

УДК 531.36,519.24

АППРОКСИМАЦИЯ ВЫРАЖЕНИЙ ДЛЯ СИЛЫ И МОМЕНТА СИЛЫ СУХОГО ТРЕНИЯ

© 2019 г. А. А. Загордан^а, Е. А. Привалов^{б,*}

^аООО «Авиакомпания Волга-Днепр», Москва, Россия

^бИнститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: prival@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 06.12.2018 г.

После доработки 06.12.2018 г.

Принята к публикации 19.12.2018 г.

Динамика колеса, движущегося по опорной поверхности, в значительной мере определяется трением в области его контакта с поверхностью. Для определения силы и момента силы сухого трения применяется модель, основанная на теории контактных напряжений Герца. При исследовании конкретных механических систем с сухим трением удобно использовать аппроксимации компонент силы трения более простыми выражениями. В данной работе предложено два варианта построения приближенных выражений компонент силы трения с использованием аппроксимации функции в среднем.

Ключевые слова: сухое трение, контактные напряжения, аппроксимация функции в среднем

DOI: 10.1134/S0572329919040111

Рассматривается модель сухого трения, основанная на теории Герца о распределении напряжений в области контакта колеса с опорой [1]. Считается, что область контакта — круг. Силовые характеристики трения задаются проекциями на оси декартовой системы координат $Oxuz$, начало которой находится в центре круга, оси Ox и Oy лежат в плоскости опорной поверхности, ось Ox направлена по скорости центра колеса. Получены выражения для проекций силы сухого трения оси Ox и Oy в виде эллиптических интегралов. Использование других переменных [2] позволяет получить выражения для проекций силы и момента силы сухого трения в элементарных функциях.

Проекция силы сухого трения на ось Ox с точностью до постоянного множителя определяется функцией $\Phi_x(k)$, изменяющейся в пределах 0–1

$$\Phi_x(k) = \begin{cases} \frac{3}{32} \pi k(4 - k^2), & k \leq 1 \\ \frac{3}{16} \left[k(4 - k^2) \arcsin \frac{1}{k} + \left(k + \frac{2}{k} \right) \sqrt{k^2 - 1} \right], & k \geq 1 \end{cases} \quad (1)$$

Здесь: $k = v/\varepsilon\omega$, v — скорость скольжения колеса, ω — угловая скорость вращения, ε — радиус круга контакта.

Функция $\Phi_y(k)$, пропорциональная проекции силы сухого трения на ось Oy , также меняется в пределах 0–1

$$\Phi_y(k) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{8}k^4, & k \leq 1 \\ \frac{2}{\pi} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{8}k^4 \right) \arcsin \frac{1}{k} + \left(\frac{1}{3k^2} + \frac{5}{12} - \frac{1}{8}k^2 \right) \sqrt{k^2 - 1} \right\}, & k > 1 \end{cases} \quad (2)$$

Момент силы трения относительно оси Oz с точностью до постоянного множителя задается функцией $0 \leq \Phi_z(k) \leq 1$, которая имеет вид

$$\Phi_z(k) = \begin{cases} \frac{1}{8}(8 - 8k^2 + 3k^4), & k \leq 1 \\ \frac{1}{4\pi} \left[(8 - 8k^2 + 3k^4) \arcsin \frac{1}{k} + 3(2 - k^2) \sqrt{k^2 - 1} \right], & k > 1 \end{cases} \quad (3)$$

В [2], [3] предлагается при решении практических задач использовать аппроксимации функций (1–3) дробно-линейными функциями

$$\varphi(k) = \frac{A_0 + A_1k}{1 + Bk} \quad (4)$$

– аппроксимациями Паде [4], [5], имеющими те же значения функции и производной в нуле и предела функции в бесконечности.

1. Рассмотрим иной способ построения дробно-линейных приближений функций (1–3). При этом два коэффициента функции (4) найдем из используемых в [2], [3] условий равенства значений аппроксимирующей и аппроксимируемой функций при $k = 0$ и при $k \rightarrow \infty$. Значение третьего коэффициента определим, применив аппроксимацию функции в среднем [6, 7]. Потребуем, чтобы на некотором выбранном интервале $[k_1, k_2]$ при этой величине коэффициента достигался минимум интеграла U – среднего квадратического отклонения функции $\Phi(k)$ от $\varphi(k)$

$$U = \frac{1}{k_2 - k_1} \int_{k_1}^{k_2} [\Phi(k) - \varphi(k)]^2 dk \quad (5)$$

Пределы интегрирования k_1 и k_2 , выбираем, исходя из диапазона значений, в котором меняются скорости скольжения и верчения колеса в рассматриваемой задаче. Поиск минимума функции U осуществляется численно. Результаты вычислений, полученные ниже, приведены для значений $k_1 = 0, k_2 = 20$.

Определим коэффициенты дробно-линейной функции, аппроксимирующей $\Phi_x(k)$. Функция $\Phi_x(k)$ удовлетворяет условиям

$$\Phi_x(0) = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_x(k) = 1$$

с учетом которых функцию (4) запишем в виде

$$\varphi_x(k) = \frac{B_x k}{1 + B_x k} \quad (6)$$

Подставим функции (1) и (6) в (5). Значение коэффициента B_x , при котором интеграл (5) имеет минимум $\min U_x = 0.00215$, достигается при величине коэффициента $B_x^* = 4.52$.

При построении приближения функции $\Phi_y(k)$ дробно-линейной функцией считаем, что функция (4) удовлетворяет условиям

$$\varphi(0) = 1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_y(k) = 0,$$

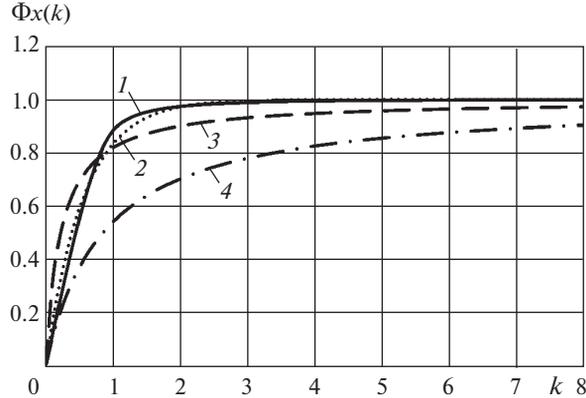


Рис. 1

которым удовлетворяет функция $\Phi_y(k)$. Аппроксимирующая функция имеет вид

$$\varphi_y(k) = \frac{1}{1 + B_y k} \tag{7}$$

Результат аппроксимации (2) функцией (7): интеграл (5) имеет минимум $\min U_y = 0.0021$ при значении коэффициента $B_y^* = 0.98$.

При аппроксимации функции $\Phi_z(k)$ функцией (4) с учетом условий

$$\Phi_z(0) = 1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_z(k) = 0$$

получим функцию вида

$$\varphi_z(k) = \frac{1}{1 + B_z k} \tag{8}$$

Минимум среднего квадратического отклонения функций (3) и (8) $\min U_z = 0.0023$ достигается при $B_z^* = 1.76$.

2. Рассмотрим результаты аппроксимаций в среднем выражений для проекций силы и момента силы сухого трения функциями $\phi(k)$, содержащими экспоненту. Как и ранее, при формировании среднего квадратического отклонения V аппроксимируемой функции от аппроксимирующей

$$V = \frac{1}{k_2 - k_1} \int_{k_1}^{k_2} [\Phi(k) - \phi(k)]^2 dk \tag{9}$$

значения пределов интегрирования $k_1 = 0, k_2 = 20$.

Функцию $\Phi_x(k)$ будем аппроксимировать в среднем функцией

$$\phi_x(k) = 1 - e^{-b_x k}$$

Интеграл (9) имеет минимум $\min V_x = 0.0023$ при $b_x^* = 1.792$.

Функцию, аппроксимирующую функции $\Phi_y(k)$, зададим в виде

$$\phi_y(k) = 1 - e^{-b_y/k} \tag{10}$$

В результате подстановки в (9) функций (2) и (10), получим функцию, имеющую минимум $\min V_y = 0.00036$ при $b_y^* = 0.833$.

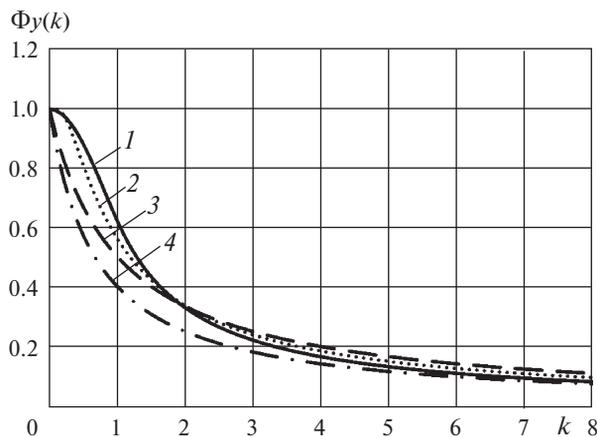


Рис. 2

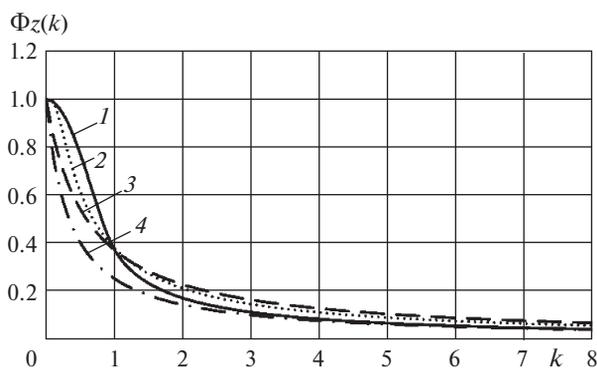


Рис. 3

Для аппроксимации функции $\Phi_z(k)$ выберем функцию

$$\phi_z(k) = 1 - e^{-b_z/k}$$

Минимум функции (9) $\min V_z = 0.00082$ достигается при $b_z^* = 0.477$.

3. На рис. 1 представлены: график зависимости $\Phi_x(k)$, график аппроксимации $\Phi_x(k)$ в среднем функцией $\phi_k(k)$, график аппроксимации в среднем дробно-линейной функций (6) и график аппроксимации дробно-линейной функцией Паде. Нумерация графиков соответствует порядку их перечисления.

Графики функций $\Phi_y(k)$, $\Phi_z(k)$ и графики таких же аппроксимаций этих функций представлены на рис. 2 и рис. 3 соответственно и имеют ту же нумерацию, что на рис. 1. Графики дробно-линейных приближений Паде функций $\Phi_x(k)$, $\Phi_y(k)$, $\Phi_z(k)$ построены соответственно для значений коэффициентов

$$B_x^{Pade} = \frac{3}{8}\pi \approx 1.178, \quad B_y^{Pade} = \frac{15}{32}\pi \approx 1.473, \quad B_z^{Pade} = \frac{15}{16}\pi \approx 2.945 \quad (11)$$

Интеграл (5) при подстановке в него функций 1 и 6, 2 и 7, 3 и 8 и соответствующего значения коэффициента из набора (11) принимает значения

$$U_x^{Pade} = 0.017, \quad U_y^{Pade} = 0.0045, \quad U_z^{Pade} = 0.0043.$$

Проведенное исследование показывает, что аппроксимации в среднем функций (1), (2), (3) дают лучшие приближения, чем аппроксимации дробно-линейными функциями с использованием разложений Паде, но требуют большего объема вычислений.

Авторы благодарят В.Ф. Журавлева за обсуждение постановки задачи.

Работа выполнена по госзаданию № АААА-А17-117021310382-5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Контенсу П.* Связь между трением скольжения и трением верчения и ее учет в теории волчка // Проблемы гироскопии. М.: Мир, 1967. С. 60–77.
2. *Журавлев В.Ф.* О модели сухого трения в задаче качения твердых тел // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 5. С. 762–767.
3. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Теория явления шимми // Изв. РАН. МТТ. 2010. № 3. С. 22–29.
4. *Андронов В.В., Журавлев В.Ф.* Сухое трение в задачах механики. М.: Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований. НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2010. 184 с.
5. *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1986. 502 с.
6. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 328 с.
7. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления. Для вузов. Т. 2. 1976. 576 с.