

УДК 531

## АВТОКОЛЕБАНИЯ ПРИ ЗАПАЗДЫВАНИИ И ОГРАНИЧЕННОЙ МОЩНОСТИ ИСТОЧНИКА ЭНЕРГИИ

© 2019 г. А. А. Алифов

*Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия*  
*e-mail: a.alifov@yandex.ru*

Поступила в редакцию 05.04.2018 г.  
После доработки 05.04.2018 г.  
Принята к публикации 19.11.2018 г.

Рассматриваются смешанные автоколебания, вынужденные и параметрические колебания при нелинейной силе трения с запаздывающим аргументом и источнике энергии ограниченной мощности. Методом усреднения выведены уравнения нестационарных и стационарных движений. С использованием критериев Рауса–Гурвица получены условия устойчивости стационарных движений. Выполнены расчеты для получения информации об амплитудно-частотно-скоростной зависимости и устойчивости колебаний при действии запаздывания и наличии ограниченной мощности источника энергии.

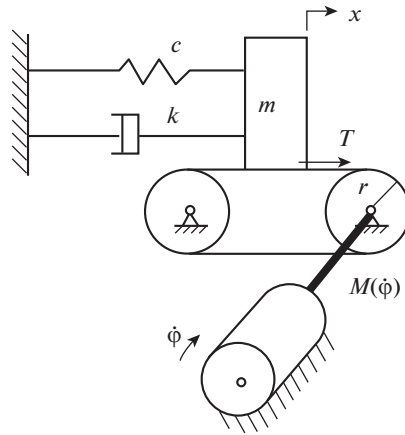
*Ключевые слова:* смешанные колебания, автоколебания, вынужденные колебания, параметрические колебания, запаздывание, ограниченная мощность, источник энергии

DOI: 10.1134/S0572329919030024

**1. Введение.** Системы с запаздыванием широко распространены в радиотехнике, устройствах автоматического управления, электронике и др. Обусловленные запаздыванием колебательные явления возникают в вибрационных машинах, регуляторах, транспортных системах (ленточные транспортеры и др.), электро- и пневмосистемах, прокатных станах, следящих системах и т.д. Эти колебания могут быть как вредными, так и полезными. В последнем случае запаздывание вводится специально, например, в системе ультразвукового станка.

Для математического описания систем с запаздыванием используются, чаще всего, нелинейные дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. Так как решение таких уравнений сопряжено большими трудностями, то при этом выделяется класс квазилинейных систем, изучение которых проводится с помощью приближенных методов. Среди них широко используется математически хорошо обоснованный асимптотический метод теории нелинейных колебаний [1, 2].

Изучению колебательных систем с запаздыванием и идеальным источником энергии посвящено достаточно много работ, чего нельзя сказать о случае систем с неидеальным источником или ограниченным возбуждением. Систематическая теория систем с неидеальными источниками энергии изложена впервые в работе В.О. Кононенко [3]. Дальнейшее развитие эта теория получила в целом ряде работ, отраженных, в частности, в [4, 5]. Системы с запаздыванием и неидеальным источником энергии рассматривались в небольшом числе работ [4–10] и др. В одних работах из приведенного списка запаздывание присутствует в силе упругости, а в других – зависящей от



Фиг. 1

скорости силе трения. Действие вызывающей автоколебания силы трения на динамику систем рассмотрены в достаточно большом числе работ, в том числе в [3–18]. Изученная в [3–5, 10–15] модель фрикционной автоколебательной системы, взаимодействующей с источником энергии ограниченной мощности, положена в основу работ [7–9], в которых запаздывание присутствует в силе трения, вызывающей автоколебания. В этих работах, в случае запаздывающей силы трения и ограниченной мощности источника энергии рассмотрены, помимо автоколебаний, по отмеченной в [4, 5] классификации типов и смешанных колебаний взаимодействие “вынужденных колебаний и автоколебаний”, “параметрических колебаний и автоколебаний”. В продолжение [7–9] ниже рассмотрим более сложный случай, т.е. смешанные вынужденные, параметрические и автоколебания.

**2. Модель системы.** Примем, что возбуждающая автоколебания сила трения зависит от запаздывания постоянной величины. А также автоколебания возможны в случае отсутствия последнего. Динамическая модель такой автоколебательной системы с ограниченным возбуждением от двигателя с суммарной (включающей движущий момент и момент сил сопротивления) моментной характеристикой  $M(\phi)$ , представлена на фиг. 1, где  $\phi$  – скорость вращения ротора двигателя.

Уравнения движения системы с учетом внешних воздействий (вынуждающего  $\lambda \sin vt$  и параметрического  $(c + b \cos pt)x$ ) имеют вид

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + (c + b \cos pt)x &= \lambda \sin vt + T(U_\tau) - k\dot{x} - f(x), \\ I\ddot{\phi} &= M(\phi) - rT(U_\tau) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь  $m, c, b, p, \lambda, v, V, k, I, r$  – постоянные величины, а сила трения  $T(U_\tau)$  зависит от относительной скорости  $U_\tau = V - \dot{x}_\tau$ ,  $\dot{x}_\tau = \dot{x}(t - \tau)$ , где  $\tau$  – постоянный временной фактор запаздывания,  $V = r\dot{\phi}$ ,  $f(x)$  – нелинейная часть силы упругости.

Выражение силы трения имеет вид

$$T(U_\tau) = q(\operatorname{sgn} U_\tau - \alpha_1 U_\tau + \alpha_3 U_\tau^3)$$

Здесь  $q, \alpha_1, \alpha_3$  – положительные постоянные,  $\operatorname{sgn} U_\tau = 1$  при  $V > \dot{x}_\tau$  и  $\operatorname{sgn} U_\tau = -1$  при  $V < \dot{x}_\tau$ . Следует отметить, что представление силы трения в таком виде отражает наиболее распространенную падающую характеристику коэффициента трения от ско-

рости скольжения, которая наблюдалась также при рассмотрении проблемы измерения сил трения в условиях космического эксперимента на орбите [18].

Прежде чем перейти к построению решений (2.1) отметим следующее. Как показано в [4, 5], в случае, когда система находится под внешним и параметрическим воздействием, в ней могут возникнуть много сложных процессов. Для отражения резонансных (захватываемых) колебаний, обусловленных одновременным выполнением определенных соотношений между частотой автоколебаний и частотами обоих воздействий, в [4, 5] обоснованно введено “условие синхронности резонансных частот внешнего и параметрического воздействий” или кратко “условие синхронности”. В соответствии с этим условием  $\nu = jp$ , где  $j = s_1 n_2 / s_2 n_1$ ,  $s_1, s_2, n_1, n_2$  – взаимно простые, целые (небольшие) числа. Поскольку на практике главный интерес представляют основные резонансы ( $\omega \approx p/2$ ,  $\omega \approx \nu$ ) от влияния обоих воздействий, то примем условие синхронности  $j = 1/2$ .

**3. Решения уравнений.** Для построения решений (2.1) используем метод усреднения нелинейной механики [2]. С этой целью примем следующие предположения: силы в правой части (2.1) и запаздывание малы; скорость двигателя изменяется мало за период колебаний. На этой основе вводим в уравнения (2.1) малый параметр  $\varepsilon$ , который впоследствии примем равным единице, и имеем

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon F_1(pt, x, \dot{x}, \dot{x}_\tau, \dot{\phi}), \quad \ddot{\phi} = \varepsilon F_2(\dot{\phi}, \dot{x}_\tau), \quad (3.1)$$

$$F_1(pt, x, \dot{x}, \dot{x}_\tau, \dot{\phi}) = m^{-1}[-bx \cos pt + \lambda \sin jpt + T(U_\tau) - k\dot{x} - f(x)]$$

$$F_2(\dot{\phi}, \dot{x}_\tau) = I^{-1}[M(\dot{\phi}) - rT(U_\tau)], \quad \omega^2 = c/m$$

Искомые решения (3.1) представим в виде

$$x = a \cos \psi, \quad \dot{\phi} = \Omega, \quad \psi = 0.5pt + \xi \quad (3.2)$$

где  $a, \xi$  и  $\Omega$  – медленно изменяющиеся амплитуда, фаза и скорость.

Введя переменную  $u = r\Omega$ , рассмотрим два принципиально различных случая:  $u \geq a\omega$  и  $u < a\omega$ . С учетом того, что в области резонанса  $\omega \approx 0.5p$  (расстройка частот мала) получим из (3.1) на основе (3.2) усредненные уравнения нестационарных движений:

а)  $u \geq a\omega$

$$\frac{du}{dt} = \frac{r}{I} \left[ M\left(\frac{u}{r}\right) - rT(u) - \frac{3}{2} r\alpha_3 q u \omega^2 a^2 \right] \quad (3.3)$$

$$\frac{da}{dt} = -\frac{a}{2m} [G(a, u) \cos \omega\tau + k] - \frac{2\lambda}{m(p + 2\omega)} \cos \xi + \frac{ab}{2mp} \sin 2\xi$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \omega - \frac{p}{2} + \frac{\beta(a)}{\omega ma} + \frac{1}{2m} G(a, u) \sin \omega\tau + \frac{2\lambda}{ma(p + 2\omega)} \sin \xi + \frac{b}{2mp} \cos 2\xi$$

б)  $u < a\omega$

$$\frac{du}{dt} = \frac{r}{I} \left[ M\left(\frac{u}{r}\right) - rT(u) - \frac{3}{2} r\alpha_3 q u \omega^2 a^2 - \frac{rq}{\pi} (3\pi - 2\psi_*) \right] \quad (3.4)$$

$$\frac{da}{dt} = -\frac{a}{2m} \left[ G(a, u) \cos \omega\tau + k + \frac{4q}{\pi a^2 \omega^2} \sqrt{a^2 \omega^2 - u^2} \right] - \frac{2\lambda}{m(p + 2\omega)} \cos \xi + \frac{ab}{2mp} \sin 2\xi$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \omega - \frac{p}{2} + \frac{\beta(a)}{\omega ma} + \frac{1}{2m} G(a, u) \sin \omega\tau + \frac{2\lambda}{ma(p + 2\omega)} \sin \xi + \frac{b}{2mp} \cos 2\xi$$

где  $\psi_* = 2\pi - \arcsin(u/a\omega)$ ,  $G(a, u) = \frac{3\alpha_3 q}{4} [a^2 \omega^2 - H(u)]$ ,  $H(u) = 4(u_0^2 - u^2)$ ,

$$u_0^2 = \frac{\alpha_1}{3\alpha_3}, \quad \beta(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi) \cos \psi d\psi$$

В ряде практических случаев часто представляет интерес смещение центра колебаний  $x_0$ , с учетом которого имеем  $x = x_0 + a \cos \psi$ . Это смещение определяется из выражения

$$x_0 = \frac{1}{\omega^2 m} \left[ T(u) + \frac{3}{2} \alpha_3 q u a^2 \omega^2 - G_0(a) \right]$$

$$\text{где } G_0(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi) d\psi$$

Из выражений  $\beta(a)$  и  $G_0(a)$  видно влияние силы упругости  $f(x)$  на них: при четной функции  $f(x)$  имеем  $\beta(a) \equiv 0$ ,  $G_0(a) \neq 0$ , а нечетной –  $\beta(a) \neq 0$ ,  $G_0(a) \equiv 0$ . Если, например,  $f(x) = \gamma_3 x^3 + \gamma_5 x^5$ , то  $\beta(a) = \frac{a^3}{8} \left( 3\gamma_3 + \frac{5\gamma_5 a^2}{2} \right)$ ,  $G_0(a) \equiv 0$ .

Из уравнений (3.3) и (3.4) при условиях  $\dot{a} = 0$ ,  $\dot{\xi} = 0$ ,  $\dot{u} = 0$  получим уравнения стационарных движений. Решения этих уравнений позволяют найти для стационарных движений амплитуду  $a$  и скорость  $u$ , которые являются наиболее важными на практике (фаза колебаний в большинстве случаев не представляет интереса).

При  $u \geq a\omega$  для определения амплитуды и фазы имеем выражения

$$B_1^2 - (1 - R^2)(2aB_3R - B_2)^2 = 0, \quad (3.5)$$

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{R(2aRB_3 - B_2)}{B_1}$$

где  $B_1 = B_1(a, u, \tau) = \frac{a}{2m} [G(a, u) \cos \omega \tau + k]$ ,  $B_2 = B_2(p) = \frac{2\lambda}{m(p + 2\omega)}$ ,  $B_3 = B_3(p) = \frac{b}{2mp}$ ,

$$B_4 = B_4(p, a, u, \tau) = \omega - \frac{p}{2} + \frac{\beta(a)}{\omega m a} + \frac{1}{2m} G(a, u) \sin \omega \tau, \quad R = \frac{B_2 \pm \sqrt{B_2^2 + 8a^2 B_3 (B_3 + B_4)}}{4aB_3}.$$

В случае  $u < a\omega$  амплитуда стационарных колебаний практически не зависит от частоты и определяется приближенным выражением  $a\omega \approx u$ . Зависимость амплитуды колебаний от скорости источника энергии и частоты внешних воздействий представляет собою поверхность. Сечения этой поверхности  $a(u, p)$  показаны, в частности, ниже в п. 5.

Из условия  $\dot{u} = 0$  имеем для  $u \geq a\omega$  и  $u < a\omega$  уравнение общего вида

$$M\left(\frac{u}{r}\right) - S(u, p_\Phi) = 0 \quad (3.6)$$

в котором

$$\text{а) } u \geq a\omega, \quad S_+(u, p_\Phi) = rT(u) + \frac{3}{2} r\alpha_3 q u \omega^2 a^2;$$

$$\text{б) } u < a\omega, \quad S_-(u, p_\Phi) = rT(u) + \frac{3}{2} r\alpha_3 q u \omega^2 a^2 + \frac{r q}{\pi} (3\pi - 2\psi_*).$$

В случае  $u < a\omega$ , с учетом приближенного равенства  $a\omega \approx u$  для стационарной амплитуды, выражение  $S(u, p_\Phi)$  принимает простую, зависящую только от  $u$ , форму

$$S_-(u) \approx rT(u) + \frac{3}{2}r\alpha_3qu^3$$

Функция  $S(u, p_\Phi)$  представляет нагрузку на источник энергии и пересечение ее кривой с кривой  $M(u/r)$  определяет стационарные значения скорости  $u$ . График кривой  $S(u, p_\Phi)$  строится на основе вычисленных стационарных значений амплитуды. Необходимо теперь определить условия устойчивости стационарных движений.

**4. Устойчивость стационарных решений.** Для определения устойчивости стационарных движений составляем уравнения в вариациях и пользуемся критериями Рауса–Гурвица. Полученные таким путем критерии устойчивости имеют вид:

$$D_1 > 0, \quad D_3 > 0, \quad D_1D_2 - D_3 > 0 \quad (4.1)$$

$$D_1 = -(b_{11} + b_{22} + b_{33}), \quad D_2 = b_{11}b_{33} + b_{11}b_{22} + b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21} - b_{13}b_{31}$$

$$D_3 = b_{11}b_{23}b_{32} + b_{12}b_{21}b_{33} + b_{13}b_{31}b_{22} - b_{11}b_{22}b_{33} - b_{12}b_{23}b_{31} - b_{13}b_{21}b_{32}$$

Коэффициенты  $b_{is}$  ( $i, s = 1, 2, 3$ ) определяются при  $u \geq a\omega$  выражениями

$$b_{11} = \frac{r}{I} \left[ N - rq(3\alpha_3u^2 - \alpha_1) - \frac{3}{2}r\alpha_3q\omega^2a^2 \right], \quad b_{12} = -\frac{3}{I}\alpha_3qua\omega^2r^2, \quad b_{13} = 0,$$

$$b_{21} = -\frac{3}{m}\alpha_3qua \cos \omega\tau, \quad b_{22} = \frac{1}{2m} \left\{ \frac{b}{p} \sin 2\xi - k - \left[ G(a, u) + \frac{3}{2}\alpha_3qa^2\omega^2 \right] \cos \omega\tau \right\}$$

$$b_{23} = \frac{2\lambda}{m(p+2\omega)} \sin \xi + \frac{ab}{mp} \cos 2\xi, \quad b_{31} = \frac{3}{m}\alpha_3qu \sin \omega\tau$$

$$b_{32} = \frac{1}{4\omega ma^2} \left\{ 3\alpha_3qa^3\omega^3 \sin \omega\tau + 2[a\beta'(a) - \beta(a)] - \frac{8\lambda\omega}{(p+2\omega)} \sin \xi \right\}$$

$$b_{33} = \frac{2\lambda \cos \xi}{ma(p+2\omega)} - \frac{b \sin 2\xi}{mp}$$

$$N = \frac{d}{du} M\left(\frac{u}{r}\right), \quad \beta'(a) = \frac{d\beta}{da}$$

Если, например,  $f(x) = \gamma_3x^3 + \gamma_5x^5$ , то  $\beta'(a) = \frac{a^2}{8} \left( 9\gamma_3 + \frac{25}{2}\gamma_5a^2 \right)$ .

В случае  $u < a\omega$  изменяются лишь коэффициенты

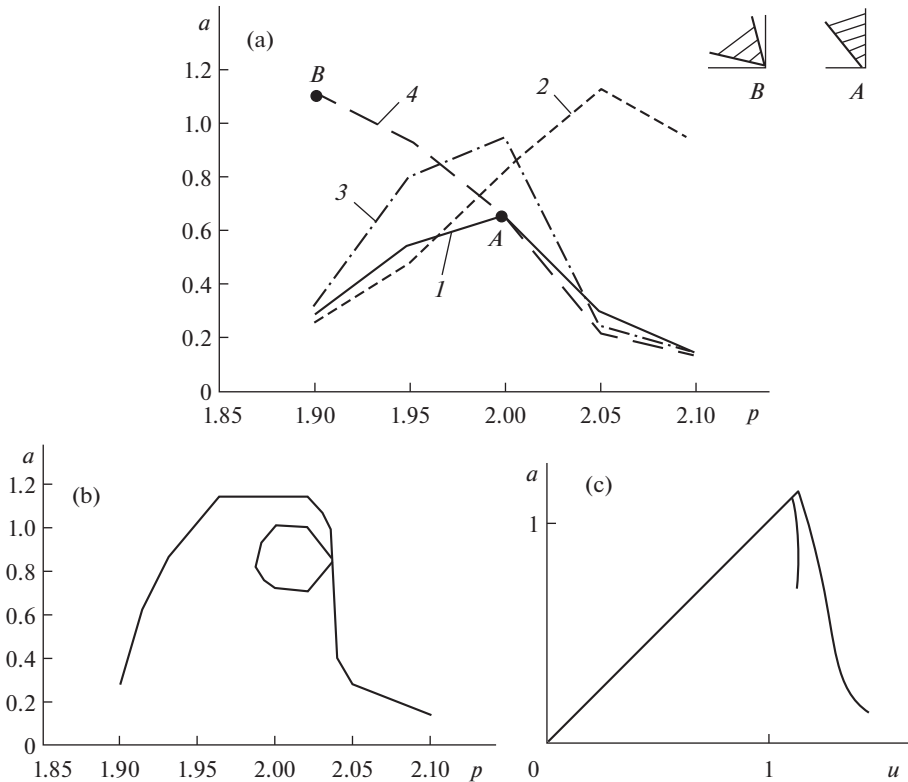
$$b_{11} = \frac{r}{I} \left[ N - rq(3\alpha_3u^2 - \alpha_1) - \frac{3}{2}r\alpha_3q\omega^2a^2 - \frac{2rq}{\pi\sqrt{a^2\omega^2 - u^2}} \right]$$

$$b_{12} = \frac{ur^2}{I} \left[ -3\alpha_3qa\omega^2 + \frac{2q}{\pi a\sqrt{a^2\omega^2 - u^2}} \right]$$

$$b_{21} = \frac{qu}{m} \left[ -3\alpha_3a \cos \omega\tau + \frac{2}{\pi a\omega^2\sqrt{a^2\omega^2 - u^2}} \right]$$

$$b_{22} = \frac{1}{2m} \left\{ \frac{b}{p} \sin 2\xi - k - \left[ G(a, u) + \frac{3}{2}\alpha_3qa^2\omega^2 \right] \cos \omega\tau - \frac{4qu^2}{\pi a^2\omega^2\sqrt{a^2\omega^2 - u^2}} \right\}$$

а другие остаются в прежнем виде (как в случае  $u \geq a\omega$ ).



Фиг. 2

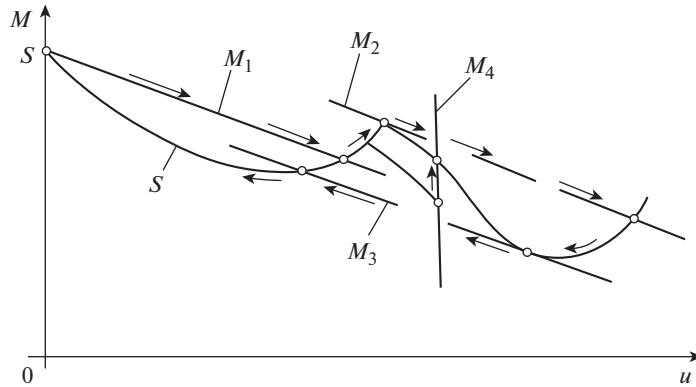
С учетом того, что в области резонанса разность  $p - 2\omega \sim \varepsilon$ , можно принять приближенно  $p + 2\omega \approx 4\omega$ , вследствие чего уравнения и выражения коэффициентов  $b_{is}$  упрощаются.

Как показано в [3–5], критерию  $D_3 > 0$  можно придать эквивалентную наглядную форму

$$(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}) \frac{d}{du} \left[ M \left( \frac{u}{r} \right) - S(u, p_\Phi) \right] < 0 \quad (4.2)$$

позволяющую судить об устойчивости непосредственно по виду кривой.

**5. Результаты расчетов.** Приведенные выражения достаточно сложные и не позволяют без численных расчетов получить информацию о влиянии запаздывания в силе трения на динамику системы. Чтобы получить информацию о влиянии запаздывания на амплитудно-частотно-скоростную зависимость  $a(u, p)$  и устойчивость стационарных режимов были выполнены расчеты при следующих параметрах:  $\omega = 1\text{с}^{-1}$ ,  $m = 1\text{кгс} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{см}^{-1}$ ,  $b = 0.07\text{кгс} \cdot \text{см}^{-1}$ ,  $\lambda = 0.02\text{кгс}$ ,  $k = 0.02\text{кгс} \cdot \text{с} \cdot \text{см}^{-1}$ ,  $q = 0.5\text{кгс}$ ,  $\alpha_1 = 0.84\text{с} \cdot \text{см}^{-1}$ ,  $\alpha_3 = 0.18\text{с}^3 \cdot \text{см}^{-3}$ ,  $r = 1\text{см}$ ,  $I = 1\text{кгс} \cdot \text{с} \cdot \text{см}^2$ . Показанные на фиг. 2 и фиг. 3 зависимости получены при  $f(x) \equiv 0$ . На фиг. 2,а представлены зависимости амплитуды колебаний от частоты при  $u = 1.26$  и различных значениях запаздывания: кривая 1 ( $\tau = 0$ ), кривая 2 ( $\tau = \pi/2$ ), кривая 3 ( $\tau = \pi$ ), кривая 4 ( $\tau = 3\pi/2$ ). Графики представлены в виде кусочно-линейных из-за небольшого числа расчетных то-



Фиг. 3

чек, обусловленных большой трудоемкостью расчета выражений, хотя должны быть на самом деле гладкими. Показанный на фиг. 2, b график имеет место для  $u = 1.14$ ,  $\tau = 0$ , а фиг. 2, c отражает зависимость амплитуды от скорости  $u$  при  $p = 2$ ,  $\tau = 0$ . Фиг. 2, b показывает интересный, многозначный в узкой области частот вид амплитудной кривой. Устойчивость колебаний с какой-либо амплитудой в указанных на графиках диапазонах частот зависит от крутизны характеристики источника энергии, выраженной величиной  $N$ . Колебания устойчивы в пределах заштрихованных секторов для  $N$  (точка А относится к кривой 1), хотя эти секторы должны быть указаны на самом деле на кривой нагрузки  $S(u, p_\phi)$ . Поскольку нагрузка  $S(u, p_\phi)$  зависит от амплитуды колебаний, то ее форма зависит от формы амплитудной кривой. Представленная на фиг. 3 кривая  $S(u, p_\phi)$  соответствует амплитудной кривой, показанной на фиг. 2, c. При изменении скорости (увеличении, уменьшении) источника энергии  $u$  посредством перемещения характеристики  $M(u/r)$  в системе проявляются различного характера переходы из одного состояния в другое, показанные стрелками. Такого рода переходы при отсутствии запаздывания в силе трения подробно описаны в [4, 5] и имеют место также при его наличии. Поэтому их описание здесь не приводится во избежание повторения.

В заключение отметим, что здесь представлены не все результаты проведенных расчетов и анализа. Они показывают многообразие явлений, которые могут быть обусловлены взаимодействием сил в источнике энергии и сил трения с запаздыванием.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рубаник В.П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М.: Наука, 1969. 288 с.
2. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
3. Кононенко В.О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. М.: Наука, 1964. 236 с.
4. Алифов А.А., Фролов К.В. Взаимодействие нелинейных колебательных систем с источниками энергии. М.: Наука, 1985. 328 с.
5. Alifov A.A., Frolov K.V. Interaction of Nonlinear Oscillatory Systems with Energy Sources. New York, Washington, Philadelphia, London: Hemisphere Publishing Corporation. Taylor & Francis Group. 1990. 327 p.
6. Рубаник В.П., Старик Л.К. Об устойчивости автоколебаний резца в случае неидеального источника энергии // Научные труды вузов Лит. ССР. Вибротехника. 1971. № 2 (11). С. 205–212.

7. Абдиев Ф.К. Автоколебания системы с запаздыванием и с неидеальным источником энергии // Изв. АН АзССР. Серия физико-технических и математических наук. 1983. № 4. С. 134–139.
8. Алифов А.А., Абдиев Ф.К. Взаимодействие вынужденных колебаний и автоколебаний при силе трения с запаздывающим аргументом // ВИНТИ, № 358-85 деп. 1985. 11 с.
9. Алифов А.А., Абдиев Ф.К. Взаимодействие параметрических колебаний и автоколебаний при силе трения с запаздыванием // ВИНТИ, № 357-85 деп. 1985. 10 с.
10. Алифов А.А. Об автоколебательной системе, взаимодействующей с источником энергии // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 1. С. 36–42.
11. Алифов А.А., Фролов К.В. Автопараметрические колебания в системе с сухим трением и с ограниченным возбуждением // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 4. С. 68–78.
12. Алифов А.А., Фролов К.В. Исследование автоколебаний при трении в условиях параметрического возбуждения и ограниченной мощности источника энергии // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 4. С. 29–39.
13. Алифов А.А. Автоколебательная система с источником энергии при параметрическом и периодическом возмущениях // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 4. С. 45–63.
14. Алифов А.А., Фролов К.В. О воздействии параметрического возмущения на автоколебательную систему с источником энергии // Прикладная механика. 1981. Т. 17. № 1. С. 106–113.
15. Алифов А.А. Об автоколебаниях в системе с ограниченным возбуждением // Машиноведение. 1979. № 1. С. 8–14.
16. Климов Д.М. Об одном виде автоколебаний в системе с сухим трением // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 3. С. 6–12.
17. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 328 с.
18. Броновец М.А., Журавлев В.Ф. Об автоколебаниях в системах измерения сил трения // Изв. РАН. МТТ. 2012. № 3. С. 3–11.