ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2019, № 3, с. 100–107

УДК 62-185.7

О ПОДХОДЕ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ТРЕНИЕМ В ОБЩЕМ ВИДЕ

А. Н. Брысин[a], А. Н. Никифоров[a,*]

[a] *Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия*

**e-mail: n.andre@mail.ru*

Поступила в редакцию 10.07.2018 г.
После доработки 10.07.2018 г.
Принята к публикации 19.11.2018 г.

Работа о приложении методов теории возмущений, приведения массы и теории сопротивления материалов к аналитическому решению задачи о зависимости собственных частот реального ротора от скорости вращения. Полученное приближенное решение сопоставляется с численным.

Ключевые слова: ротор, колебания, характеристическое уравнение, малый параметр

DOI: 10.1134/S0572329919030061

Различные задачи механики твердого тела по праву решаются все чаще численными методами. Их достоинства, в частности лидера по использованию – метода конечных элементов: универсальность (любая система по геометрии и физике), точность и качество конечных результатов (при необходимости в каждой точке системы), получение и/или выявление новых эффектов взаимодействия и переходных процессов. Тем не менее, их совокупный “минус” в математической непрозрачности системы и невозможности получения обозримого решения для быстрого и простого понимания сути происходящего относительно интересующего системного параметра. Отсюда попрежнему развиваются аналитические методы, в т.ч. для анализа динамики вращающегося тела.

Частоты вращения в машинах и механизмах редко когда превышают вторые собственные частоты роторов. Пусть реальный ротор сведен к безинерционному упругогистерезисному валу с массивным диском, т.е. к гироскопической системе с частотнонезависимым трением, характеристическое уравнение которой имеет вид [1]:

$$\begin{vmatrix} -m\Omega^2 + k_{11} + \mathrm{i}\eta k_{11} & k_{12} + \mathrm{i}\eta k_{12} \\ k_{21} + \mathrm{i}\eta k_{21} & -I\Omega^2 + I_0\omega\Omega + k_{22} + \mathrm{i}\eta k_{22} \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

где m – приведенная масса ротора, I – приведенный момент инерции ротора (относительно перпендикуляра к его оси в точке приведения), I_0 – полярный момент инерции ротора (вокруг его оси), k_{ij} – коэффициенты жесткости ротора в точке приведения, ω – скорость вращения, Ω или Ω_i – некоторая или i-я комплексная круговая частота собственных колебаний (прецессии) ротора, $\mathrm{Re}\Omega$ – угловая скорость прецессии, $\eta = \eta \times \mathrm{sgn}\dfrac{\mathrm{Re}\,\Omega - \omega}{|\mathrm{Re}\,\Omega - \omega|}$ – коэффициент гистерезисных потерь (упругой энергии).

В развернутой форме:

$$mI\Omega^4 - mI_0\omega\Omega^3 - (1+\mathrm{i}\eta)(mk_{22}+Ik_{11})\Omega^2 + (1+\mathrm{i}\eta)k_{11}I_0\omega\Omega + (1+\mathrm{i}\eta)^2(k_{11}k_{22}-k_{12}^2) = 0 \quad (2)$$

Данное уравнение дает две положительные и две отрицательные частоты:

$\Omega_{1,2} = L_{1,2} + iD_{1,2}, \Omega_{3,4} = -L_{3,4} - iD_{3,4}$, где D_i – точная диссипативная (пропорциональная η) добавка к точной круговой собственной частоте ротора L_i.

Положительные частоты собственных колебаний не что иное, как угловые скорости прямой затухающей собственной (невынужденной) прецессии ротора, отрицательные – соответствуют его обратной затухающей собственной прецессии.

Вычисление корней характеристического уравнения вращающейся системы с трением представляет собой нетривиальную задачу. Четвертая степень для алгебраических уравнений является наивысшей, при которой существует решение общего вида, т.е. для любых значений коэффициентов при Ω и свободного члена. В то же время члены, содержащие ω, делают аналитическое решение весьма громоздким. Для получения "обозримых" частот допустимо пренебречь явлениями, связанными с трением и вращением, т.е. диссипативными и гироскопическим.

Пусть Λ_i – i-й корень частотного уравнения вращающейся системы без трения:

$$mI\Lambda_i^4 - mI_0\omega\Lambda_i^3 - \left(mk_{22}+Ik_{11}\right)\Lambda_i^2 + k_{11}I_0\omega\Lambda_i + k_{11}k_{22} - k_{12}^2 = 0 \quad (3)$$

а λ_i – i-й корень уравнения частот невращающегося, недемпфированного ротора:

$$mI\lambda_i^4 - \left(mk_{22}+Ik_{11}\right)\lambda_i^2 + k_{11}k_{22} - k_{12}^2 = 0 \quad (4)$$

причем $\lambda_{3,4} = -\lambda_{1,2}$, $|\Lambda_3| < \lambda_1 < \Lambda_1$ и $|\Lambda_4| < \lambda_2 < \Lambda_2$.

Для пользования методом теории возмущений [2, 3] возможно представление:

$$\Lambda_i = \lambda_i + \Delta_{\omega i}$$

где $\Delta_{\omega i}$ – некоторая гироскопическая добавка (пропорциональная ω) к точной круговой собственной частоте невращающегося ротора λ_i, или:

$$\Lambda_i = \lambda_i(1+\varepsilon_{\omega i}), \text{ где } \varepsilon_{\omega i} = \Delta_{\omega i}/\lambda_i.$$

Вследствие малости $\varepsilon_{\omega i}$ допустимы приближения:

$$\Lambda_i^2 \approx \lambda_i^2(1+2\varepsilon_{\omega i}), \quad \Lambda_i^3 \approx \lambda_i^3(1+3\varepsilon_{\omega i}), \quad \Lambda_i^4 \approx \lambda_i^4(1+4\varepsilon_{\omega i})$$

Вставляя эти равенства в (3), приравнивая к нулю сумму членов, содержащих $\varepsilon_{\omega i}$ и ω, а также сумму оставшихся членов, можно получить порождающее уравнение (4) и малую гироскопическую добавку к λ_i:

$$\varepsilon_{\omega i} = I_0\omega\lambda_i \frac{m\lambda_i^2 - k_{11}}{4mI\lambda_i^4 - 3mI_0\omega\lambda_i^3 - 2\left(mk_{22}+Ik_{11}\right)\lambda_i^2 + k_{11}I_0\omega\lambda_i} \quad (5)$$

По аналогии:

$$\Omega_i \approx \Lambda_i + \mathrm{i}\Delta_i,$$

$$\Omega_i \approx \Lambda_i(1+\mathrm{i}\varepsilon_{\eta i}), \quad \Omega_i^2 \approx \Lambda_i^2(1+\mathrm{i}2\varepsilon_{\eta i}), \quad \Omega_i^3 \approx \Lambda_i^3(1+\mathrm{i}3\varepsilon_{\eta i}), \quad \Omega_i^4 \approx \Lambda_i^4(1+\mathrm{i}4\varepsilon_{\eta i})$$

Здесь и далее Λ_i – приближенная круговая собственная частота вращающегося ротора с трением, Δ_i и $\varepsilon_{\eta i} = \Delta_i/\Lambda_i$ – приближенная и малая диссипативные добавки к ней.

Таблица 1.

Данные экспериментальной роторной системы	Обозначение и значение
Диаметр вала	8 мм
Длина вала	$l = 645$ мм
Погонная масса вала	$m_0 = 0.4$ кг/м
Изгибная жесткость вала	$EJ = 40$ Нм^2
Радиус диска	$R = 42$ мм
Масса диска	$m_1 = 270$ г
Осевой момент инерции диска	$I_0 = 2.38 \cdot 10^{-4}$ кгм^2
Расстояние между защемленным концом и диском	$l_1 = 1/4l$

Подставляя эти выражения в характеристическое уравнение (1), отбрасывая члены, содержащие квадраты малых величин и разделяя действительную и мнимую части, можно выразить малую диссипативную добавку:

$$\varepsilon_{\eta i} = \eta \frac{(mk_{22} + Ik_{11})\Lambda_i^2 - k_{11}I_0\omega\Lambda_i - 2(k_{11}k_{22} - k_{12}^2)}{4mI\Lambda_i^4 - 3mI_0\omega\Lambda_i^3 - 2\left(mk_{22} + Ik_{11}\right)\Lambda_i^2 + k_{11}I_0\omega\Lambda_i} \tag{6}$$

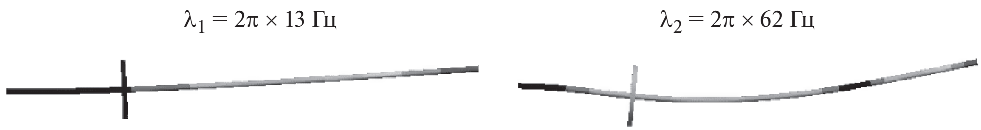
На числовых примерах можно убедиться, что входящая в формулу (5) дробь всегда положительна, в т.ч. при отрицательных λ_i и значениях $\omega > \lambda_2$, а дробь формулы (6) положительна, пока ω не превышает некоторого достаточно значительного предела. В результате знак $\varepsilon_{\omega i}$ зависит только от знака λ_i, поэтому произведение $\varepsilon_{\omega i}\lambda_i$ неизменно положительно, а знак $\varepsilon_{\eta i}$ фактически – от знака η, по которому может быть сделан вывод об устойчивости (о затухании или нарастании) собственной прецессии ротора. Прямая – устойчива, пока $\eta > 0$, т.е. затухает, пока $\omega < \mathrm{Re}\Omega$. Обратная – устойчива, если $\eta < 0$, т.е. затухает при любой скорости вращения.

Искомые комплексные собственные частоты ротора:

$$\Omega_1 \approx \lambda_1(1 + \varepsilon_{\omega 1})(1 + i\varepsilon_{\eta 1}), \quad \Omega_2 \approx \lambda_2(1 + \varepsilon_{\omega 2})(1 + i\varepsilon_{\eta 2}),$$
$$\Omega_3 \approx \lambda_3(1 + \varepsilon_{\omega 3})(1 + i\varepsilon_{\eta 3}), \quad \Omega_4 \approx \lambda_4(1 + \varepsilon_{\omega 4})(1 + i\varepsilon_{\eta 4})$$

Погрешность предложенного аналитического решения задачи о зависимости частот собственных колебаний гироскопической системы с трением от скорости вращения оценена графически на примере материализованного вала с диском (табл. 1).

Результаты модального анализа невращающегося опытного ротора в зависимости от условий опирания на одном из концов вала иллюстрируют фиг. 1 и фиг. 2. Первая иллюстрация охватывает две низшие частоты и формы собственных колебаний консольного ротора (с защемленным и свободным концами), а вторая – две низшие собственные частоты и формы ротора с опорами на концах (с защемленным и свободно опертым концами).



Фиг. 1

Фиг. 2

Приведенные инерционно-упругие характеристики экспериментальной системы (для точки симметрии диска) получены с использованием методов конечных элементов, а именно в программе Ansys [4, 5], приведения массы [6, 7] и теории сопротивления материалов [7–9].

Как известно, коэффициенты жесткости балки с закрепленным и свободным концами на расстоянии l_1 от конца-заделки:

$$k_{11} = \frac{12EJ}{l_1^3}, \quad k_{12} = k_{21} = -\frac{6EJ}{l_1^2}, \quad k_{22} = \frac{4EJ}{l_1}, \quad K_{11} = k_{11} - \frac{k_{12}^2}{k_{22}} = \frac{3EJ}{l_1^3}$$

Значения k_{ij} для опытного консольного ротора (таблица, фиг. 1):

$$k_{11} = 11.51 \cdot 10^4 \text{Н/м}, \quad k_{12} = k_{21} = -9.28 \cdot 10^3 \text{Н}, \quad k_{22} = 10^3 \text{Нм}, \quad K_{11} = 2.88 \cdot 10^4 \text{Н/м} \quad (7)$$

Вместе с тем в одноименном методе исходят из того, что приведенная масса – это такая сосредоточенная масса, которая, двигаясь со скоростью центра приведения, имеет такую же кинетическую энергию W, какой обладают все движущиеся массы системы:

$$W = \int \frac{v_{\mathrm{d}m}^2 \mathrm{d}m}{2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2}$$

где интеграл распространен на всю распределенную массу системы, $v_{\mathrm{d}m}$ – скорость элемента $\mathrm{d}m$ распределенной массы, v_i – скорость i-й сосредоточенной массы m_i системы.

Этому тождеству умножением и делением правой его части на общую массу M системы, а также на квадрат скорости v_0 заранее выбранной в ней точки (приведения) придают вид:

$$W = \frac{\varkappa M v_0^2}{2}, \quad \text{где} \quad \varkappa = \frac{1}{M}\left[\int \left(\frac{v_{\mathrm{d}m}}{v_0}\right)^2 \mathrm{d}m + \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{v_i}{v_0}\right)^2\right]$$

Произведение $\varkappa M = m$ называют приведенной массой, а безразмерную величину $\varkappa$ – коэффициентом приведения массы. Отношение скоростей равно отношению перемещений точек системы при движении, поэтому:

$$m = \int \left(\frac{x_{\mathrm{d}m}}{x_0}\right)^2 \mathrm{d}m + \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{x_i}{x_0}\right)^2$$

В приложении к роторной системе $\mathrm{d}m = m_0 dz$, где dz – элемент длины l вала:

$$m = m_0 \int_0^l \left(\frac{x(z)}{x_0}\right)^2 dz + \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{x_i}{x_0}\right)^2$$

Так как $x(z)$ это функция, описывающая вид осевой линии ротора при его колебаниях по собственной форме, x_0 – значение функции $x(z)$ в точке приведения, x_i – значение функции $x(z)$ в центре прикрепления i-го диска, то в качестве функции $x(z)$ может быть выбрано уравнение упругой линии балки (вала) со статически приложенной к ней (к нему) в точке приведения силой.

Согласно теории сопротивления материалов прогибы консольной балки при действии сосредоточенной поперечной силы F_x на расстоянии l_1 от заделанного конца:

$$x(z) = \frac{F_x}{6EJ}(3l_1 z^2 - z^3) \quad \text{при} \quad z \le l_1, \quad x(z) = \frac{F_x}{6EJ}(3l_1^2 z - l_1^3) \quad \text{при} \quad z \ge l_1$$

Если распределенная и сосредоточенная массы консольного ротора приводятся к точке $z = l_1$, т.е. к точке симметрии насаженного на вал диска, то: $x_0 = x_1 = \dfrac{F_x l_1^3}{3EJ}$ и

$$m = m_0 \int_0^{l_1} \left(\frac{3l_1 z^2 - z^3}{2l_1^3}\right)^2 \mathrm{d}z + m_0 \int_{l_1}^{l} \left(\frac{3l_1^2 z - l_1^3}{2l_1^3}\right)^2 \mathrm{d}z + m_1$$

или

$$m = \frac{33}{140} m_0 l_1 + \left[\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{l}{l_1}\right)^2\right] m_0 l_2 + m_1$$

где $l_2 = l - l_1$.

Приведенный поперечный момент инерции ротора (относительно перпендикуляра к его оси в точке приведения) может быть выражен из порождающего уравнения (4):

$$I = \frac{k_{22}}{\lambda_2^2} \frac{\lambda_2^2 - K_{11}/m}{\lambda_2^2 - k_{11}/m}.$$

Соответствующие значения для экспериментального консольного ротора (табл. 1, фиг. 1):

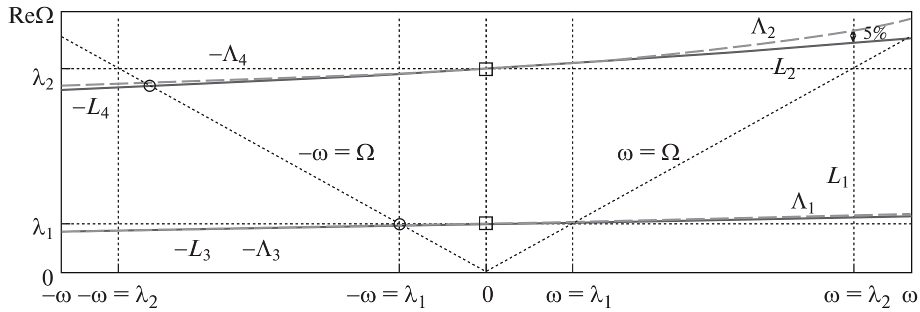
$$m = 2.62 \text{ кг}, \quad I = 86 \cdot 10^{-4} \text{ кгм}^2 \tag{8}$$

Коэффициент демпфирования η для экспериментального консольного (η) и опертого ($\tilde{\eta}$) на статор обоими концами вала с диском найден опытным путем – измерением затухающих собственных колебаний ротора в результате ударного их возбуждения с последующим определением логарифмического их декремента:

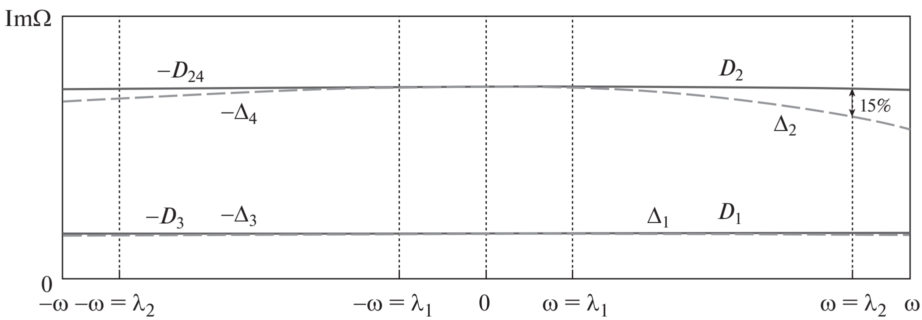
$$d = \frac{1}{n} \ln \frac{A_i}{A_{i+n}}, \quad \eta = d/\pi,$$

где A_i – амплитуда i-го колебания, A_{i+n} – амплитуда $i + n$-го колебания, n – общее число отслеженных колебаний.

Для минимизации влияния на результаты опытов случайных ошибок и факторов ударное испытание “каждого” ротора проводилось четыре раза. За окончательные



Фиг. 3



Фиг. 4

значения η и $\tilde{\eta}$ принимались средние арифметические, вычисленные после всех испытаний:

$$\eta = 0.029, \quad \tilde{\eta} = 0.032 \tag{9}$$

По данным (7–9) определены как точные $\Omega_i = L_i + iD_i$ непосредственно из (1), так и приближенные $\Omega_i = \Lambda_i + i\Delta_i$, где $\Lambda_i = \lambda_i(1 + \varepsilon_{\omega i})$, $\Delta_i = \varepsilon_{\eta i}\Lambda_i$, с помощью (3), (4). Различие значений по действительной части получилось менее 2%, по мнимой – менее 5%. Сопоставимая с погрешностями аналитического округления точность, конечно, во многом обусловлена отношением I_0/I, много меньшим единицы.

Приняв за приемлемую точность 5%-е несовпадение Λ_i с L_i и 15%-е несовпадение Δ_i с D_i при скоростях вращения ω вплоть до второй критической частоты невращающегося ротора λ_2, установлен предел применимости разработанного подхода, т.е. предельное значение для показателя гироскопического действия в случае консольной роторной системы:

$$I_0/I \approx 0.05$$

По (7–9) и при $I_0 = 4 \cdot 10^{-4}$ кгм^2 построены зависимости $L_i(\omega)$, $\Lambda_i(\omega)$ и $D_i(\omega)$, $\Delta_i(\omega)$, представленные на фиг. 3 и фиг. 4. Ввиду кососимметричного расположения кривых используется не правая полуплоскость с осью абсцисс ω (диаграмма Кэмпбелла), а верхняя полуплоскость с осью абсцисс от $-\omega$ до $+\omega$ (отвечающая положительным значениям Ω), что несколько удобнее. Сплошными кривыми показаны точные, а пунктирными – приближенные вещественные и мнимые части круговых собственных частот экспериментального консольного ротора. Также посредством обозначений "□" и "○" указаны критические частоты соответственно невращающегося ротора и в случае его обратной прецессии.

Как видно, все частоты и их мнимые составляющие хорошо согласуются, пока скорость вращения ω локализуется в окрестности первой критической частоты невращающегося ротора λ_1. Это вполне ожидаемо от "первого приближения". В то же время нетривиально, что и когда ω близка к λ_2, лишь действительная и мнимая части второй точной частоты прямой прецессии (L_2 и D_2) существенно расходятся с соответствующими компонентами приближенной (Λ_2 и Δ_2).

Когда вал с дисками имеет опоры в концевых сечениях, влияние гироскопических моментов дисков на амплитудно-частотную характеристику обычно оказывается слабее, чем в случае консольного ротора. Данный факт должен сопровождаться расширением пределов применимости разработанного подхода в приложении к роторным системам без консольных свесов. Однако в случае ухода от схем с консольными вылетами низшие собственные частоты роторов обычно повышаются, и при близких к ним скоростях вращения гироскопические члены (с множителем $I_0\omega$) будут больше, а пределы применимости – уже. Для понимания результирующей тенденции на практике, выполнен соответствующий расчет.

В работе [9] показано, что коэффициенты жесткости невращающегося вала с защемленным и свободно опертым концами на расстоянии l_1 от защемленного конца:

$$\tilde{k}_{11} = 3EJ\frac{l_1^3 + 4l_2^3}{l_1^3 l_2^3}, \quad \tilde{k}_{12} = \tilde{k}_{21} = -3EJ\frac{2l_2^2 - l_1^2}{l_1^2 l_2^2}, \quad \tilde{k}_{22} = EJ\frac{3l + l_2}{l_1 l_2}, \quad \tilde{K}_{11} = \frac{12EJl^3}{l_1^3 l_2^2(3l + l_2)}$$

а его прогибы при действии сосредоточенной поперечной силы F_x в этом же месте:

$$x(z) = \frac{R_\text{A}}{6EJ}z^3 - \frac{M_\text{A}}{2EJ}z^2 \quad \text{при} \quad z \le l_1,$$

$$x(z) = \frac{R_\text{A}}{6EJ}z^3 - \frac{M_\text{A}}{2EJ}z^2 + \frac{F_x}{6EJ}(z - l_1)^3 \quad \text{при} \quad z \ge l_1$$

где $R_\text{A} = F_x\dfrac{3l_1^2 l - l_1^3 - 2l^3}{2l^3}$, $M_\text{A} = F_x\dfrac{3l_1^2 l - l_1^3 - 2l_1 l^2}{2l^2}$ – реакции "опоры-заделки".

В случае приведения роторных масс к точке $z = l_1$:

$$x_0 = x_1 = \frac{F_x l_1^3 l_2^2(3l + l_2)}{12EJl^3}$$

Величина приведенной массы ротора с защемленным и свободно опертым концами определяется по формуле:

$$\tilde{m} = m_0\int_0^{l_1}\left(\frac{(l_2^3 - 3l^2 l_2)z^3 + 3ll_2(l^2 - l_2^2)z^2}{l_1^3 l_2^2(3l + l_2)}\right)^2 dz +$$

$$+ m_0\int_{l_1}^{l}\left(\frac{(l_2^3 - 3l^2 l_2)z^3 + 3ll_2(l^2 - l_2^2)z^2 + 2l^3(z - l_1)^3}{l_1^3 l_2^2(3l + l_2)}\right)^2 dz + m_1$$

Интегрируя и переписывая соответствующим образом формулу для приведенного поперечного момента инерции, получится:

$$\tilde{m} = \frac{m_0 l^3(24l^4 - 24l^3 l_1 - 4l^2 l_1^2 + 8ll_1^3 - l_1^4)}{35l_1^2(4l^2 - 5ll_1 + l_1^2)^2} + m_1, \quad \tilde{I} = \frac{\tilde{k}_{22}}{\tilde{\lambda}_2^2}\frac{\tilde{\lambda}_2^2 - \tilde{K}_{11}/\tilde{m}}{\tilde{\lambda}_2^2 - \tilde{k}_{11}/\tilde{m}}$$

При рассматриваемых условиях опирания концов экспериментального ротора на статор (табл. 1, фиг. 2) значения его приведенных характеристик:

$$\begin{gathered}\tilde{k}_{11} = 11.62 \cdot 10^4 \text{ Н/м}, \quad \tilde{k}_{12} = \tilde{k}_{21} = -8.76 \cdot 10^3 \text{ Н}, \quad \tilde{k}_{22} = 1.25 \cdot 10^3 \text{ Нм}, \\ \tilde{K}_{11} = 5.46 \cdot 10^4 \text{ Н/м}, \quad \tilde{m} = 0.53 \text{ кг}, \quad \tilde{I} = 26 \cdot 10^{-4} \text{ кгм}^2\end{gathered} \tag{10}$$

В то же время условия опирания не влияют на осевой момент инерции ротора I_0 и практически не сказываются на коэффициенте трения $\eta \approx \tilde{\eta} \approx 0.03$.

Отвечающие параметрам (10), точные и приближенные комплексные частоты Ω показали, что расхождение между L_i и Λ_i менее чем на 5%, а также между D_i и Δ_i менее чем на 15% в диапазоне $0 < \omega < \tilde{\lambda}_2$ будет, если “гироскопическое число”:

$$I_0 / \tilde{I} < 0.05$$

Таким образом, в случае переноса больших инерционных масс с консоли в пролет между опорами и наоборот, ни первая тенденция, связанная с уменьшением гироскопических моментов и получением увеличившихся собственных частот и гироскопических членов, ни вторая (противоположная), обусловленная бóльшими гироскопическими моментами и меньшими собственными частотами и гироскопическими членами, не является превалирующей, т.е. вкупе предел применимости предлагаемого подхода для роторов без консолей такой же, как для валов с консольным расположением дисков.

В общем можно заключить, что представлен полностью аналитический подход с его возможностями по отысканию собственных частот гироскопической системы с трением. Полученные приближенные зависимости частот от скорости вращения удовлетворительно согласуются с точными. Особенно хорошо определяются критические скорости обратной прецессии (погрешность не превысит 5% пока гироскопическое число меньше 0.09). Все это выгодно использовать, например, в задаче обкатки ротором статора.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках Федеральной целевой программы “Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014–2020 годы”, Соглашение о предоставлении субсидии № 14.607.21.0191 от 26.09.2017 г., проект RFMEFI60717X0191.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Крестниковский К.В., Никифоров А.Н.* Частота обкатки ротором статора в зависимости от зазоров между ними (часть I: статическая сторона задачи) // Приводы и компоненты машин. 2017. № 3–4. С. 12–16.
2. *Nayfeh Ali H.* Perturbation Methods. NY: Wiley, 1973. 425 p. = *Найфэ А.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.
3. *Маслов В.П.* Асимптотические методы и теория возмущений. М.: Наука, 1988. 312 с.
4. *Moaveni S.* Finite Element Analysis: Theory and Application with ANSYS. Pearson Education. 3rd Edition, 2008. 868 p.
5. *Огородникова О.М.* Расчет конструкций в ANSYS. Сборник учебных материалов. Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2009. 454 с.
6. *Шиманский Ю.А.* Динамический расчет судовых конструкций. Л.: Судпромгиз, 1963. 444 с.
7. *Заславский Б.В.* Краткий курс сопротивления материалов. Учебник для авиационных специальностей вузов. М.: Машиностроение, 1986. 328 с.
8. *Биргер И.А., Мавлютов Р.Р.* Сопротивление материалов: Учебное пособие. М.: Наука, 1986. 560 с.
9. *Феодосьев В.И.* Сопротивление материалов. М.: Наука, 1970. 544 с.