

УДК 531.36

О ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССАХ В ДИНАМИКЕ ЭЛЛИПСОИДА ВРАЩЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ С ТРЕНИЕМ

© 2019 г. М. А. Муницына

Московский физико-технический институт (государственный университет),
Долгопрудный, Россия
e-mail: munitsyna@gmail.com

Поступила в редакцию 31.07.2017 г.
После доработки 31.07.2017 г.
Принята к публикации 02.11.2017 г.

Рассматривается задача о движении эллипсоида вращения, центр масс которого совпадает с геометрическим центром, а ось вращения является осью динамической симметрии, на горизонтальной плоскости с трением. При некотором классе начальных условий дается качественный анализ динамики. Приводится геометрическая интерпретация результатов и результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: трение, стационарные движения, эллипсоид вращения

DOI: 10.1134/S0572329919020107

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о движении эллипсоида вращения по горизонтальной плоскости с трением. Будем считать, что центр масс эллипсоида совпадает с его геометрическим центром, а ось вращения является осью динамической симметрии. Введем подвижную систему координат $C\xi_1\xi_2\xi_3$, оси которой совпадают с главными центральными осями инерции эллипсоида. Пусть a и c – экваториальный и осевой радиусы эллипсоида соответственно, и уравнение его поверхности имеет вид $f(\xi) = (\xi_1^2 + \xi_2^2)/a^2 + \xi_3^2/c^2 = 0$. Поскольку вектор восходящей вертикали γ определяется равенством

$$\gamma = -\frac{\text{grad}f(\mathbf{r})}{\|\text{grad}f(\mathbf{r})\|} \quad (1.1)$$

компоненты радиус-вектора r точки касания эллипсоида с опорной плоскостью имеют вид

$$r_1 = -\frac{a^2\gamma_1}{\rho}, \quad r_2 = -\frac{a^2\gamma_2}{\rho}, \quad r_3 = -\frac{c^2\gamma_3}{\rho} \quad (1.2)$$

(здесь $\rho = ((c^2 - a^2)\gamma_3^2 + a^2)^{1/2}$ – высота центра масс эллипсоида над плоскостью).

Теоремы об изменении количества движения и кинетического момента эллипсоида, условие постоянства вектора γ и условие безотрывности движения имеют соответственно вид

$$m\dot{\mathbf{v}} + [\boldsymbol{\omega}, m\mathbf{v}] = -mg\gamma + N\gamma + \mathbf{F} \quad (1.3)$$

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}] = [\mathbf{r}, N\gamma + \mathbf{F}] + \mathbf{M} \quad (1.4)$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} + [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}] = 0 \quad (1.5)$$

$$(\mathbf{v} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}], \boldsymbol{\gamma}) = 0 \quad (1.6)$$

Здесь m – масса эллипсоида, \mathbf{v} и $\boldsymbol{\omega}$ – векторы скорости центра масс и угловой скорости соответственно, $\mathbf{J} = \text{diag}(A, A, C)$ – центральный тензор инерции эллипсоида, g – ускорение свободного падения, $N \geq 0$ – величина нормальной составляющей реакции опорной плоскости, \mathbf{F} и \mathbf{M} – сила и момент трения соответственно. При заданной модели трения

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}, N), \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}, N) \quad (1.7)$$

система (1.3)–(1.6) замкнута относительно переменных \mathbf{v} , $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\gamma}$ и N .

2. Абсолютно гладкая плоскость. Приведем результаты исследований динамики тела на абсолютно гладкой плоскости [1–3] в случае эллипсоида вращения.

При $\mathbf{F} = 0$, $\mathbf{M} = 0$ уравнения (1.3)–(1.6) допускают интеграл энергии $H = h = \text{const}$,

$$H = \frac{m}{2} \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2} (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) - mg(\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}) \quad (2.1)$$

интегралы $\omega_3 = \omega = \text{const}$ и $K = k = \text{const}$,

$$K = A(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2) + C\omega_3\gamma_3 \quad (2.2)$$

выражающие постоянства проекций кинетического момента эллипсоида на ось симметрии и вертикаль соответственно, а также интеграл $U = u = \text{const}$,

$$U = \llbracket \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{v} \rrbracket \quad (2.3)$$

следующий из постоянства проекции скорости центра масс эллипсоида на опорную плоскость.

При $k = \pm C\omega$ система (1.3)–(1.6) имеет решения вида

$$\begin{aligned} v_1 &= u \cos \omega t, & v_2 &= -u \sin \omega t, & v_3 &= 0, & \omega_1 &= \omega_2 = 0 \\ \omega_3 &= \omega, & \gamma_1 &= 0, & \gamma_2 &= 0, & \gamma_3 &= \pm 1, & N &= mg \end{aligned} \quad (2.4)$$

соответствующие равномерным вращениям эллипсоида вокруг вертикально расположенной оси симметрии, равномерно движущейся вдоль плоскости.

При $k \neq \pm C\omega$ ($\gamma_3 \neq \pm 1$) указанные выше интегралы позволяют провести редукцию к одномерному движению и представить (2.1) в виде

$$\frac{\alpha}{2} \dot{\theta}^2 + V(\theta) = h - \frac{1}{2} (C\omega^2 + mu^2) \quad (2.5)$$

$$\alpha = A + m \frac{(c^2 - a^2)^2}{\rho^2} \gamma_3^2 (1 - \gamma_3^2), \quad V(\theta) = \frac{(C\gamma_3\omega - k)^2}{2A(1 - \gamma_3^2)} + mgr$$

где θ – угол нутации эллипсоида ($\gamma_3 = \cos \theta$).

Движения эллипсоида с постоянным углом нутации θ соответствуют критическим точкам функции $V(\theta)$. В частности, при $k = 0$ и

$$\omega^2 > \frac{mgA(a^2 - c^2)}{aC^2}$$

в точках $\theta = \pm\pi/2$ достигается минимум $W(\theta)$, и соответствующие решения системы (1.3)–(1.6)

$$\begin{aligned} N &= mg, & v_1 &= u \sin \varphi \cos \omega t, & v_2 &= -u \sin \varphi \sin \omega t, & v_3 &= u \cos \varphi \\ \omega_1 &= 0, & \omega_2 &= 0, & \omega_3 &= \omega, & \gamma_1 &= \sin \omega t, & \gamma_2 &= \cos \omega t, & \gamma_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

устойчивы. Им соответствуют равномерные качения эллипсоида экваториальным сечением по прямой на плоскости.

Кроме того, при

$$k = C\omega \cos \theta_0, \quad \omega^2 = \frac{mgA(c^2 - a^2)}{\varepsilon C^2 \rho_0}$$

где ε – безразмерный малый параметр ($\varepsilon \ll 1$), а ρ_0 – соответствующая углу нутации θ_0 высота центра масс, область возможного движения приведенной системы (2.5) имеет ширину порядка ε , и соответствующее решение (1.3)–(1.6) можно представить в виде

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1(\cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \theta_0 \sin \varphi) + u_2(\sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \theta_0 \sin \varphi) + O(\varepsilon) \\ v_2 &= u_1(-\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \theta_0 \cos \varphi) + u_2(-\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \theta_0 \cos \varphi) + O(\varepsilon) \\ v_3 &= u_1 \sin \psi \sin \theta_0 - u_2 \cos \psi \sin \theta_0 + O(\varepsilon) \\ \omega_1 &= O(\varepsilon), \quad \omega_2 = O(\varepsilon), \quad \omega_3 = \omega \\ \gamma_1 &= \cos \varphi \sin \theta_0 + O(\varepsilon), \quad \gamma_2 = \sin \varphi \sin \theta_0 + O(\varepsilon) \\ \gamma_3 &= \cos \theta_0 + O(\varepsilon), \quad N = mg + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (2.7)$$

где φ и ψ – быстрая и медленные функции времени соответственно. Соответствующее (2.7) движение является псевдорегулярной прецессией эллипсоида вокруг центра масс, равномерно движущегося вдоль плоскости. Заметим, что решения (2.7) при $\theta = 0$ ($\theta = \pi$) и $\theta = \pm\pi/2$ имеют вид (2.6) и (2.4) соответственно.

3. Плоскость с трением скольжения. Рассмотрим случай плоскости с трением скольжения ($\mathbf{M} = 0$). Будем считать, что сила трения обращается в нуль только одновременно со скоростью проскальзывания. Тогда из рассмотренных выше движений реализуются те, на которых скорость точки контакта эллипсоида с опорной плоскостью равна нулю, т.е. решения вида (2.4) при $u = 0$ и решения (2.6) при $u = a\omega$.

Для исследования устойчивости указанных решений необходимо конкретизировать модель трения. Например, при классическом вязком трении $\mathbf{F} = -\kappa(\mathbf{v} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}])$ этот вопрос исследован в [4] для однородного эллипсоида. При произвольных моментах инерции A и C равномерные вращения (2.4) с неподвижным центром масс ($u = 0$) вытянутого вдоль оси симметрии эллипсоида ($c > a$) устойчивы при $\omega^2 > \omega_I^2$, а для сжатого – при выполнении обратного неравенства. Равномерные качения (2.6) без проскальзывания ($u = a\omega$) вытянутого (сжатого) эллипсоида, параметры которого удовлетворяют неравенству $(c - a)(C - A) < 0$, устойчивы при $\omega^2 > \omega_{II}^2$ ($\omega^2 < \omega_{II}^2$). Здесь

$$\omega_I^2 = \frac{c^2(c^2 - a^2)mg}{a^2(Cc^2 - Aa^2)}, \quad \omega_{II}^2 = \frac{mg(c^2 - a^2)A}{(A - C)a^2 C}$$

Из этих результатов в частности следует, что если вытянутый вдоль эллипсоид расположить на плоскости так, что ось его симметрии горизонтальна, и сообщить центру масс достаточно большую горизонтальную скорость, то в силу неустойчивости соответствующих качений ось симметрии не будет оставаться в горизонтальном положении. При этом она может занять вертикальное положение, соответствующее устойчивым решениям (2.4).

Для исследования указанных переходных процессов заметим, что проекция уравнения (1.4) на ось динамической симметрии эллипсоида имеет вид

$$C\dot{\omega}_3 = (f_1\gamma_2 - f_2\gamma_1)\frac{a^2}{\rho} \quad (3.1)$$

и при достаточно малом трении ω_3 является медленной переменной. Тогда приближенное уравнение, описывающее ее изменение, может быть получено заменой быстрых переменных периодическими решениями системы (1.3)–(1.6), соответствующими постоянству ω_3 [5], [6], т.е. случаю абсолютно гладкой плоскости. Кроме того, K и U также являются медленными величинами в силу теоремы об изменении кинетического момента

$$\dot{K} = -\frac{c^2 - a^2}{\rho} (f_1 \gamma_2 - f_2 \gamma_1) \gamma_3 \quad (3.2)$$

и теоремы о движении центра масс

$$\dot{U} = \frac{([\mathbf{v}, \boldsymbol{\gamma}], [\mathbf{F}, \boldsymbol{\gamma}])}{mU} \quad (3.3)$$

Выберем в качестве указанного периодического решения (2.7), откинув слагаемые малого порядка. Тогда при классическом вязком трении из (3.1), (3.2), (3.3) получим

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_3 &= -\kappa \frac{a^4 \sin^2 \theta}{C \rho^2} \left(1 + \frac{\rho(u_1 \cos \psi + u_2 \sin \psi)}{a^2 \omega_3 \sin \theta} \right) \omega_3 \\ \dot{\theta} &= -\kappa \frac{a^2 c^2 \sin \theta \cos \theta}{C \rho^2} \left(1 + \frac{\rho(u_1 \cos \psi + u_2 \sin \psi)}{a^2 \omega_3 \sin \theta} \right) \\ \dot{U} &= -\frac{\kappa}{m} U \left(1 + \frac{a^2 \omega_3 (u_1 \cos \psi + u_2 \sin \psi) \sin \theta}{\rho U^2} \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь u_1, u_2 ($u_1^2 + u_2^2 = U^2$) и ψ – неизвестные функции времени.

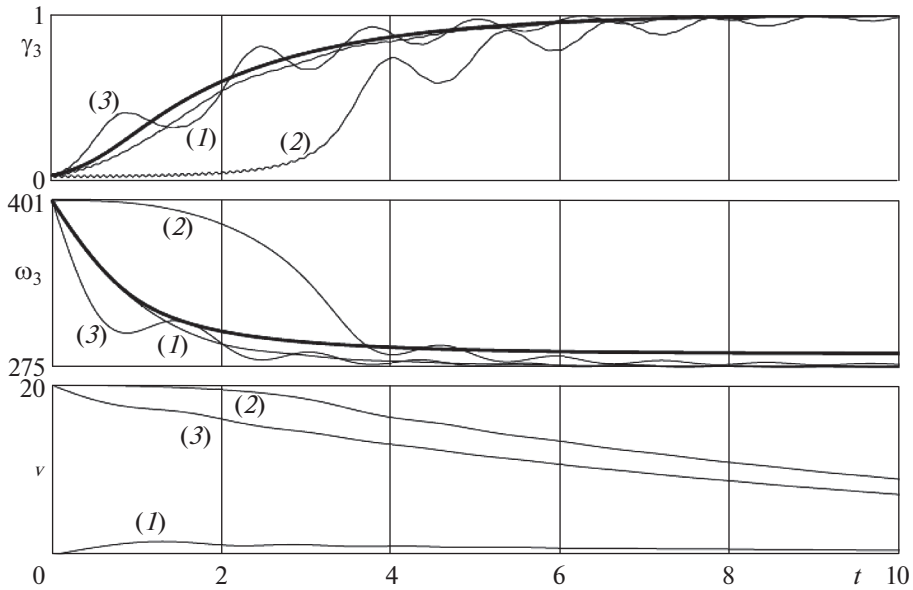
Считая малой скорость центра масс ($|U| = a\omega_3$) из (3.4) получим

$$\dot{\omega}_3 = -\kappa \frac{a^4 \sin^2 \theta}{\rho^2 C} \omega_3, \quad \dot{\theta} = -\kappa \frac{a^2 c^2}{2C \rho^2} \sin 2\theta \quad (3.5)$$

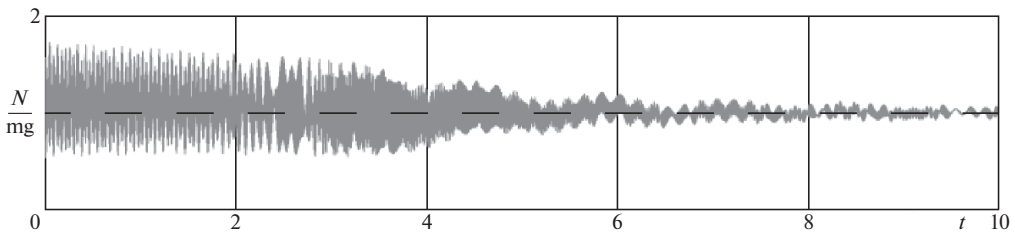
Уравнения (3.4) в совокупности с равенствами (2.7) приближенно описывают динамику эллипсоида на плоскости с вязким трением при малой скорости центра масс и начальных условиях, близких к (2.7). Заметим, что при выполнении неравенства $|U| > a\omega_3$ правая часть последнего равенства (3.4) отрицательна и величина проекции скорости центра масс на опорную плоскость убывает, причем при $|U| \gg a\omega_3$ по закону $U = U(0) \exp(-\kappa t/m)$.

На фиг. 1 тонкими кривыми представлены результаты численного интегрирования точных уравнений движения (1.3)–(1.6) эллипсоида с параметрами $m = 1$ кг, $a = 0.05$ м, $c = 0.15$ м, на плоскости с коэффициентом вязкого трения $\kappa = 0.1$ кг/с при начальных условиях $\omega_1(0) = \omega_2(0) = 0$, $\omega_3(0) = 400$ с⁻¹, $\gamma_2(0) = 0$, $\gamma_3(0) = 0.05$ (величина $\gamma_1(0)$ определялась геометрическим интегралом), т.е. в начальный момент времени эллипсоид имеет достаточно большую угловую скорость, направленную вдоль его оси симметрии, и располагался на плоскости так, что эта ось почти горизонтальна. В экспериментах, обозначенных цифрами (1), (2) и (3) принимались значения $v_2(0) = 0$, $v_2(0) = 20$ м/с и $v_2(0) = -20$ м/с соответственно, и $v_1(0) = v_3(0) = 0$, т.е. в случае (1) начальная скорость центра масс отсутствует, а в случаях (2) и (3) – направлена вдоль плоскости, причем в случае (2) в начальный момент отсутствует проскальзывание в точке контакта с плоскостью.

Во всех трех экспериментах с течением времени косинус угла нутации эллипсоида увеличивается до единицы, угловая скорость уменьшается, но остается практически сонаправленной с осью симметрии (зависимости $\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$ мало отличаются от нуля



Фиг. 1



Фиг. 2

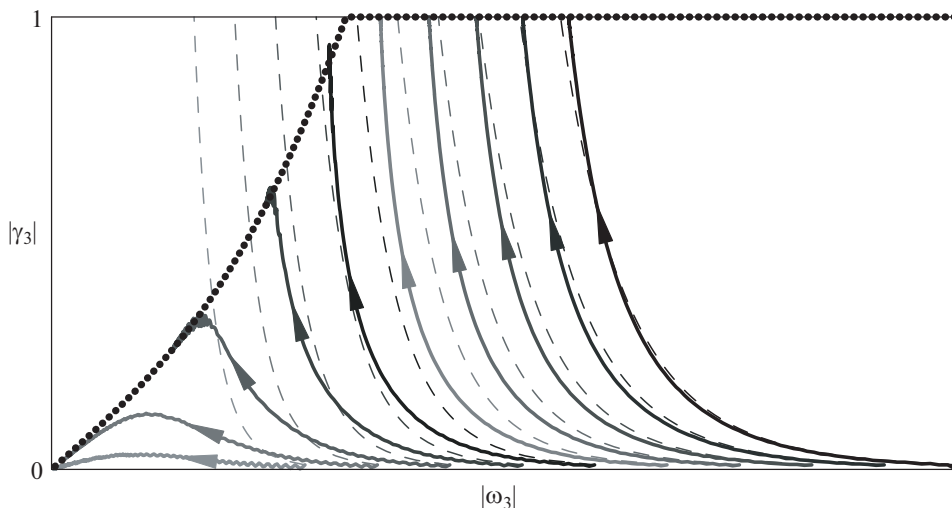
и не приводятся на рисунке), скорость центра масс уменьшается до нуля в случаях (2), (3) и мало отличается от нуля в случае (1). Таким образом, финальным движением эллипсоида являются устойчивые вращения (2.4) ($u = 0$).

Жирной кривой на фиг. 1 представлены результаты интегрирования приближенных уравнений (3.5) при соответствующих начальных условиях. Они хорошо совпадают с результатами эксперимента без начальной скорости центра масс (1), с осредненными значениями соответствующих переменных при начальном движении без проскальзывания (2) и с их финальными значениями в случае (3). Разность финальных значений угловой скорости в интегрировании точных и приближенных уравнений объясняется потерями энергии на переходных процессах.

На фиг. 2 представлена зависимость отношения величины реакции опорной плоскости к весу эллипсоида в эксперименте (2). В остальных экспериментах соответствующие результаты аналогичны. Отрыва эллипсоида от плоскости не наблюдается.

4. Геометрическая интерпретация результатов. Заметим, что при любой скорости центра масс из (3.4) следует уравнение

$$\frac{d\omega_3}{d\theta} = -\frac{a^2}{c^2} \frac{\omega_3}{\cos \theta}$$



Фиг. 3

интегрируя которое, получим

$$\frac{\gamma_3 \omega_3^{c^2/a^2}}{1 + \sqrt{1 - \gamma_3^2}} = \text{const} \quad (4.1)$$

Таким образом при движениях эллипсоида с начальными условиями вида (2.7) при достаточно большой угловой скорости на плоскости параметров $(|\omega_3|, |\gamma_3|)$ движение происходит в малой окрестности соответствующих кривых (4.1), заканчиваясь на прямой $|\gamma_3| = 1$. Причем при малой скорости центра масс это движение монотонно.

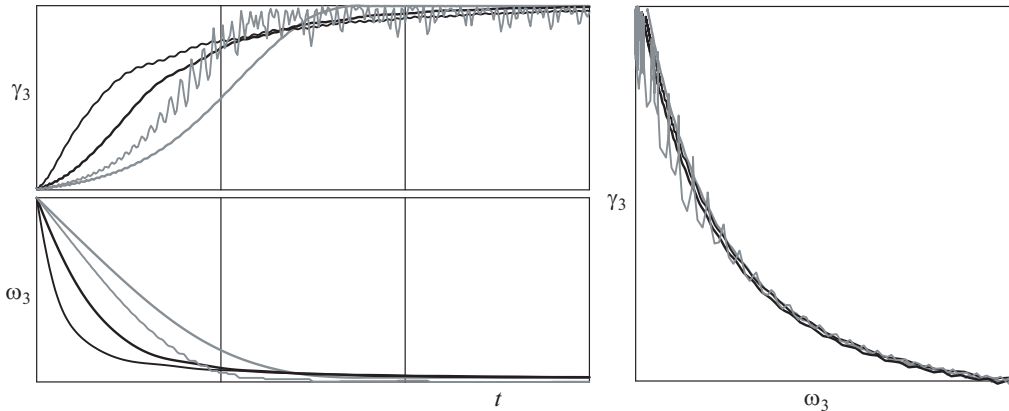
На фиг. 3 пунктиром обозначены соответствующие равенствам (4.1) кривые, а сплошными кривыми – результаты соответствующих численных экспериментов без начальной скорости центра масс. При большой начальной угловой скорости эллипсоида указанные кривые практически совпадают. При ее уменьшении нарушается условие $\varepsilon \ll 1$ и наблюдается существенное различие результатов, а финальными движениями эллипсоида являются регулярные рецессии [4] или устойчивые качения (2.6).

5. Плоскость с поликомпонентным трением. При наличии трения верчения или качения ($\mathbf{M} \neq 0$) система (1.3)–(1.6) имеет решения вида (2.6), (2.4), в которых следует положить $u = 0$, $\omega = \omega(t)$, где зависимость $\omega(t)$ определяется моделью трения. Уравнения (3.1), (3.2) в этом случае принимают вид

$$C\dot{\omega}_3 = (f_1\gamma_2 - f_2\gamma_1)\frac{a^2}{\rho} + m_3, \quad \dot{K} = -\frac{c^2 - a^2}{\rho}(f_1\gamma_2 - f_2\gamma_1)\gamma_3 + (\gamma, \mathbf{M}) \quad (5.1)$$

а уравнение (3.3) не меняется.

Заметим, что если мощность трения верчения и качения мала по сравнению с мощностью трения скольжения (например, в моделях трения [7], [8]), то порядок последних слагаемых правых частей (5.1) мал по сравнению с первым, и приближенные уравнения (3.4) также будут достаточно хорошо описывать соответствующие переходные процессы. Таким образом, движение на плоскости $(|\omega_3|, |\gamma_3|)$ также будет происходить в окрестности кривых (4.1), с той только разницей, что по достижении прямой $|\gamma_3| = 1$ изображающая точка не остановится, а будет двигаться вдоль этой прямой влево, а



Фиг. 4

при пересечении с соответствующей прецессиям кривой будет двигаться вдоль нее в сторону уменьшения $|\gamma_3|$ [9].

На фиг. 4 представлены численные результаты эксперимента с начальными условиями (1) в уже рассмотренном случае вязкого трения (жирная черная кривая), при классическом сухом трении (жирная серая кривая), поликомпонентном сухом трении [10] (тонкая серая кривая) и поликомпонентном вязком трении [8] (тонкая черная кривая), а также соответствующие кривые на плоскости $(\omega_3, |\gamma_3|)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (16-01-00338, 18-01-00335, 19-01-00140) и Программы № 29 Президиума РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маркеев А.П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2014. 496 с.
2. Буров А.А., Карапетян А.В. О несуществовании дополнительного интеграла в задаче о движении тяжелого твердого эллипсоида по гладкой плоскости // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 3. С. 501.
3. Карапетян А.В., Рубановский В.Н. О бифуркации и устойчивости перманентных вращений тяжелого трехосного эллипсоида на гладкой плоскости // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 2. С. 260.
4. Муницына М.А. Движения сфероида на горизонтальной плоскости с вязким трением // ПММ. Т. 76. Вып. 2. 2012. С. 214–223.
5. Моргунов Б.И., Волосов В.М. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: МГУ, 1971. 508 с.
6. Блехман И.И. Вибрационная механика. М.: Физматлит, 1994. 400 с.
7. Журавлев В.Ф. О модели сухого трения в задаче качения твердых тел // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 5. С. 762–767.
8. Карапетян А.В. Двухпараметрическая модель трения и ее свойства // ПММ. 2009. Т. 73. В. 5. С. 515–519.
9. Муницына М.А. Динамика вращения сфероида на горизонтальной плоскости с трением // ПММ. 2018. Т. 82. Вып. 1. С. 1–9.
10. Муницына М.А. Модель трения в случае плоского эллиптического контакта тела с опорной плоскостью // Нелинейная динамика. Т. 8. Вып. 4. 2012. С. 705–712.
11. Муницына М.А. Двухкомпонентная модель вязкого трения // XI всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник докладов (Казань, 20–24 августа 2015 г.). С. 2668–2670.