ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
2019, № 3, с. 41–53

УДК 539.3

О ДИНАМИКЕ РАЗГРУЗКИ И УПРУГИХ ВОЛНАХ В СРЕДЕ С ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАКОПЛЕННЫМИ ПЛАСТИЧЕСКИМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ

 О. В. Дудко[a],*, **В. Е. Рагозина**[a]

[a] *Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток, Россия*
**e-mail: dudko@iacp.dvo.ru*

Поступила в редакцию 23.10.2017 г.
После доработки 23.10.2017 г.
Принята к публикации 08.11.2017 г.

Для модели больших упругопластических деформаций предложены подходы, позволяющие описать упругую динамику среды (включая разгрузку и упругое нагружение) при наличии в ней предварительных необратимых деформаций. Получены формулы для вычисления перераспределения пластических деформаций на основе поворотного тензора. Для динамических упругих процессов, порождающих ударные волны в упругопластической среде, определены возможные скорости и типы плоских ударных волн. Показано, что упругие ударные волны создают скачки поля предварительных пластических деформаций, получены соотношения для вычисления таких разрывов. Рассмотрены основные свойства моделирования автомодельных решений и возможность разграничения в них упругих и пластических деформаций с учетом предложенного подхода к описанию кинематики среды.

Ключевые слова: конечные деформации, упругопластическая среда, предварительные пластические деформации, упругие ударные волны, поворотный тензор, скачок пластических деформаций, динамика разгрузки, динамика повторного упругого нагружения

DOI: 10.1134/S0572329919020041

Введение. В основу многих современных промышленных технологий заложены физико-механические процессы, связанные со способностью конструкционных материалов приобретать необратимые деформации. В случаях, когда уровень этих деформаций значителен, когда обработка приводит к большим перемещениям и углам поворота частиц среды или же когда требуется высокая степень точности с учетом перераспределения пластических деформаций на всех стадиях процесса, возникает необходимость при математическом моделировании обращаться к тензорам полных деформаций. Однако такой подход автоматически создает проблему разделения полных деформаций на обратимую и необратимую составляющие. На сегодняшний день не существует единственной общепринятой модели больших упругопластических деформаций. Все модели этого типа [1, 2] различаются способом разделения упругих и пластических деформаций. В настоящей работе используются модельные соотношения, впервые предложенные в [3] и нашедшие последующее развитие в [4]. Рассмотрены вопросы взаимодействия упругих и пластических деформаций при разгрузке и последующих упругих нагружениях среды, включая интенсивные динамические воздействия с образованием ударных волн. Для перечисленных процессов получены общие соотношения, задающие перераспределение пластических деформаций под влиянием изменения упругих деформаций. Также подробно рассматривается динамика одномерных ударных волн в среде, имеющей предварительные пластические деформации.

1. Общие модельные зависимости. Движение сплошной среды в представлении Эйлера опишем в декартовой пространственной системе координат x_i $(i = 1, 2, 3)$. В качестве основной характеристики деформации выберем левый тензор Альманзи

$$\begin{gathered}\alpha_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - a_{k,i}a_{k,j}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}) \\ \delta_{ij} = \begin{cases}1, & i = j, \\ 0, & i \neq j,\end{cases} \quad a_{k,i} = \frac{\partial a_k}{\partial x_i}, \quad u_{k,i} = \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\end{gathered} \tag{1.1}$$

где δ_{ij} – компоненты единичного (метрического) тензора, a_k – координаты частиц среды в отсчетной конфигурации, u_i – компоненты вектора перемещений. В (1.1) для компонент $a_{k,i}a_{k,j}$ тензора – левой меры деформации [2, 5] принимается представление [3, 4]:

$$\begin{gathered}a_{k,i}a_{k,j} = (\delta_{is} - e_{is})(\delta_{sr} - 2p_{sr})(\delta_{rj} - e_{rj}) \\ e_{is} = e_{si}, \quad p_{sr} = p_{rs}\end{gathered} \tag{1.2}$$

где p_{ij} – компоненты тензора пластических деформаций, e_{ij} – тензор, по которому определяются упругие деформации упругопластической среды. Из (1.1) и (1.2) для α_{ij} следует

$$\alpha_{ij} = e_{ij} - \frac{e_{ik}e_{kj}}{2} + p_{ij} - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{ks}e_{sj} \tag{1.3}$$

Первые два слагаемых правой части (1.3) выделим в тензор $E_{ij} = e_{ij} - e_{ik}e_{kj}/2$, характеризующий упругое деформирование среды. Для каждого из тензоров e_{ij}, p_{ij} в области активного нагружения и при разгрузке имеют место дифференциальные уравнения переноса [3]. Из них следует, в частности, что в процессе разгрузки и последующем упругом нагружении тензор пластических деформаций неизменен, а все изменения его компонент p_{ij} связаны с жестким вращением:

$$p_{ij} = c_{ik}c_{js}\overset{0}{p}_{ks}, \quad c_{ik}c_{jk} = c_{ki}c_{kj} = \delta_{ij} \tag{1.4}$$

причем $\overset{0}{p}_{ks}$ – значение p_{ij} в начальный момент разгрузки для частицы среды или же в первый момент прохождения упругой динамики по этой частице. Распределение значений $\overset{0}{p}_{ks}$, предварительно достигнутых в процессах активного нагружения, считается в рассматриваемых задачах известными начальными данными. Тензор поворота c_{ij} порождается процессами разгрузки или последующего упругого нагружения. Заметим, что хотя сами упругие деформации E_{ij} и их изменения малы, их влияние на p_{ij} через поворотный тензор c_{ij} может быть значительным, особенно если деформируются тонкие конструкции (стержни, пластины, оболочки и т.д.). Это влияние может существенно изменить итоговую геометрию объекта.

Мерой отклика среды на силовое воздействие выберем тензор напряжений Эйлера–Коши. Его компоненты σ_{ij} связаны с e_{ij} формулой, переходящей в известную формулу Мурнагана [5] при условии $p_{ij} = 0$:

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial W}{\partial e_{ik}}(\delta_{kj} - e_{kj}) = \frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial W}{\partial E_{ik}}(\delta_{kj} - 2E_{kj})$$

$$W(I_1,I_2,I_3) = \frac{\lambda}{2}I_1^2 + \mu I_2 + lI_1I_2 + mI_1^3 + nI_3 + \ldots \qquad (1.5)$$

$$I_1 = E_{ii}, \quad I_2 = E_{ij}E_{ji}, \quad I_3 = E_{ik}E_{kj}E_{ji}$$

где W – упругий потенциал среды, ρ и ρ_0 – плотность среды в текущем и свободном состоянии, λ, μ, l, n, m – упругие модули среды. Для выполнения (1.5) из формул

$$\frac{\partial W}{\partial e_{ik}} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_{rs}}\frac{\partial \alpha_{rs}}{\partial e_{ik}}, \quad \frac{\partial \alpha_{rs}}{\partial e_{ik}} = \delta_{ri}\delta_{sk} - \frac{\delta_{ri}e_{sk}}{2} - \frac{e_{ri}\delta_{sk}}{2}, \quad p_{ij} = 0, \quad \alpha_{ij} = E_{ij}$$

следуют необходимые свойства функции W:

$$\frac{\partial W}{\partial e_{ik}}e_{kj} = \frac{\partial W}{\partial e_{jk}}e_{ki}, \quad \frac{\partial W}{\partial E_{ik}}e_{kj} = \frac{\partial W}{\partial E_{jk}}e_{ki}$$

Оба эти свойства выполнены, если среда изотропна, что и имеет место согласно определению $W(I_1,I_2,I_3)$ в (1.5). Функция W в (1.5) в зависимости от типа задачи (квазистатическая или динамическая) связана со свободной энергией или с внутренней энергией среды. Из (1.5) следует, что компоненты σ_{ij} зависят от пластических деформаций только за счет общего для всех σ_{ij} скалярного множителя $\rho\rho_0^{-1}$.

Для пластической деформации далее предполагаем идеальный характер пластического течения, выполнение ассоциированного закона течения и условия пластичности. В качестве последнего равным образом может быть выбрано условие пластичности Треска–Сен-Венана, условие Мизеса или условие максимального приведенного напряжения [6]. Также при необходимости возможно на модельном уровне учесть пластическую сжимаемость среды [7]. Заметим, что для пластически несжимаемых сред скалярный множитель $\rho\rho_0^{-1}$ в (1.5) должен зависеть от упругой части деформации и тем самым $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(e_{ks})$. Если же среда пластически сжимаема, то $\rho\rho_0^{-1}$ зависит и от e_{ij}, и от p_{ij}. Именно такой общий случай будем рассматривать далее.

2. Изменение упругих деформаций и поворот тензора пластических деформаций при упругой разгрузке и последующем упругом нагружении. В процессах активного нагружения с учетом ассоциированного закона пластического течения, связывающего градиент к поверхности текучести с направлением для тензора скоростей пластических деформаций, основные характеристики движения и деформации среды имеют скоростной тип. Для процессов упругого деформирования достаточно определения тензора деформаций без обращения к тензору скоростей деформаций. Если же деформирование среды не связано с приобретением дополнительных необратимых деформаций, то изменение компонент p_{ij}^0 за счет вращения становится процессом, определяемым упругой динамикой. Остановимся на этом подробнее.

Предположим, что из свободного состояния частица $A(a_1,a_2,a_3)$ вначале переходит в точку пространства $B(y_1,y_2,y_3)$. Такой промежуточной конфигурации соответствуют тензор деформаций $\alpha_{ij}(y_k) = \alpha_{ij}^0$ и вектор перемещений $u_i^0 = y_i - a_i$, поэтому для α_{ij}^0 можем записать

$$\alpha_{ij}^0 = \frac{1}{2}(u_{i,j}^0 + u_{j,i}^0 - u_{k,i}^0 u_{k,j}^0), \quad u_{i,j}^0 = \frac{\partial u_i^0}{\partial y_j} \qquad (2.1)$$

В (2.1) функции α_{ij}^0 могут содержать как e_{ij}^0, так и ненулевые p_{ij}^0, если пластические деформации имеют место.

Начиная с момента времени $t = 0$ рассматриваем дополнительный процесс, приводящий к новым перемещениям $h_i(x_k, t)$, когда частица $B(y_1, y_2, y_3)$ переходит в точку $D(x_1, x_2, x_3, t)$ (текущая конфигурация). Поскольку в представлении Эйлера основными переменными являются пространственные координаты точек среды в текущий момент, то $y_i = x_i - h_i(x_k, t)$ и из (2.1), (1.1) получаем соотношения для компонент деформаций α_{ij} с учетом α_{ij}^0:

$$
\begin{gathered}
\alpha_{ij} = \frac{1}{2}(h_{i,j} + h_{j,i} - h_{k,i}h_{k,j}) + \alpha_{ij}^0 - \alpha_{ik}^0 h_{k,j} - \alpha_{jk}^0 h_{k,i} + \alpha_{ks}^0 h_{k,i} h_{s,j} = \\
= \frac{1}{2}(h_{i,j} + h_{j,i} - h_{k,i}h_{k,j}) + E_{ij}^0 - E_{ik}^0 h_{k,j} - E_{jk}^0 h_{k,i} + E_{ks}^0 h_{k,i} h_{s,j} + p_{ij}^0 - \\
- p_{ik}^0 (e_{kj}^0 + h_{k,j} - e_{ks}^0 h_{s,j}) - (e_{ik}^0 + h_{k,i} - e_{ks}^0 h_{s,i}) p_{kj}^0 + (h_{s,i}h_{t,j} + e_{is}^0 e_{tj}^0 + e_{is}^0 h_{t,j} + \\
+ e_{js}^0 h_{t,i} - e_{is}^0 e_{tk}^0 h_{k,j} - e_{ks}^0 h_{k,i} h_{t,j} - e_{tk}^0 h_{s,i} h_{k,j} + e_{ks}^0 e_{tr}^0 h_{k,i} h_{r,j}) p_{st}^0 \\
E_{ij}^0 = e_{ij}^0 - \frac{e_{ik}^0 e_{kj}^0}{2}
\end{gathered}
\tag{2.2}
$$

Далее предположим, что упругие деформации среды задаются формулой

$$
\begin{gathered}
E_{ij} = e_{ij} - \frac{e_{ik}e_{kj}}{2} = E_{ij}^0 + \frac{h_{i,j} + h_{j,i} - h_{k,i}h_{k,j}}{2} - E_{ik}^0 h_{k,j} - E_{jk}^0 h_{k,i} + E_{ks}^0 h_{k,i} h_{s,j} = \\
= E_{ij}^0 + \frac{1}{2}\{(\delta_{ik} - 2E_{ik}^0) h_{k,j} + (\delta_{jk} - 2E_{jk}^0) h_{k,i} - (\delta_{ks} - 2E_{ks}^0) h_{k,i} h_{s,j}\}
\end{gathered}
\tag{2.3}
$$

которая, очевидно, зависит от e_{ij}^0 (от $E_{ij}^0(e_{ij}^0)$) как от начального распределения и не зависит от p_{ij}^0. Считаем, что дополнительные перемещения h_i точек среды создают изменение упругих деформаций от значений E_{ij}^0 и не зависят от поля p_{ij}^0. В частности, если $p_{ij}^0 = 0$, то (2.3) задает связь упругих деформаций в текущей и промежуточной конфигурациях, что может быть удобным при решении некоторых чисто упругих задач. Если же $E_{ij}^0 = p_{ij}^0 = 0$, то (2.3) переходит в (1.1) с точностью до обозначений. Заметим, что в задачах нелинейного моделирования для точности анализа исключительно важно разграничивать все конфигурации, так как, формально положив $u_i(x_k, t) = h_i(x_k, t) + u_i^0(x_k)$, мы не смогли бы получить верную связь E_{ij} и E_{ij}^0.

Если наше предположение относительно связи E_{ij} с E_{ij}^0 и h_i верно, а для тензора p_{ij}^0 создается только жесткое вращение, то одновременно с (2.2) для α_{ij} должны быть выполнены соотношения

$$
\begin{gathered}
\alpha_{ij} = e_{ij} - \frac{e_{ik}e_{kj}}{2} + p_{ij}^0 + p_{ik}^0 (w_{jk} - e_{kj} - w_{sk}e_{sj}) + p_{jk}^0 (w_{ik} - e_{ki} - w_{sk}e_{si}) + \\
+ p_{st}^0 (w_{is}w_{jt} - e_{it}w_{js} - e_{ik}w_{ks}w_{jt} - w_{is}e_{tj} - w_{is}w_{kt}e_{kj} + e_{is}e_{tj} + e_{ik}w_{ks}e_{tj} + \\
+ e_{it}w_{ks}e_{kj} + e_{ik}w_{ks}w_{mt}e_{mj}) \\
c_{ij} = \delta_{ij} + w_{ij}, \quad p_{ij} = c_{ik}c_{js}p_{ks}^0
\end{gathered}
\tag{2.4}
$$

Сравнивая между собой соотношения (2.2), (2.3) и (2.4) при произвольных и не зависящих друг от друга p_{ij}^0 и $h_{i,j}$, получим, прежде всего, уравнение для определения w_{ij}:

$$(\delta_{sj} - e_{sj})w_{sk} = -h_{k,j} + e_{kj} - e_{kj}^0 + e_{sk}^0 h_{s,j} \tag{2.5}$$

Из (2.4), (2.5) получим

$$\begin{gathered} w_{ij} = (\delta_{ik} - e_{ik})^{-1}(-h_{k,j} + e_{kj} - e_{kj}^0 + e_{sk}^0 h_{s,j}) \\ c_{ij} = \delta_{ij} + w_{ij} = (\delta_{ik} - e_{ik})^{-1}(\delta_{ks} - h_{s,k})(\delta_{sj} - e_{sj}^0) \end{gathered} \tag{2.6}$$

Проверим ортогональность тензора c_{ij}:

$$c_{ik}c_{kj} = (\delta_{is} - e_{is})^{-1}(\delta_{sr} - 2e_{sr} + e_{sk}e_{kr})(\delta_{rj} - e_{rj})^{-1}$$

Записывая это уравнение в главных осях тензора e_{ij}, получаем компоненты δ_{ij} единичной матрицы, что доказывает ортогональность c_{ij}.

Дополнительно полученное решение (2.6) для w_{ij} необходимо протестировать на корректность, сравнивая в (2.2) и (2.4) все свертки, содержащие p_{st}^0. Для этого решение (2.6) подставим в множитель при p_{st}^0 в (2.4). Можно заметить, что требуемое равенство выполнимо, если равны между собой свертки $(w_{is} - e_{is} - w_{rs}e_{ri})(w_{jt} - e_{jt} - w_{kt}e_{kj})p_{st}^0$ и $(-h_{s,i} - e_{si}^0 + e_{sr}^0 h_{r,i})(-h_{t,j} - e_{tj}^0 + e_{tk}^0 h_{k,j})p_{st}^0$. Пропуская несложные, но громоздкие вычисления, скажем, что необходимое равенство здесь имеет место с учетом симметрии $p_{st}^0 = p_{ts}^0$.

Остановимся более подробно на некоторых важных свойствах полученных формул для деформаций. Для области среды, где идет разгрузка или повторное упругое нагружение, выше показано, что дополнительные перемещения h_i (отсчет которых для частицы начинается с индивидуального момента времени $t_0 \geq 0$ ее перехода к динамической стадии) связаны с упругими деформациями среды E_{ij}. Компоненты E_{ij} сложным образом зависят от E_{ij}^0 и $h_{i,j}$ согласно (2.3). Так как из (2.3) напрямую вычисляются только E_{ij}, то возникает дополнительная задача определения компонент e_{ij}, поскольку именно они необходимы для расчета поворотного тензора c_{ij}. Эту задачу можно решить, исходя из соосности тензоров E_{ij} и e_{ij}. Тогда по известным компонентам тензора E_{ij} находим его главные значения E_i и главные направления, а для главных значений тензора e_{ij} принимаем $e_i = 1 - \sqrt{1 - 2E_i}$. Очевидно, что для частных задач с упрощенной кинематикой можно избежать такой трудоемкой процедуры, а для некоторых задач уравнения связи $E_{ij}(e_{ks})$ могут быть решены напрямую. Подчеркнем еще раз, что малость компонент E_{ij} и E_{ij}^0 не исключает различного диапазона значений $h_{i,j}$ (к примеру, для стержней и тонких оболочек), что скажется на значениях c_{ij} и тем самым определит согласно (1.4) и (2.6) перераспределение p_{ij}^0, которое может стать важным.

Дополнительно заметим, что e_i могут определяться через E_i и формулой $e_i = 1 + \sqrt{1 - 2E_i}$. Вместе с этим при $p_{ij}^0 = 0$ легко получить

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - (V_{ik}V_{jk})^{-1}) = e_{ij} - \frac{1}{2}e_{ik}e_{kj}$$

где V_{ij} – симметричный левый тензор искажений. Отсюда можно выбрать $V_{ij} = (\delta_{ij} - e_{ij})^{-1}$. В этом случае с учетом масштаба собственных чисел V_{ij} получим $e_i = 1 - \sqrt{1 - 2E_i}$.

На основе полученных выше соотношений (1.4), (2.3), (2.6), связывающих упругие и пластические деформации в процессах разгрузки и повторного упругого нагружения, можно сделать ряд замечаний относительно характера передних фронтов таких процессов. В первую очередь заметим, что в зависимости от конкретной краевой задачи передним фронтом может быть или поверхность сильных разрывов – ударная волна, или же волна ускорений (как самостоятельная, так и совпадающая с началом центрированной волны). Таким образом, упругие динамические процессы и разгрузка предполагают возможность существования разнообразных динамических картин, свойства которых подробно изучены [9, 10]. Далее, не ставя здесь цели исследования всех типов этой динамики ввиду ограниченности объема статьи, сосредоточим внимание на ударных волнах и их свойствах. Для возможных ударных волн на основе (1.4), (2.3), (2.6) можно сделать важное заключение: в задачах упругой динамики упругопластической среды с ненулевыми пластическими деформациями p_{ij}^0 на переднем фронте возмущений (ударной упругой волне) могут иметь разрыв все деформации, включая пластические. Вместе с этим, такие ударные фронты не являются упругопластическими волнами нагрузки, поскольку все разрывы пластических деформаций будут сводиться к скачкам компонент p_{ij}^0 за счет наличия скачков в значениях компонент поворотного тензора c_{ij}. Насколько необходим учет изменения p_{ij}^0 при решении конкретной краевой задачи, диктуется степенью интереса исследователя и требуемой точностью решения. Полученные общие формулы можно существенно упростить в ряде случаев. Один из них обсудим далее.

3. Вариант малых упругих деформаций. Можно значительно упростить полученные выше соотношения, предполагая, что пластические деформации намного превосходят упругие. При этом, сохраняя представление деформаций тензором Альманзи (1.1), в формуле (1.3) отбросим все слагаемые, содержащие квадраты e_{ij}:

$$\alpha_{ij} = e_{ij} + p_{ij} - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} \tag{3.1}$$

Из (3.1) следует, что теперь упругие деформации задаются тензором e_{ij}. Как и раньше, изменения компонент α_{ij}, e_{ij}, p_{ij} свяжем с их отсчетными значениями α_{ij}^0, e_{ij}^0, p_{ij}^0 и дополнительными перемещениями $h_i(x_j,t)$. При таком подходе, по аналогии с (2.3) получим

$$\begin{gathered} E_{ij} = e_{ij} = e_{ij}^0 + \frac{1}{2}\{(\delta_{ik} - 2e_{ik}^0)h_{k,j} + (\delta_{jk} - 2e_{jk}^0)h_{k,i} - (\delta_{ks} - 2e_{ks}^0)h_{k,i}h_{s,j}\} \\ e_{ij}^0 = e_{ij}^0(x_k - h_k(x_s,t)) \end{gathered} \tag{3.2}$$

т.е. неизвестные функции $h_k(x_s,t)$ необходимо учесть и внутри аргументов функций e_{ij}^0.

Предполагая для тензора пластических деформаций только вращение как жесткого целого, изменение компонент p_{ij}^0 определим через матрицу поворота c_{ij}. Ее компоненты вычисляются аналогично (2.6) по формуле $c_{ij} = (\delta_{ik} - e_{ik})^{-1}(\delta_{ks} - h_{s,k})(\delta_{sj} - e_{sj}^0)$, но уже с другой связью между e_{ij} и E_{ij}. В рассматриваемом здесь линеаризованном по e_{ij} варианте (3.1) модели больших упругопластических деформаций теряется необходимость в дополнительных вычислительных действиях, позволяющих по известным E_{ij} вычислить e_{ij} из уравнений $E_{ij} = e_{ij} - e_{ik}e_{kj}/2$ общей модели. Ортогональность тензора c_{ij} проверим, вычисляя свертки $c_{ik}c_{jk}$ в системе координат, определяемой главными осями e_{ij}. При этом оказывается, что $c_{ik}c_{jk} = 0$ при $i \neq j$, а на главной диагонали свертки получим элементы вида $(1 - 2e_i)(1 - e_i)^{-2}$. Эти элементы равны единице, если, как и постулировалось исходно, пренебречь квадратами упругих деформаций. Поэтому с заявленной точностью получим $c_{ik}c_{jk} = \delta_{ij}$, т.е. c_{ij} определяет вращение p^0_{ij}. Для упрощенной модели в качестве примера можно ограничиться и линейным относительно e_{ij} законом связи напряжений σ_{ij} и деформаций e_{ij}, p_{ij}:

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0}(\lambda e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij})$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \det(\delta_{ij} - e_{ij})\sqrt{\det(\delta_{km} - 2p_{km})} \tag{3.3}$$

$$\sigma_{ij} = \sqrt{\det(\delta_{km} - 2p_{km})}(\lambda e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij})$$

Поскольку $p_{ij} = c_{ik}c_{js}p^0_{ks}$, то $\det(\delta_{km} - 2p_{km}) = \det(\delta_{km} - 2p^0_{km})$ и поэтому для частицы среды ее индивидуальный множитель $(\det(\delta_{km} - 2p^0_{km}))^{1/2}$ сохраняет постоянное значение. Для точки пространства этот же множитель будет изменяться за счет прихода в нее со временем новых частиц среды. Таким образом, если при вычислении σ_{ij} учитывается зависимость напряжений от полученной ранее пластической деформации, то в процессе разгрузки или последующего упругого нагружения можно утверждать, что упругие модули закона Гука становятся функциями координат и времени за счет множителя $\rho\rho_0^{-1}$ (λ, μ заменяются на $\rho\rho_0^{-1}\lambda$, $\rho\rho_0^{-1}\mu$), т.е. среда проявляет свойство неоднородности. Перейдем к вопросу о свойствах динамических процессов в такой среде при наличии $p^0_{ij} \neq 0$.

4. Упругие волны разрыва деформаций в упругопластической среде при наличии ненулевых пластических деформаций. Процесс разгрузки упругопластической среды, имеющей ненулевые пластические деформации ($p^0_{ij} \neq 0$), может быть связан со скачкообразным ослаблением краевых условий. В этом случае разгрузка осуществляется как динамический процесс, причем он может мгновенно или с запаздыванием сопровождаться образованием ударных волн (фронтов разрывов деформаций). Еще одна часто возникающая ситуация — динамическая интенсивная обработка материала, который ранее уже приобрел пластические деформации p^0_{ij} (т.е. в начальный момент ударного воздействия материал имеет остаточные деформации α^0_{ij}, включая p^0_{ij}). Будем считать, что ударная обработка не имеет цели увеличивать исходные пластические деформации. В обоих описанных случаях рассмотрим особенности движения по среде ударных волн, их типы, поведение на таких волнах упругих (e_{ij}) и пластических (p_{ij}) деформаций.

В качестве модельных соотношений принимаем (3.1), (3.3) при условии $u_i(x_k, t) = h_i(x_k,t) + u^0_i(x_k - h_k(x_j,t))$ для поля перемещений. Выбор такой модели несколько сокращает объем приводимых вычислений и не является принципиальным, т.к. переход к общим формулам (1.1), (1.3), (1.5) не представляет дополнительных трудностей. Рассмотрим одномерный динамический процесс, для которого $h_i(x_k,t) = h_i(x_1,t)$. Поле предварительных деформаций α_{ij}^0, включая пластические p_{ij}^0, считаем известным и согласующимся с предположением об одномерности поля перемещений h_i. Кроме того, для определенности предположим наличие в среде ненулевых компонент e_{11}^0, e_{21}^0, e_{31}^0 и p_{11}^0, p_{21}^0, p_{31}^0. Тогда из (3.1), (3.2) получим

$$\begin{gathered}
e_{11} = e_{11}^0 + (1 - 2e_{11}^0)\left(h_{1,1} - \frac{h_{1,1}^2}{2}\right) + 2F_0(1 - h_{1,1})^2 - 2F \\
e_{21} = e_{21}^0(1 - h_{1,1}) + \frac{h_{2,1}}{2}, \quad e_{31} = e_{31}^0(1 - h_{1,1}) + \frac{h_{3,1}}{2} \\
F = e_{21}^2 + e_{31}^2, \quad F_0 = (e_{21}^0)^2 + (e_{31}^0)^2, \quad e_{ij}^0 = e_{ij}^0(x_k - h_k(x_s,t))
\end{gathered} \tag{4.1}$$

Поле скоростей точек среды $v_i = \dot{u}_i + u_{i,j}v_j$ (если u_i^0 — перемещения статической или квазистатической задачи) связано с $h_i(x_1,t)$ формулами

$$v_1 = \frac{\dot{h}_1}{1 - h_{1,1}}, \quad v_2 = \dot{h}_2 + \frac{h_{2,1}\dot{h}_1}{1 - h_{1,1}}, \quad v_3 = \dot{h}_3 + \frac{h_{3,1}\dot{h}_1}{1 - h_{1,1}} \tag{4.2}$$

Как известно [8, 9], если в среде движется ударная волна, то на ней обязаны выполняться геометрические, кинематические и динамические условия совместности разрывов. В частности, определение характера ударной волны и ее скорости проводится на базе динамического условия совместности — следствия закона сохранения импульса

$$\begin{gathered}
[\sigma_{ij}]n_j = \rho^+(v_j^+ n_j - G)[v_i] \\
[\sigma_{ij}] = \sigma_{ij}^+ - \sigma_{ij}^-, \quad [v_i] = v_i^+ - v_i^-, \quad n_j n_j = 1
\end{gathered} \tag{4.3}$$

В (4.3) n_j — компоненты единичного вектора внешней нормали к ударной волне, направленного в сторону ее движения; верхние индексы “+” и “−” обозначают предельные значения проиндексированной величины перед ударной волной и сразу за ней; квадратными скобками здесь и далее обозначен скачок величины, заключенной в них; G — скорость движения ударной волны в направлении n_j.

Поскольку для (3.3) $\rho \approx \rho_0(\det(\delta_{km} - 2p_{km}))^{1/2}$ и $p_{km}^\pm = c_{ks}^\pm c_{mr}^\pm p_{sr}^0$, то на любой ударной волне $[\rho] = 0$ (т.е. $\rho^+ = \rho^-$). Из (3.3), отсутствия скачка плотности и (4.3) получим

$$[\lambda e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}]n_j = \rho_0(v_j^+ n_j - G)[v_i] \tag{4.4}$$

т.е. при определении типа ударной упругой волны и ее скорости на результаты анализа не влияет поле пластических деформаций p_{ij}^0. Заметим, что это же свойство имеет место и для общей модели (1.1), (1.3), (1.5). Учитывая, что для одномерных задач динамики $n_1 = 1$, $n_2 = n_3 = 0$, основными скачками при $[e_{ij}^0] = 0$ будем считать

$$[h_{i,1}] = \tau_i \tag{4.5}$$

Из (4.4) с учетом (4.1), (4.2) и (4.5) получим систему уравнений:

$$\begin{cases} (1-2e_{11}^0-4F_0)\left(1-h_{1,1}^+ + \dfrac{\tau_1}{2}\right)\tau_1 - 2[F] = R_1\tau_1 \\ \tau_2 - 2e_{21}^0\tau_1 = R_2(\tau_2(1-h_{1,1}^+) + h_{2,1}^+\tau_1) \\ \tau_3 - 2e_{31}^0\tau_1 = R_2(\tau_3(1-h_{1,1}^+) + h_{3,1}^+\tau_1) \end{cases}$$

$$R_1 = \frac{1}{C_1^2}\frac{(v_1^+-G)^2}{1-h_{1,1}^+ + \tau_1}, \quad R_2 = \frac{C_1^2}{C_2^2}R_1, \quad e_{i1}^0 = (e_{i1}^0)^+ = (e_{i1}^0)^-, \tag{4.6}$$

$$C_1^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho_0}, \quad C_2^2 = \frac{\mu}{\rho_0}$$

Легко проверить, что последние два уравнения системы (4.6) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} (1-R_2(1-h_{1,1}^+))[e_{21}] - e_{21}^+\tau_1R_2 &= 0 \\ (1-R_2(1-h_{1,1}^+))[e_{31}] - e_{31}^+\tau_1R_2 &= 0 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Предполагая скорость G ударной волны близкой к значению C_1 и тем самым считая в (4.7), что $1-R_2(1-h_{1,1}^+)\neq 0$, из (4.7) получим

$$\frac{[e_{21}]}{e_{21}^+} = \frac{[e_{31}]}{e_{31}^+} = \frac{R_2\tau_1}{1-R_2(1-h_{1,1}^+)} \tag{4.8}$$

Из (4.8) следует, что $e_{21}^+/e_{21}^- = e_{31}^+/e_{31}^-$, т.е. на данной ударной волне не меняется направленность предварительного сдвига. Такую волну, следуя [10], назовем квазипродольной. На этой волне $\tau_1\neq 0$, поэтому из первого уравнения системы (4.6) получим ее скорость

$$\begin{gathered} G_1 = v_1^+ + C_1\left\{\left((1-2e_{11}^0-4F_0)\left(1-h_{1,1}^+ + \frac{\tau_1}{2}\right) + 2F^+(2\varphi_0+\varphi_0^2\tau_1)\right)(1-h_{1,1}^+ + \tau_1)\right\}^{\frac{1}{2}} + \ldots \\ \varphi_0 = \frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}, \quad [F] = -F^+\tau_1(2\varphi_0+\varphi_0^2\tau_1) + \ldots \end{gathered} \tag{4.9}$$

Если же перед такой волной $e_{21}^+ = e_{31}^+ = 0$ ($F^+ = 0$), то она становится чисто продольной и ее скорость вычисляется как

$$G_1 = v_1^+ + C_1\left\{(1-2e_{11}^0-4F_0)\left(1-h_{1,1}^+ + \frac{\tau_1}{2}\right)(1-h_{1,1}^+ + \tau_1)\right\}^{1/2} + \ldots \tag{4.10}$$

В (4.10) входят $h_{1,1}^+$, v_1^+, т.к. в общем случае считаем, что ударная волна может образоваться не сразу и при этом будет двигаться по полю динамической деформации, созданной как компонентами e_{ij}^0, p_{ij}^0, так и дополнительными перемещениями $h_i(x_k,t)$. Если же продольная ударная волна является передним фронтом динамического процесса, то на ней $v_1^+ = h_{1,1}^+ = 0$, $e_{i1}^0 = e_{i1}^+$. При выводе соотношений (4.8)–(4.10), в отличие от [10], необходимо использовать в качестве базовых величин скачки функций $[e_{21}]$, $[e_{31}]$, τ_1, а не τ_1, τ_2, τ_3. Из (4.1) и (4.5) легко получить

$$[e_{21}] = \frac{\tau_2}{2} - e_{21}^0\tau_1, \quad [e_{31}] = \frac{\tau_3}{2} - e_{31}^0\tau_1$$

Таким образом, для нашей постановки задачи на величины скачков сдвиговых деформаций e_{21}, e_{31} влияют их начальные значения e_{21}^0, e_{31}^0 и все компоненты τ_1, τ_2, τ_3.

Из первого уравнения (4.6) и системы (4.7) следует, что возможна ударная волна, на которой $\tau_1 = 0$, поэтому и $[F] = 0$. Тогда для системы (4.7) существует единственная возможность вычисления скорости такой волны:

$$G_2 = C_2\left(1 + \frac{v_1^+}{C_2}\right) \tag{4.11}$$

Формула (4.11) в нашей модели не использует приближенных методов и является точной. Поскольку на данной ударной волне $\tau_1 = 0$ и $(e_{21}^+)^2 + (e_{31}^+)^2 = (e_{21}^-)^2 + (e_{31}^-)^2$, то она изменяет только направление предварительного сдвига без изменения его интенсивности. В [10] такая волна была названа вращательной.

Еще один тип ударной волны получим, считая в (4.6), (4.7), что $G \approx C_2$ и $1 - R_2(1 - h_{1,1}^+) \neq 0$ (т.е. $\tau_1 \neq 0$). В этом случае также выполняется условие $[e_{21}]/e_{21}^+ = [e_{31}]/e_{31}^+$, т.е. на ударной волне не меняется направленность предварительного сдвига. Одновременно справедливо приближенное соотношение

$$\tau_1 = 2\varphi_0(2e_{21}^+ - [e_{21}])[e_{21}] + \ldots \tag{4.12}$$

записанное при условиях $e_{31}^+ = 0$, $[e_{31}] = 0 = \tau_3/2 - e_{31}^0\tau_1$, которые достигаются за счет поворота координатных осей x_2, x_3. Второе уравнение в (4.7) в этом случае переходит в тождество, а из первого уравнения этой системы с учетом (4.12) получаем скорость такой ударной волны, называемой в [10] квазипоперечной:

$$\begin{aligned} G_3 &= v_1^+ + C_2(1 - 2\varphi_0 e_{21}^-(e_{21}^+ + e_{21}^-)) + \ldots = \\ &= v_1^+ + C_2(1 - 2\varphi_0(e_{21}^+ - [e_{21}])(2e_{21}^+ - [e_{21}])) + \ldots \end{aligned} \tag{4.13}$$

Если в среде до момента возникновения поля $h_i(x_1,t)$ не было сдвиговых деформаций, то $G_3 = G_2$ и передний фронт поперечного ударного процесса распространяется как одна волна, на которой меняются и направление, и интенсивность сдвига одновременно.

Полученные результаты показывают, что для рассматриваемых упругих процессов при условии их одномерности могут возникнуть только уже хорошо изученные [10, 11] упругие ударные волны. На их свойства и типы никак не влияет наличие пластической деформации. Это обстоятельство является исключительно важным при решении задач динамики нелинейных упругопластических сред, поскольку позволяет существенно разделить взаимодействующие процессы изменения упругих (e_{ij}) и пластических (p_{ij}) деформаций. Таким образом, решение краевых задач прежде всего проводим для поля $h_i(x_1,t)$ при известных e_{ij}^0 и краевых условиях, задающих возникновение $h_i(x_1,t)$ на границе среды, дополненных краевыми условиями, следующими из полученных выше соотношений для скоростей и типов ударных волн. Далее определяем изменение пластических деформаций по формулам

$$p_{ij} = c_{ik}c_{js}p_{ks}^0, \quad c_{ij} = (\delta_{ik} - e_{ik})^{-1}(\delta_{ks} - h_{s,k})(\delta_{sj} - e_{sj}^0) \tag{4.14}$$

Достаточно часто [4, 12] принято считать, что пластические деформации p_{ij} перестают меняться в частице среды с момента начала разгрузки. Это действительно имеет место в ряде задач, например, при одномерных радиальных течениях со сферической или цилиндрической симметрией, где $c_{ij} = \delta_{ij}$ (нет вращений за счет типа движения). Важно отметить, что из (4.14) следует обязательное возникновение скачков $[p_{ij}]$ на ударных волнах, поскольку $[p_{ij}] = (c_{ik}^{+}[c_{js}] + [c_{ik}]c_{js}^{+} - [c_{ik}][c_{js}])p_{ks}^{0}$. Эти скачки будут малыми величинами второго порядка малости относительно исходных значений p_{ij}^{0} для рассмотренных задач. Однако для тонких стержней, пластин и оболочек изменение p_{ij}^{0} может быть существенным. Заметим, в частности, что в плоских одномерных процессах из (4.1) и (4.14) следует такой эффект, как появление ненулевых компонент p_{22}, p_{33}, p_{23} даже при нулевых исходных значениях p_{22}^{0}, p_{33}^{0}, p_{23}^{0}. Еще раз подчеркнем, что наличие скачков $[p_{ij}]$ на упругих ударных волнах и все изменения p_{ij} за этими волнами связаны только с их перераспределением за счет поворота и перемещения частиц среды и не создают дополнительных пластических деформаций. Поэтому анализ более сложных динамических процессов упругопластических волн нагрузки требует своих подходов, здесь не рассмотренных.

Уточним дополнительно возможность упрощения полученных соотношений, если нас не интересует детализация анализа упругого процесса и упругая задача решается как вспомогательная при уточнении p_{ij}. Для этого заметим, что формула для e_{11} в (4.1) содержит в качестве слагаемых величины F_0 и F, вычисляемые через квадраты e_{21}^{2}, e_{31}^{2}, $(e_{21}^{0})^{2}$, $(e_{31}^{0})^{2}$. Если во всех модельных соотношениях пренебречь второй и более высокими степенями упругих деформаций, то можно их отбросить и здесь. Тогда при $e_{11} = e_{11}^{0} + h_{1,1} - h_{1,1}^{2}/2$ переходим к системе условий совместности

$$\left(1 - h_{1,1}^{+} + \frac{\tau_1}{2}\right)\tau_1 - R_1\tau_1 = 0$$
$$(1 - R_2(1 - h_{1,1}^{+}))[e_{21}] - e_{21}^{+}\tau_1 R_2 = 0$$
$$(1 - R_2(1 - h_{1,1}^{+}))[e_{31}] + \tau_1 R_2 = 0$$

для которой возможны два типа ударных волн. В первом случае $\tau_1 \neq 0$, и тогда скорость волны квазипродольного типа определяем из условия $1 - h_{1,1}^{+} + \tau_1/2 - R_1 = 0$. При этом направление исходного сдвига сохраняется. Если же $\tau_1 = 0$, то $1 - R_2(1 - h_{1,1}^{+}) = 0$ и отсюда вычисляем скорость чисто поперечной волны. В этом случае нет необходимости решения исключительно сложной задачи сравнения между собой скоростей квазипоперечной и вращательной волн.

5. Некоторые замечания о решении автомодельных одномерных задач с ударными волнами. Выше было показано, что распределение p_{ij}^{0} не влияет на характер и скорости ударных упругих волн. Вместе с этим пластические деформации (если их влияние на напряжения учитывается) входят в формулы для σ_{ij} через общий скалярный множитель $\rho\rho_0^{-1}$. Для конкретной частицы среды, находящейся в упругом процессе, данный множитель сохраняет свое исходное значение, заданное через p_{ij}^{0} при условии $\rho\rho_0^{-1}(y_k) = \rho\rho_0^{-1}(x_k - h_k(x_j, t))$, т.е. становится зависимым от искомых перемещений. Для уравнений движения среды

$$\sigma_{ij,j} = \rho(\dot{v}_i + v_{i,j}v_j) \tag{5.1}$$

дифференцируя σ_{ij} при отличных от констант значениях p_{ij}^0, получим

$$\sigma_{ij,j} = \tilde{\rho},_s (\delta_{sj} - h_{s,j})(\lambda e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}) + \tilde{\rho}(\lambda e_{kk,j} + 2\mu e_{ij,j})$$

$$\tilde{\rho} = \sqrt{\det(\delta_{km} - 2p_{km})}, \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}(y_k) = \tilde{\rho}(x_k - h_k(x_j,t)), \quad \tilde{\rho},_s = \frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial y_s}$$

Форма этих соотношений показывает, что начальное для упругой задачи распределение $p_{ij}^0(y_k)$ создает эффект неоднородных свойств среды. Только таким образом пластические деформации могут оказывать влияние на определение поля $h_i(x_k,t)$. В [12, 13] представлены решения автомодельных упругих задач при условии, что пластические деформации p_{ij}^0 присутствуют в среде как набор констант (без учета перераспределения p_{ij}^0). Согласно представленным здесь выводам, для линейного по упругим деформациям варианта модели (3.1)–(3.3) упругопластической среды и набора постоянных p_{ij}^0 из (5.1) получим уравнение

$$\tilde{\rho}(\lambda e_{kk,j} + 2\mu e_{ij,j}) = \rho_0\tilde{\rho}(\dot{v}_i + v_{i,j}v_j) \tag{5.2}$$

Сокращая (5.2) на постоянное в этом случае значение $\tilde{\rho}$, приходим к обычным уравнениям упругой модели относительно $h_i(x_k,t)$. Это позволяет при решении данного типа задач обращаться к уже известным подходам для чисто упругой постановки, что, безусловно, ускорит и упростит методику. К сожалению, далеко не всегда распределение упругих деформаций и связанных с ними напряжений можно найти для упругопластической задачи по решению чисто упругой задачи. Связано это с тем, что напряжения в чисто упругих задачах подчиняются дополнительным условиям, исходя из согласования с тензором деформаций и условий совместности деформаций. При наличии $p_{ij}^0 \neq 0$ в общем случае упругие деформации (e_{ij}^0 и e_{ij}) не должны удовлетворять условиям совместности, поэтому решение (5.1) не может быть найдено среди решений для упругих задач. В нашем случае в каждой из областей тривиального решения автомодельной задачи значения e_{ij} постоянны и условия совместности выполняются автоматически. Поэтому упругопластическая постановка сводится к соответствующей по e_{ij}^0 упругой задаче, которая решается самостоятельно, а затем в областях тривиального решения происходит перерасчет пластических деформаций. Если в решении исходной задачи присутствует центрированная волна, то внутри нее при $p_{ij}^0 = \text{const}$ уравнение движения (5.1) зависит от пластических деформаций как от постоянного множителя, который можно сократить также, как в областях тривиального решения. Таким образом, получаем возможность полного разделения решения исходной автомодельной задачи на две последовательные процедуры: решение упругой задачи и последующий перерасчет пластического поля.

Заключение. Итак, для модели [3] больших упругопластических деформаций и упругих процессов разгрузки с возможной последующей упругой нагрузкой проведено разделение тензора полных деформаций на упругую и пластическую составляющие с помощью вектора дополнительных перемещений. Построена матрица поворота, отвечающая за перераспределение пластических деформаций. В результате анализа одномерных динамических упругих процессов для среды с предварительными необратимыми деформациями показано, что на каждой из образовавшихся ударных волн меняются скачком все деформации, как упругие, так и пластические, причем последние – только за счет поворота частиц среды. Для автомодельных задач при постоянстве предварительного пластического поля ($p_{ij}^0 = \text{const}$) необратимые деформации не влияют ни на краевые условия упругой задачи (условия на ударных волнах), ни на ее уравнения движения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Левитас В.И.* Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев: Наук. думка, 1987. 232 с.
2. *Димитриенко Ю.И.* Нелинейная механика сплошной среды. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 624 с.
3. *Шитиков А.В., Быковцев Г.И.* Конечные деформации упругопластических сред // Доклады АН СССР. 1990. Т. 311. № 1. С. 59–62.
4. *Буренин А.А., Ковтанюк Л.В.* Большие необратимые деформации и упругое последействие. Владивосток: Дальнаука, 2013. 312 с.
5. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
6. *Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д.* Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
7. *Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д.* Математическая теория пластичности. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 2003. 704 с.
8. *Hadamard J.* Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique, par Jacques Hadamard. Paris: A. Hermann, 1903.
9. *Бленд Д.Р.* Нелинейная динамическая теория упругости. М.: "Мир", 1972. 183 с.
10. *Куликовский А.Г., Свешникова Е.И.* Нелинейные волны в упругих средах. М.: "Московский Лицей", 1998. 412 с.
11. *Буренин А.А., Чернышов А.Д.* Ударные волны в изотропном упругом пространстве // Прикладная математика и механика. 1978. Т. 42. Вып. 4. С. 711–717.
12. *Mantsybora A.A., Rusanov M.M.* Deforming of Elastic-Plastic Medium with Self-Similar Restriction // Key Engineering Materials. 2016. V. 685. P. 305–309.
13. *Буренин А.А., Дудко О.В., Манцыбора А.А.* О распространении обратимых деформаций по среде с накопленными необратимыми деформациями // Прикладная механика и техническая физика. 2002. № 6. С. 162–170.