda_1^2 \lambda_2^2 F_\xi'' - \tilde{Q}_0 \lambda_1^2 \lambda_2^2 F_\xi' \quad (2.18)$$

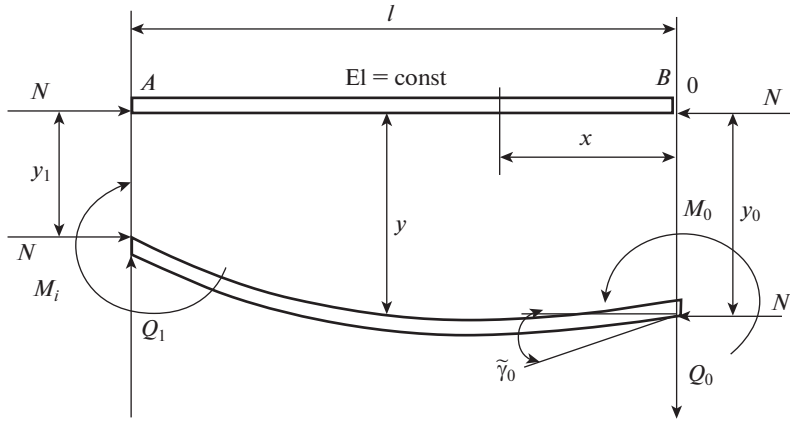


Рис. 2

$$F_{\xi} = [1/(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)](\text{sh}\lambda_2\xi/\lambda_2^3 - \text{sh}\lambda_1\xi/\lambda_1^3) \quad (2.19)$$

$$F'_{\xi} = (dF_{\xi}/d\xi) = [1/(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)](\text{ch}\lambda_2\xi/\lambda_2^2 - \text{ch}\lambda_1\xi/\lambda_1^2) \quad (2.20)$$

$$F''_{\xi} = (d^2F_{\xi}/d\xi^2) = [1/(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)](\text{sh}\lambda_2\xi/\lambda_2 - \text{sh}\lambda_1\xi/\lambda_1) \quad (2.21)$$

$$F'''_{\xi} = (d^3F_{\xi}/d\xi^3) = [1/(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)](\text{ch}\lambda_2\xi - \text{ch}\lambda_1\xi) \quad (2.22)$$

$$F^{IV}_{\xi} = (d^4F_{\xi}/d\xi^4) = [1/(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)](\lambda_2\text{sh}\lambda_2\xi - \lambda_1\text{sh}\lambda_1\xi) \quad (2.23)$$

$$F^V_{\xi} = (d^5F_{\xi}/d\xi^5) = [1/(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)](\lambda_2^2\text{ch}\lambda_2\xi - \lambda_1^2\text{ch}\lambda_1\xi) \quad (2.24)$$

$$F^{VI}_{\xi} = (d^6F_{\xi}/d\xi^6) = [1/(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)](\lambda_2^3\text{sh}\lambda_2\xi - \lambda_1^3\text{sh}\lambda_1\xi) \quad (2.25)$$

где λ_1 и λ_2 – корни характеристического уравнения, которые могут быть вещественными, мнимыми или комплексными числами в зависимости от величины и знака начальных параметров.

Формулы (2.15)–(2.18), полученные Чудновским В.Г., выражают перемещения и усилия в любом сечении колеблющегося стержня в зависимости от начальных параметров (рис. 2). Таким образом, данный подход дает возможность ответить на интересующие нас вопросы, касающиеся поперечных колебаний стержня, имеющего начальную кривизну, эксцентриситет ударной силы. Этот подход позволяет учесть поперечную нагрузку, действующую на стержень, а также прочие внешние факторы, в чем и состоит основная его ценность.

При горизонтальном ударе ступенчатого стержня о жесткую преграду с учетом начальной кривизны одного из его однородных участков, используя метод начальных параметров, выражение для максимального прогиба, запишется в виде

$$y_{\max} = \tilde{\varphi}_0 F_{\xi}^{IV} - \tilde{M}_0 F_{\xi}^{III} \quad (2.26)$$

Здесь $\tilde{\varphi}_0$ – относительный угол поворота ударного сечения, связанный с начальной кривизной участка, \tilde{M}_0 – начальный изгибающий момент в ударном сечении, F_{ξ}^{IV} , F_{ξ}^{III} – коэффициенты, определяемые в [13].

3. Определение продольной силы. Для определения продольной силы N используется волновая модель продольного удара стержня о жесткую преграду [14, 15]. Для первого и второго однородных участков стержня решается волновое уравнение

$$\partial^2 u_1(x, t) / \partial x^2 - (1/a^2)(\partial^2 u_1(x, t) / \partial t^2) = 0, \quad 0 \leq x \leq l_1 \quad (3.1)$$

$$\partial^2 u_2(x, t) / \partial x^2 - (1/a^2)(\partial^2 u_2(x, t) / \partial t^2) = 0, \quad l_1 \leq x \leq l_1 + l_2 \quad (3.2)$$

где $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ – продольное перемещение поперечных сечений однородных участков 1 и 2 ступенчатого стержня соответственно, x – координата сечения, t – время, a – скорость распространения продольной волны деформации.

Начальные условия определяют состояние стержня перед его соударением с жесткой преградой [15]:

$$\partial u_1(x, t_0) / \partial t = \partial u_2(x, t_0) / \partial t = V_0 \quad (3.3)$$

Краевые условия определяют отсутствие силы в сечении $x = 0$ и равенство нулю скорости сечения $x = l$ при взаимодействии участка 2 стержня с жесткой преградой:

$$(\partial u_1(0, t) / \partial x) = 0, \quad (\partial u_2(l, t) / \partial t) = 0 \quad (3.4)$$

а также определяют равенство сил и скоростей в переходном сечении $x = l_1$ между первым и вторым участками ступенчатого стержня

$$EA_1 (\partial u_1(l_1, t) / \partial x) = EA_2 (\partial u_2(l_1, t) / \partial x), \quad (\partial u_1(l_1, t) / \partial t) = (\partial u_2(l_1, t) / \partial t) \quad (3.5)$$

где A_1 и A_2 – площади поперечных сечений участков 1 и 2 ступенчатого стержня соответственно.

Решение волнового уравнения для каждого из однородных участков ступенчатого стержня реализуется методом Даламбера [15]

$$u_1(x, t) = f_1(at - x) + \varphi_1(at + x), \quad 0 \leq x \leq l_1 \quad (3.6)$$

$$u_2(x, t) = f_2(at - x) + \varphi_2(at + x), \quad l_1 \leq x \leq l_1 + l_2$$

где $f_1(at - x)$, $f_2(at - x)$ – функции, описывающие прямые волны, распространяющиеся по участкам стержня в направлении оси x , $\varphi_1(at + x)$ и $\varphi_2(at + x)$ – функции, описывающие обратные волны, распространяющиеся по участкам в противоположном направлении; $f_1'(at - x)$, $f_2'(at - x)$, $\varphi_1'(at + x)$, $\varphi_2'(at + x)$ – производные функций.

В относительных величинах прямые и обратные волны: $\tilde{f}'(at - x) = f'(at - x) / (V_0/a)$; $\tilde{\varphi}'(at + x) = \varphi'(at + x) / (V_0/a)$. Относительная продольная деформация в сечении и относительная скорость этого сечения соответственно [15]:

$$\tilde{\epsilon}(x, t) = -\tilde{f}(at - x) + \tilde{\varphi}(at + x) \quad (3.7)$$

$$\tilde{v}(x, t) = v(x, t) / V_0 = \tilde{f}(at - x) + \tilde{\varphi}(at + x) \quad (3.8)$$

Методом характеристик строится поле состояний [14], которое для каждого момента времени позволяет определить значения прямых и обратных волн $\tilde{f}(at - x)$, $\tilde{\varphi}(at + x)$, значения относительной продольной деформации $\tilde{\epsilon}(x, t)$, относительной скорости $\tilde{v}(x, t)$, а также длительность состояния для произвольного сечения. Учитывая, что между величинами относительной продольной деформации и вызывающей ее продольной силой существует прямая зависимость, из анализа поля состояний можно получить данные о продольных силах, возникающих на участках ступенчатого стержня в процессе удара. Поле состояний дает возможность зафиксировать время действия возникшей продольной силы на рассматриваемом участке стержня, что в конечном

итоге не менее важно при расчете максимального прогиба участка стержня, поскольку величина прогиба зависит от продолжительности силового воздействия.

При известной величине относительной продольной деформации $\tilde{\epsilon}$, легко определить значение сжимающей продольной силы N из соотношения [12]:

$$N = EA\tilde{\epsilon}(V_0/a) \quad (3.9)$$

После расчета величины N продолжительности ее действия, можно, используя метод начальных параметров, рассчитать прогиб y произвольного сечения стержня и его скорость $y' = dy/dt$ в момент прекращения действия продольной силы. Далее сечения стержня, имея приобретенную поперечную скорость y' и двигаясь по инерции до некоторого максимального отклонения y_{\max}^* от положения равновесия, начинают совершать свободные колебания. В реальных условиях этот колебательный процесс будет затухающим.

4. Вычисление максимального прогиба. Максимальное отклонение рассматриваемого сечения ступенчатого стержня от положения равновесия, которое и будет его максимальным прогибом, легко определится по известной формуле [1, 12]:

$$y_{\max}^* = \sqrt{y^2 + (y' / \omega)^2} \quad (4.1)$$

где y – максимальный прогиб участка стержня, равный максимальному отклонению от положения равновесия его сечения, находящегося на середине длины участка (рис. 1) в момент прекращения действия продольной силы N , ω – циклическая частота свободных поперечных колебаний участка стержня при отсутствии продольной силы, y' – приобретенная скорость сечения. Для расчета прогиба одного из участков относительная координата ξ принимается равной 0.5, как для сечения, находящегося на середине длины участка.

Для первой формы поперечных колебаний ($n = 1$), с учетом зависимости (4.1), имеем для сжатого участка стержня круглого поперечного сечения выражение циклической частоты поперечных колебаний:

$$\vartheta = \omega \sqrt{1 - (64V_0 \tilde{\epsilon} l^2) / (\pi^2 d^2 a)} \quad (4.2)$$

Анализируя формулу (4.2) можно заключить, что с ростом предупредительной скорости частота поперечных колебаний сжатого участка стержня ϑ будет уменьшаться и достигнет нуля при достижении продольной силы величины $P_{кр}$ по Эйлеру, что отмечено в работах [1, 13].

Частоту свободных поперечных колебаний однородного участка стержня ω , по первой форме $n = 1$ можно рассчитать по формуле [1]

$$\omega = (\varphi_n^2 / l^2) \sqrt{(EI/m)} \quad (4.3)$$

Параметр φ выбирается с учетом сопряжения начального и конечного сечений однородного участка с жесткой преградой и с соседним участком ступенчатого стержня, поскольку отрыв стержня от жесткой преграды еще не наступил. В этом случае участок стержня рассматривается как отдельный однородный стержень, жестко заделанный по обоим торцам (рис. 1).

Предполагая гармонический закон колебательного процесса однородного участка, имеем

$$y = y_{\max} \sin(\vartheta t) \quad \text{и} \quad y' = y_{\max} \vartheta \cos(\vartheta t) \quad (4.4)$$

При малых значениях t максимальная скорость сечения будет

$$y' \approx y_{\max} \vartheta \quad (4.5)$$

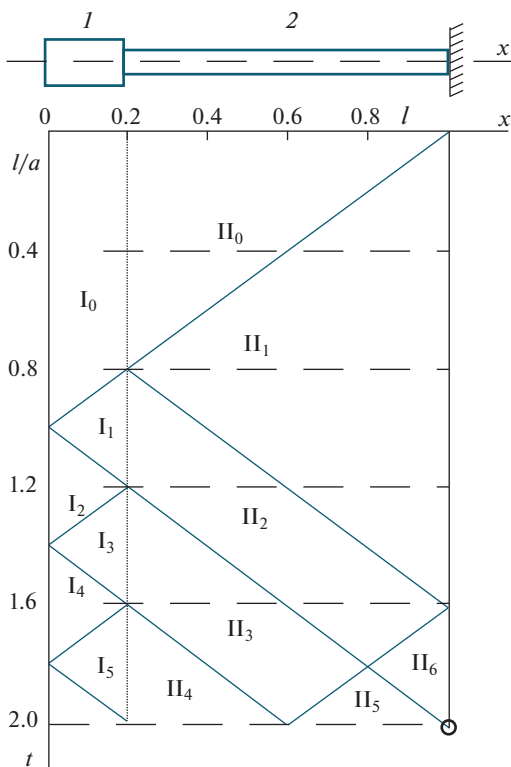


Рис. 3

Подставляя значения частоты свободных колебаний стержня ω и скорость y' в формулу (4.1), получим искомый максимальный прогиб однородного участка стержня y_{\max}^* . В этом случае имеет место учет сил инерции, действующих на стержень при динамической нагрузке, что представляло в традиционных моделях расчета довольно сложную задачу.

5. Пример. Рассмотрим продольный удар ступенчатого стержня о жесткую преграду при: $l_1 = 0.2l$, $\lambda = A_1/A_2 = 2$ (рис. 1). В размерных величинах: $l = 2$ м, $d_1 = 0.05$ м, $d_2 = 0.035$ м предударная скорость $V_0 = 1$ м/с, материал – сталь СТ-5 ($a = 5000$ м/с). Второй, наиболее тонкий участок ступенчатого стержня, имеет начальную кривизну $y_0 = 1$ мм. Циклическая частота ω его собственных поперечных колебаний, рассчитанная по (4.3) будет равна 392 р/с. Учитывая условия сопряжения рассматриваемого участка стержня, параметр φ принимается равным 4.73 [1].

Для определения продольной силы и времени ее действия, решаем уравнения (3.1), (3.2) и методом характеристик строим поле состояний (рис. 3).

Области состояний I_0 – I_5 , II_0 – II_6 с соответствующими значениями $\tilde{f}(at - x)$, $\tilde{\Phi}(at + x)$, $\tilde{\xi}(x, t)$, $\tilde{\nu}(x, t)$ определяют параметры прямых и обратных волн деформаций, относительные продольную деформацию и скорость поперечных сечений. Длительность состояний для рассматриваемого сечения определяется разностью ординат t наклонных линий.

Из анализа поля состояний выделяем область Π_1 , так как она охватывает весь второй однородный участок, имеющий начальную кривизну. В этой области относительная продольная деформация $\tilde{\epsilon} = -1$. Поскольку каждое сечение, как видно из поля состояний, находится в этой области разное время, а продолжительность действия изменяется по линейной зависимости, целесообразно определить средний период действия данного состояния \bar{T} на рассматриваемый однородный участок. Из рис. 3 устанавливаем $\bar{T} = 0.4(l/a)$.

Необходимо обратить внимание на область Π_2 , в которой относительная продольная деформация $\tilde{\epsilon} = -1.33$, что по модулю больше деформации в области Π_1 . Однако область состояния Π_2 охватывает не более половины второго однородного участка и период ее действия в два раза менее продолжительный, в связи с чем, амплитуда поперечных колебаний будет ниже. Последующие области Π_3 – Π_5 не окажут существенного влияния на колебательный процесс, поскольку относительные продольные деформации $\tilde{\epsilon}$ в этих областях малы и непродолжительны. В области Π_6 относительная продольная деформация $\tilde{\epsilon}$ достигает по модулю значения 1.67, однако она действует малый период времени и охватывает небольшую длину второго участка (рис. 3), в связи с чем ее влияние на динамическое состояние участка окажется незначительным. При $t = 2.0l/a$ ударный процесс завершается, так как происходит отрыв ступенчатого стержня от жесткой преграды (кружок на рис. 3).

Из равенства (3.9) определяем продольную силу $N = 39.4$ кН, которая для данного участка стержня меньше критической по Эйлеру. Начальные параметры в ударном сечении, связанные с кривизной участка стержня: начальный изгибающий момент $M_0 = y_0 \cdot N = 39.4$ Н·м, и начальный угол поворота ударного сечения ступенчатого стержня $\varphi_0 = (y_0/l_2) = (10^{-3} \text{ м}/0.8 \text{ м}) = 1.25 \times 10^{-3}$ рад. Для удобства ведения расчета, учитывая (2.8) и (2.26), преобразуем выражения для v^2 и y_{\max} относительно V_0 , d и l : $v^2 = (16\tilde{\epsilon}V_0l_2^2)/(ad_2^2) = 6.54$; параметр u^4 в соответствии с (2.2) равен 1222.1; $y_{\max} = y_0(F_{\xi}^{IV} - (16l_2^2\tilde{\epsilon}V_0)/(ad_2^2)F_{\xi}^{III})$.

Для расчета коэффициентов F_{ξ}^{III} и F_{ξ}^{IV} вычисляем корни характеристического уравнения по формулам (2.4): $\lambda_1^2 = -38.38$; $\lambda_2^2 = 31.84$.

Подставляя значения λ_1^2 и λ_2^2 в формулы (2.22) и (2.23), учитывая $\bar{\lambda}_1 = i\lambda_1$, получим $F_{\xi}^{III} = -0.04$; $F_{\xi}^{IV} = -0.31$. После подстановки этих значений в выражение для y_{\max} , получим $y_{\max} = -0.36$ мм. Однако, такое значение прогиба возникает при постоянной продольной силе N . При кратковременном ее действии участок стержня будет только выведен из положения равновесия и далее предоставлен самому себе. Для гармонического закона изменения координаты сечения $x = l_2/2$ второго стержня имеем (4.4):

$$y = -0.36 \sin \vartheta t \tag{5.1}$$

где y в [мм].

Циклическая частота колебаний кратковременно сжатого стержня, рассчитанная по (4.2), будет равна $\vartheta = 320.86$ р/с. Отклонение сечения с координатой $x = l_2/2$ искривленного участка стержня при $t = l/a = 1/5000$ секунды в соответствии с (5.2) будет равно -0.037 мм. В соответствии с (4.5) поперечная скорость сечения $x = l_2/2$ после прекращения действия продольной нагрузки будет равна 0.116 м/с. Тогда получаем величину максимального прогиба второго однородного участка при свободных колебаниях в соответствии с (4.1): $y_{\max}^* = 0.3$ мм.

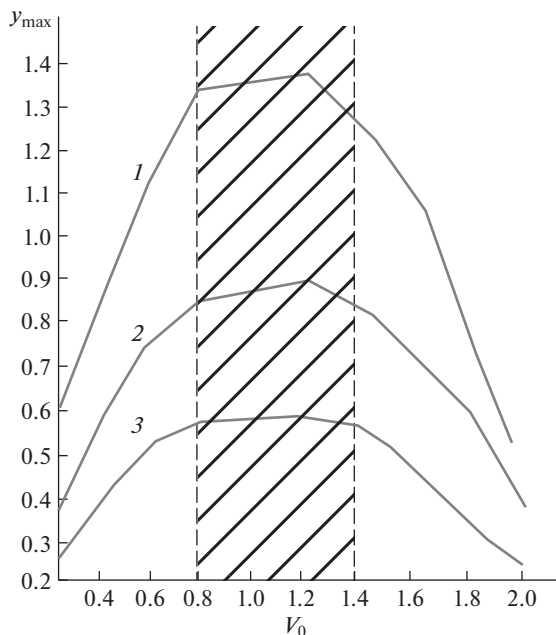


Рис. 4

6. Анализ результатов и выводы. В работе осуществлялось моделирование максимального прогиба ступенчатого стержня при различной предударной скорости V_0 от 0.2 до 2.2 м/с с интервалом 0.2 м/с и различной величине начальной кривизны y_0 : 2, 3 и 4.5 мм. Результаты моделирования сведены в табл. 1.

В столбцах 2–12 указаны соответствующие величины y_{\max}^* . Табличные значения удобнее анализировать с помощью графика (рис. 4).

Полученные результаты позволяют сформулировать следующие выводы:

1. При увеличении начальной кривизны y_0 максимальный прогиб y_{\max}^* ступенчатого стержня при ударе о жесткую преграду увеличивается.

2. Из графика (линии 1, 2, 3 рис. 4) отчетливо прослеживается т.н. “зона максимальных прогибов”, которая охватывает интервал изменения предударной скорости V_0 примерно от 0.8 до 1.4 м/с. При дальнейшем увеличении предударной скорости, несмотря на ожидаемый рост y_{\max}^* , наблюдается его довольно резкое снижение вплоть до нуля, что представляет немалый научный интерес.

Таблица 1

	V_0 (м/с)										
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_0 , (мм)	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2
2	0.27	0.39	0.49	0.60	0.61	0.63	0.59	0.47	0.42	0.28	0.20
3	0.38	0.60	0.75	0.86	0.88	0.90	0.84	0.72	0.63	0.42	0.26
4.5	0.58	0.89	1.13	1.32	1.33	1.35	1.26	1.08	0.94	0.57	0.44

Заключение. Таким образом, в представленной работе осуществляется совместное использование метода начальных параметров и волновой модели продольного удара для моделирования максимального прогиба ступенчатого стержня, имеющего начальную кривизну одного из участков, при ударе о жесткую преграду. Как уже отмечалось во введении, описанный подход можно использовать для моделирования поперечных колебаний стержня различных конфигурации и предударного состояния. Примененный подход позволяет учесть инерционные силы при расчете прогиба, что представляло в традиционных методах довольно непростую задачу. Дальнейшее развитие данного подхода будет представлять интерес для решения целого ряда прикладных задач механики.

В выводах, сделанных в ходе анализа результатов моделирования, обращается внимание на уменьшение величины максимального прогиба стержня с увеличением предударной скорости. Это связано с уменьшением частоты поперечных колебаний сжатого стержня при увеличении сжимающей нагрузки, пропорциональной скорости соударения стержня с жесткой преградой. При достижении продольной силы критической величины по Эйлеру частота поперечных колебаний стержня стремится к нулю, что означает потерю устойчивости [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Филиппов А.П.* Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение. 1970. 734 с.
2. *Лаврентьев М.А., Ишлинский А.Ю.* Динамические формы потери устойчивости упругих систем // Доклады АН СССР. 1949. Т. 65. № 6.
3. *Малый В.И.* Длинноволновое приближение в задачах о потере устойчивости при ударе // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 4. С. 138–144.
4. *Малый В.И.* Выпучивание стержня при продольном ударе. Малые прогибы // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 4. С. 181–186.
5. *Малый В.И.* Выпучивание стержня при продольном ударе. Большие прогибы // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 1. С. 52–61.
6. *Мальшев Б.М.* Устойчивость стержня при ударном сжатии // Изв. АН СССР. МТТ. 1966. № 4. С. 137–142.
7. *Морозов Н.Ф., Товстик П.Е.* Динамика стержня при кратковременном продольном ударе // Вестник С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2013. Вып. 3. С. 131–141.
8. *Беляев А.К., Ильин Д.Н., Морозов Н.Ф.* Динамический подход к задаче Ишлинского–Лаврентьева // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 5. С. 28–33.
9. *Беляев А.К., Морозов Н.Ф., Товстик П.Е.* О статической и динамической неустойчивости тонких стержней // Тр. 7 Всерос. конф. “Механика деформируемого твердого тела”. Ростов н/Д.: Изд. ЮФУ, 2013. С. 80–84.
10. *Морозов Н.Ф., Товстик П.Е.* О динамической потере устойчивости стержня при продольной нагрузке, меньшей Эйлеровой // Докл. АН. 2014. Т. 453. № 3. С. 282–285.
11. *Морозов Н.Ф., Товстик П.Е., Товстик Т.П.* Устойчивость стержня при длительном осевом сжатии // Проблемы прочности и пластичности. Межвузовский сборник. Нижний Новгород. 2015. № 77(1). С. 40–48.
12. *Битюрин А.А.* Моделирование амплитуды поперечных колебаний однородного стержня при ударе о жесткую преграду с учетом собственного веса // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2018. № 2. С. 16–23.
13. *Чудновский В.Г.* Методы расчета колебаний стержневых систем. Киев: Изд-во АН УССР, 1952. 403 с.
14. *Алимов О.Д., Манжосов В.К., Еремьянц В.Э.* Распространение волн деформаций в ударных системах. М.: Наука, 1985. 354 с.
15. *Битюрин А.А., Манжосов В.К.* Продольный удар неоднородного стержня о жесткую преграду. Ульяновск, 2009. 164 с.