

УДК 517.392;517.583

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ ДУГИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ КРИВОЙ

© 2019 г. К. Н. Анахаев

*Институт прикладной математики и автоматизации
Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук,
Нальчик, Россия
e-mail: anaha13@mail.ru*

Поступила в редакцию 19.10.2018 г.

После доработки 19.10.2018 г.

Принята к публикации 22.02.2019 г.

Эллиптические кривые широко распространены в очертаниях различных геофизических объектов, естественных и искусственных тел, траекториях движений планет, спутников, элементарных частиц и др. На их основе решаются многие теоретические и прикладные задачи, в том числе в области механики, геофизики и математической физики. Однако, до настоящего времени не в полной мере разработаны расчетные зависимости по нахождению длины отдельных участков (дуги) эллипса, востребованные в инженерной практике. В работе приведены аналитические зависимости для определения длины дуги и всего эллипса, полученные на основе представления неполного и полного эллиптических интегралов 2 рода в элементарных функциях и совпадающие с известными точными формулами для граничных очертаний эллипса – окружности и горизонтального отрезка прямой (тонкой плиты). Приведены также графики зависимости длины дуги эллипса от центрального угла и соотношения полуосей. Сравнение результатов решения тестовой задачи по предлагаемому методу с базовыми значениями численного расчета с использованием программы “Mathematic” показало достаточно близкое совпадение ($\leq 0.5\%$).

Ключевые слова: эллиптическая кривая, эллипс, длина дуги эллипса, неполные и полные эллиптические интегралы 2 рода

DOI: 10.1134/S0572329919050052

Эллиптическая кривая

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

где x и y – текущие координаты по рис. 1; a и b – большая и малая полуоси эллипса, является одной из наиболее распространенных математических кривых 2-го порядка, на основе которой решаются многие теоретические и прикладные задачи механики, геофизики и математической физики, в том числе в области движения небесных тел, искусственных спутников и элементарных частиц. При этом длина эллиптической кривой l_1 (от оси Oy до рассматриваемой точки по часовой стрелке) на участке 1 (AB) (рис. 1) определяется зависимостью [1, 2]

$$l_1 = a \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = aE(\varphi | k) \quad (2)$$

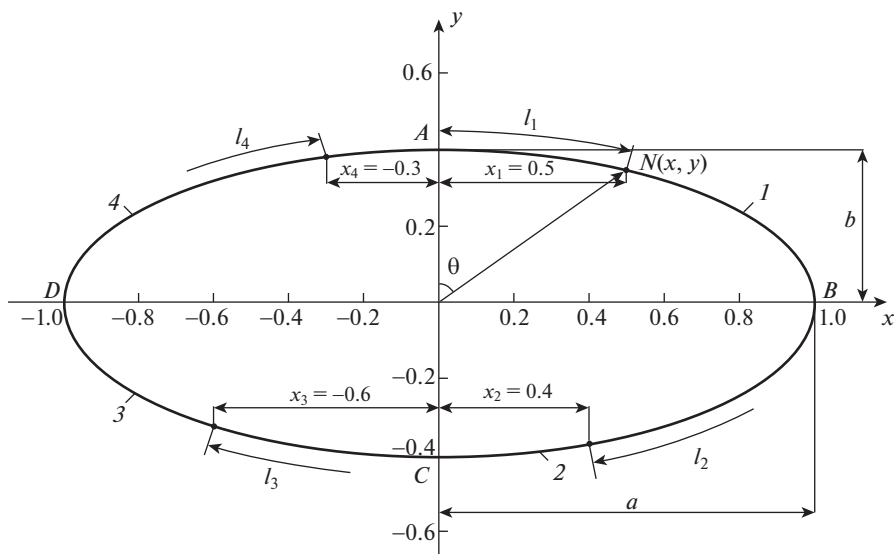


Рис. 1

где $E(\varphi \setminus k)$ – неполный эллиптический интеграл 2 рода, модуль k которого равен эксцентриситету эллипса

$$k = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \tag{3}$$

а амплитуда φ соответствует “линейному” углу параметрического уравнения эллипса $x = a \cdot \sin \varphi$, $y = b \cdot \cos \varphi$ и определяется зависимостью

$$\varphi = \arcsin \left| \frac{x}{a} \right| \tag{4}$$

здесь x – абсцисса рассматриваемой точки эллипса $N(x, y)$.

Из равенства модуля $k = \sin \alpha$ выразим значение модулярного угла через полуоси эллипса

$$\alpha = \arcsin \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \text{ (в градусах)} \tag{5}$$

В формуле (2) величина неполного эллиптического интеграла 2 рода $E(\varphi \setminus k)$ не выражается через элементарные функции [2–4], а частные его значения аналитически рассчитываются либо медленно сходящимися рядами, либо путем трудоемкого перекрестного нелинейного интерполирования дискретных табличных данных. При этом для определения полной длины эллипса могут быть использованы также и приближенные формулы [5]. Отсутствие таковых для нахождения длины отдельных участков (дуги) эллипса вызывает неудобства и затруднения при решении различных задач механики и математической физики.

Для определения длины дуги эллипса от верхнего конца малой оси (точки A) до точки $N(x, y)$ на участке 1 (AB) l_1 (рис. 1) преобразуем зависимость (2) с представлением

Таблица 1

Участки (по рис. 1)	Абсциссы заданных точек	Амплитуда φ по (4)	Длина дуги эллипса		%
			базовое значение	по формулам автора (6)–(12)	
1(AB)	$x_1 = +0.5$	0.52360	0.50392	$l_1 = 0.50618$ (0.50618)	+0.45 (+0.45)
2(BC)	$x_2 = +0.4$	0.41152	1.89943	$l_2 = 1.89046$ (1.88783)	-0.47 (-0.61)
3(CD)	$x_3 = -0.6$	0.64350	2.90868	$l_3 = 2.90487$ (2.90225)	-0.13 (-0.22)
4(DA)	$x_4 = -0.3$	0.30469	4.30188	$l_4 = 4.28572$ (4.28047)	-0.38 (-0.50)
Полная длина эллипса L_3 (ABCD)			4.60264	$L_3 = 4.58695$ (4.58170)	-0.34 (-0.45)

В скобках приведены результаты, полученные с использованием формул (9), (15).

неполного эллиптического интеграла 2 рода $E(\varphi|\alpha)$ в элементарных функциях [6, 7] к виду

$$l_1 = a \left\{ \varphi - (\varphi - \sin \varphi) \frac{\alpha}{90^\circ} - \xi \left[\pi - (\pi - 2) \frac{\alpha}{90^\circ} - 2E(\alpha) \right] \frac{\varphi - \varphi^*}{\pi - 2\varphi^*} \right\} \quad (6)$$

в которой величины φ^* и ξ , соответственно, равны

$$\varphi^* = \frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{\alpha}{65^\circ} \right), \quad \xi = \begin{cases} 0, & \varphi \leq \varphi^* \\ 1, & \varphi > \varphi^* \end{cases} \quad (7)$$

а значение полного эллиптического интеграла 2 рода $E(\alpha)$ находится (с погрешностью <1%) по нижеследующей зависимости (8) [6–9]

$$E(\alpha) = \ln \sqrt{e^\pi - (e^\pi - e^2) \sin^2 \alpha} = \ln \sqrt{e^\pi - (e^\pi - e^2) \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right)} \quad (8)$$

либо по новой более упрощенной формуле

$$E(\alpha) = \left[1 - \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \cos \alpha \right] (1 + \sqrt{\cos^3 \alpha}) = \left[1 - \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \frac{b}{a} \right] \left[1 + \left(\frac{b}{a} \right)^{1.5} \right] \quad (9)$$

в которых a означает большую (горизонтальную) полуось эллипса.

Значения длин дуг эллипса l_2 , l_3 и l_4 для участков 2(BC), 3(CD) и 4(DA) (от вертикальной оси Oy до рассматриваемых точек по часовой стрелке, рис. 1), соответственно, определяются формулами:

$$- BC: l_2 = 2aE(\alpha) - l_1 \quad (10)$$

$$- CD: l_3 = 2aE(\alpha) + l_1 \quad (11)$$

$$- DA: l_4 = 4aE(\alpha) - l_1 \quad (12)$$

в которых величина l_1 находится по формуле (6) при значениях φ , подсчитанных по зависимости (4), соответственно, для абсцисс каждой из заданных точек.

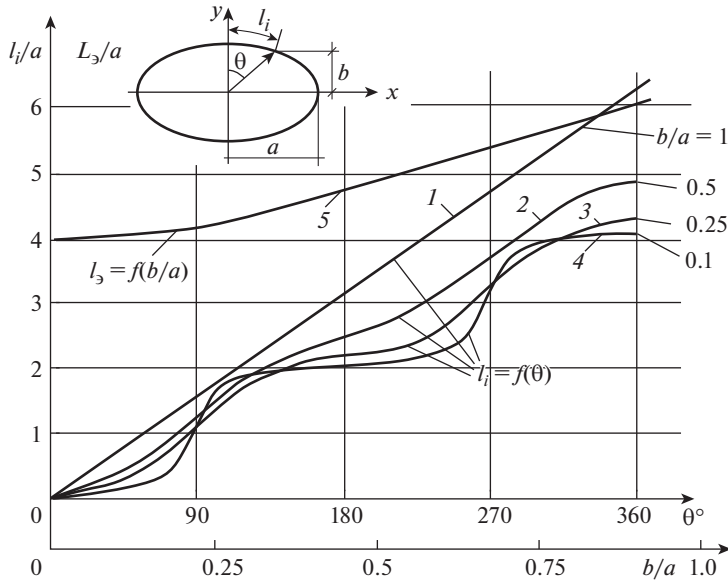


Рис. 2

Для выражения зависимости длины дуги эллипса от центрального угла θ между вертикальной осью Oy и радиус-вектором ON к рассматриваемой точке (рис. 1) амплитуду φ для вышеприведенных формул следует определять по зависимости

$$\varphi = \arcsin \left| \frac{b \cdot \operatorname{tg} \theta}{\sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \theta}} \right| \quad (13)$$

При этом полная длина эллипса L_3 может быть определена по нижеследующим зависимостям (14) [6, 7] и (15)

$$L_3 = 4a \cdot \ln \sqrt{e^\pi - (e^\pi - e^2) \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)} \quad (14)$$

$$L_3 = 4a \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \frac{b}{a} \right] \left[1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{1,5} \right] \quad (15)$$

которые для граничных очертаний эллипса – окружности ($a = b$) и горизонтального отрезка прямой (тонкой плиты) ($b = 0$) совпадают с точными формулами.

Длина дуги между двумя произвольно расположенными точками эллипса находится как разность между значениями длин дуг от оси Oy , подсчитанных для каждой из этих точек в отдельности.

Для оценки точности полученных зависимостей по определению длин дуг эллипса в нижеследующей табл. 1 приводится сравнение их результатов с базовыми значениями, подсчитанными с использованием программных продуктов для тестовой задачи – эллипса с полуосями $a = 1,0$, $b = 0,4$.

Как следует из таблицы, предлагаемые зависимости (6)–(12) для расчета длин дуг эллипса (выраженные в элементарных функциях) для рассмотренной тестовой задачи дают достаточно близкое приближение к базовым значениям ($\leq 0,5\%$), причем для гра-

ничных очертаний эллипса – окружности и горизонтального отрезка прямой (тонкой плиты), указанные зависимости совпадают с известными точными формулами.

На рис. 2 приведены графики зависимостей длины дуги $l_i = f(\theta)$ и эллипса $L_э = f(b/a)$ от центрального угла θ и соотношений полуосей эллипса (b/a). Как видно из графиков, длина дуги l_i крайне неравномерно зависит от угла θ , причем при увеличении значения $b/a > 0.5$ эта неравномерность “смягчается”, постепенно выпрямляясь для окружности. Длина эллипса $L_э$ для значений $0.4 \leq b/a \leq 1$ весьма близка к линейной зависимости и может быть описана простой формулой

$$L_э = (1.2a + b) \frac{\pi}{1.1} \quad (16)$$

которая рекомендуется для практического использования в указанном интервале.

Заключение. В работе приведены аналитические зависимости для определения длины как отдельных участков (дуги), так и всего эллипса, полученные на основе представления неполного и полного эллиптических интегралов 2 рода в элементарных функциях. Для граничных очертаний эллипса – окружности и горизонтального отрезка прямой (тонкой плиты), предложенные зависимости совпадают с известными точными формулами. Приведены также графики зависимости длины дуги эллипса от центрального угла и соотношения полуосей. Сравнение результатов решения по предлагаемому методу для тестовой задачи – эллипса с полуосями $a = 1.0$, $b = 0.4$, с базовыми значениями численного расчета (программы “Mathematica”) показало достаточно близкое совпадение ($\leq 0.5\%$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сикорский Ю.С. Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике. М.-Л., 1936. 365 с.
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Наука, 1969. 800 с.
3. Милн-Томсон Л. Эллиптические интегралы. В кн.: Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. С. 401–441.
4. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1977. 342 с.
5. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике М.: Наука, 1980. 975 с.
6. Анахаев К.Н. О методах расчета потенциальных (фильтрационных) потоков на основе эллиптических интегралов Якоби // Гидротехническое строительство. 2008. № 8. С. 7–9.
7. Anakhaev K.N. On methods of calculating potential (Seepage) flows on the basis of Jacobi elliptic integrals // Power Technology and Engineering. 2008. V. 42. № 5. P. 273–276.
8. Анахаев К.Н. О полных эллиптических интегралах 3-го рода в задачах механики // ДАН. 2017. Т. 473. № 2. С. 151–153.
9. Anakhaev K.N. Complete elliptic Integrals of the Third Kind in Problems of Mechanics // Doklady Physics. 2017. V. 62. № 3. P. 133–135.