ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
2019, № 2, с. 29–47

УДК 539.37

СВОЙСТВА СЕМЕЙСТВА ДИАГРАММ ДЕФОРМИРОВАНИЯ, ПОРОЖДАЕМЫХ НЕЛИНЕЙНЫМ СООТНОШЕНИЕМ РАБОТНОВА ДЛЯ РЕОНОМНЫХ МАТЕРИАЛОВ

© 2019 г. А. В. Хохлов

НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
e-mail: andrey-khokhlov@ya.ru

Поступила в редакцию 22.12.2016 г.
После доработки 23.08.2017 г.
Принята к публикации 08.11.2017 г.

Аналитически исследовано нелинейное определяющее соотношение Работнова с двумя произвольными материальными функциями для реономных материалов в одномерном случае. Выведено уравнение семейства теоретических диаграмм деформирования при постоянных скоростях нагружения, аналитически изучены их общие качественные свойства в зависимости от свойств материальных функций: интервалы монотонности и выпуклости диаграмм деформирования, характер их зависимости от скорости нагружения, существование и вид предельных кривых при стремлении скорости нагружения к нулю или бесконечности, условия существования точки перегиба и предельного напряжения (напряжения течения), условия обрыва (моделирования разрушения), формулы для мгновенного и длительного модулей, условия их конечности и отличия от нуля.

На основе сравнения свойств теоретических диаграмм с типичными свойствами экспериментальных диаграмм реономных материалов установлены минимальные ограничения на материальные функции, обеспечивающие адекватное описание основных реологических эффектов, найдены индикаторы применимости определяющего соотношения и те эффекты, которые оно не может описать ни при каких материальных функциях. Выявлены характерные особенности диаграмм деформирования трех основных классов моделей: с регулярной, неограниченной и сингулярной функцией релаксации. Арсенал возможностей определяющего соотношения Работнова сопоставлен с возможностями линейного определяющего соотношения вязкоупругости (из которого оно получено введением второй материальной функции), указаны дополнительные эффекты, которые нелинейное определяющее соотношение способно описывать по сравнению с линейным за счет второй материальной функции.

Ключевые слова: наследственность, разносопротивляемость, диаграммы деформирования, скоростная чувствительность, мгновенный модуль, длительный модуль, регулярные и сингулярные модели, идентификация

DOI: 10.1134/S0572329919020077

1. Введение. Нелинейное определяющее соотношение (ОС) Работнова [1–19] описывает одномерные изотермические процессы деформирования структурно-стабильных (нестареющих) реономных материалов, связывая истории напряжения $\sigma(t)$ и деформации $\varepsilon(t)$ в данной точке тела:

$$\varphi(\varepsilon(t)) = \int_0^t \Pi(t-\tau)d\sigma(\tau), \quad \sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau)\varphi'(\varepsilon(\tau))d\varepsilon(\tau), \quad t \geq 0 \tag{1.1}$$

Здесь $\Pi(t)$, $R(t)$ – функции ползучести и релаксации, а $\varphi(u)$ – дополнительная материальная функция (МФ), введенная Ю.Н. Работновым [1–3]. Входные процессы ($\sigma(t)$ или $\varepsilon(t)$) предполагаются кусочно непрерывными и кусочно-гладкими на любом отрезке. ОС (1.1) обобщает линейное ОС вязкоупругости (получающееся при $\varphi(u) = u$):

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau)d\sigma(\tau), \quad \sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau)d\varepsilon(\tau), \quad t \ge 0 \tag{1.2}$$

Если $\Pi(0+) \ne 0$ (модель регулярна), то $R(0+) < \infty$ и на линеале непрерывных кусочно гладких при $t \ge 0$ функций (взаимно обратные) операторы (1.1) представимы в виде

$$\varphi(\varepsilon(t)) = \Pi(0)\sigma(t) + \int_0^t \dot{\Pi}(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau, \quad \sigma(t) = R(0)\varphi(\varepsilon(t)) + \int_0^t \dot{R}(t-\tau)\varphi(\varepsilon(\tau))d\tau, \tag{1.3}$$

ОС (1.3) с регулярной ФП было предложено Ю.Н. Работновым еще в 1948 г. [1]. В [1–3] ОС (1.3) называлось “соотношением наследственной теории ползучести” и “пластичности”, в [4] было дано название “нелинейная теория наследственности”. В англоязычных публикациях ОС (1.1) называется уравнением квазилинейной вязкоупругости (“QLV”) [20–37], а его автором считается Y.C. Fung со ссылками на его работы 1970–1990-х годов [20, 25]. В [1–19] ОС (1.1) прилагались к описанию поведения металлов и сплавов, стеклопластиков, графита, а в [20–37] – связок, сухожилий и др. биологических тканей. В работах [1–19] авторы рассматривали случай малых деформаций (и номинальных напряжений), выбирали ядро ползучести степенным или дробно-экспоненциальным ядром Работнова, его параметры (3–4 штуки) находили по кривым ползучести в линейной области (где $\varphi(u) = u$), а затем МФ $\varphi(u)$ определяли численно в отдельных точках по экспериментальным кривым ползучести и деформирования – без использования аналитических представлений для φ (за исключением полинома четвертого порядка в [5, 9] и степенной функции $\varphi(u) = cu^{0.75}$ в [17]), “при помощи программ Maple и Excel” [17]. Тщательное аналитическое изучение общих свойств основных квазистатических кривых (кривых ползучести и релаксации с произвольной начальной стадией нагружения до заданного уровня, ползучести при ступенчатых нагружениях, диаграмм деформирования при постоянных и кусочно постоянных скоростях нагружения, при циклическом нагружении и др.), порождаемых ОС (1.1) с произвольными МФ $\Pi(t)$ и $\varphi(u)$, систематическое исследование комплекса моделируемых (и не моделируемых) эффектов в зависимости от характеристик МФ и необходимых феноменологических ограничений на МФ φ не проводились в [1–37]; границы области применимости ОС (1.1) и их маркёры (за исключением требования подобия изохронных кривых ползучести в [1–9] и подобия кривых релаксации в [31–33]) выявлены не были. Аналитическое исследование этих свойств в общем виде (даже при малых деформациях в одноосном случае) или хотя бы краткий перечень отсутствуют в литературе по вязкоупругости, вязкопластичности, ползучести и механике полимеров, в частности, в монографиях [3, 9, 32, 38–48]).

Цель данной статьи (и всего цикла работ [49–52], посвященных анализу ОС (1.1)) – восполнить указанные пробелы, выявить возможности и преимущества ОС (1.1) (как по сравнению с линейным ОС (1.2), так и с более сложными нелинейными ОС) и способствовать расширению и уточнению сферы его обоснованного применения в моделировании поведения реономных материалов с выраженной нелинейной наследственностью и скоростной чувствительностью (полимеров, композитов, пен, керамик, асфальтобетонов, твердых топлив, алюминиевых и титановых сплавов, нержавеющих сталей, связок, сухожилий, стенок сосудов и других биологических тканей). Задача данной статьи – изучение общих свойств диаграмм деформирования (ДД) при постоянных скоростях нагружения, порожденных ОС (1.1) с произвольными МФ

П и φ, – как унаследованных от ДД линейного ОС (1.2), так и новых, специфичных для нелинейного ОС (1.1).

К ОС (1.1) применяется технология качественного анализа определяющих соотношений для реономных материалов, разработанная ранее автором в цикле работ [53–63]. В них изучены два новых нелинейных ОС, учитывающие историю деформирования (или нагружения) и старение материала [53–55], линейное ОС вязкоупругости (1.2) [56–59] и нелинейная модель типа Максвелла с двумя МФ [60–63]. Все эти ОС, как и (1.1), нацелены на описание комплекса основных реологических эффектов, типичных для материалов, обладающих наследственностью и высокой чувствительностью к скорости деформирования (нагружения).

В статье приняты следующие сокращения и обозначения: МФ – материальные функции; $(\omega_-;\,\omega_+)$ и $(\underline{x};\,\overline{x})$ – области определения и значений МФ $\varphi(u)$, $\overline{x} := \sup\varphi(x)$; ω – краткое обозначение для ω_+; $D_\varphi := [0;\omega)$; $\Phi = \varphi^{-1}$, $D_\Phi := [0;\overline{x})$; ДД – диаграмма деформирования $\sigma(\varepsilon, b)$ при постоянной скорости нагружения (СН) b; ФР и ФП (КР, КП) – функции (кривые) релаксации и ползучести; $\mathrm{h}(t)$ – функция Хевисайда, $\delta(t)$ – дельта-функция; РеМ – регулярные модели (с $\Pi(0) \neq 0$); СиМ – сингулярные модели (ФР содержит слагаемое $\eta\delta(t)$); $y(0) := y(0+)$ – предел функции $y(t)$ справа в т. $t = 0$.

2. Материальные функции соотношения Работнова. Линейное ОС вязкоупругости (1.2), инвариантное относительно сдвигов по времени, получается из (1.1) при $\varphi(u) = u$ и содержит лишь одну независимую МФ, так как ФП и ФР связаны условием взаимной обратности интегральных операторов (1.2) (“the interconversion relation”):

$$\int_0^t \Pi(t-\tau)R(\tau)d\tau = t, \quad \text{или} \quad \int_0^t \dot{\Pi}(t-\tau)R(\tau)d\tau + \Pi(0)R(t) = 1, \quad t > 0 \tag{2.1}$$

Зная ФР, можно найти ФП из уравнения (2.1), и обратно. Поэтому из трех МФ φ, П, R в ОС (1.1) лишь две независимы, а тождество (2.1) является условием взаимной обратности операторов (1.1), отображающих друг в друга функции $\sigma(t)$ и $e(t) = \varphi(\varepsilon(t))$.

На ФП и ФР в ОС (1.1) наложим априори те же минимальные ограничения, что и в линейной теории: $\Pi(t)$ и $R(t)$ должны быть положительными и дифференцируемыми на интервале $(0;\infty)$, $\Pi(t)$ – возрастающей, выпуклой вверх, а ФР $R(t)$ – убывающей и выпуклой вниз на $(0;\infty)$ (ФР может иметь интегрируемую особенность или δ-сингулярность в точке $t = 0$). Из этих условий следует, в частности, существование пределов $\Pi(0+) \geq 0$, $\dot{\Pi}(+\infty) \geq 0$ и $R(+\infty) \geq 0$ [57].

Свойства основных теоретических кривых, порождаемых линейным ОС вязкоупругости (1.2) с произвольной ФП, и необходимые феноменологические ограничения на ФП и ФР проанализированы в цикле работ [56–59] и др. Анализ, в частности, показал, что среди моделей, описываемых ОС (1.2) с различными ФР и ФП, необходимо различать (как минимум) три основных класса, поскольку качественные свойства базовых кривых моделей этих классов (а также особенности постановки и решения краевых задач) заметно отличаются: 1) регулярные модели (РеМ) – у которых $\Pi(0) \neq 0$ (тогда мгновенный модуль $E = R(0+) = 1/\Pi(0+)$ конечен, а ОС (1.2) и первое уравнение (2.1) сводятся к уравнениям Вольтерры *второго* рода (1.3) с $\varphi(u) = u$ и (2.1)); 2) сингулярные (СиМ) – с ФР, содержащей слагаемое $\eta\delta(t)$, $\eta > 0$ (ФР $R = \eta\delta(t)$ задает ньютоновскую жидкость с ОС $\sigma = \eta\dot{\varepsilon}$ и входит слагаемым в ФР “половины” реологических моделей из пружин и демпферов), тогда $\Pi(0) = 0$ и $\dot{\Pi}(0) = \eta^{-1}$; 3) нерегулярные модели с неограниченной ФР (НеМ), не содержащей слагаемого $\eta\delta(t)$, но имеющей интегрируемую особенность в т. $t = 0$ ($R(0+) = +\infty$). Третий класс занимает промежуточное положение между первыми двумя. К нему относится, например, ФР

$R(t) = At^{-u}$, $u \in (0;1)$, $A > 0$, задающая “фрактальный” элемент “фрактальных” моделей (“fractional models”); соответствующая ФП имеет вид $\Pi(t) = A^{-1}C(u)t^u$, $C(u) = (u\pi)^{-1}\sin u\pi$, и обладает не только свойством $\Pi(0) = 0$, как и СиМ, но и свойством $\dot{\Pi}(0) = \infty$, переходным к $\Pi(0) \neq 0$, характеризующему РеМ.

Линейным ОС (1.2) задаются, в частности, все модели, собранные из линейных пружин и демпферов посредством параллельных и последовательных соединений (ФП классических реологических моделей будут использованы для иллюстрации общих свойств ДД ОС (1.1)). Можно доказать, что множество всех несократимых n-звенных моделей распадается ровно на два класса эквивалентности: РеМ-n и СиМ-n (структурно различные модели эквивалентны, если задаются одинаковыми семействами ФП или ФР). В частности, эквивалентны друг другу трехзвенные РеМ Пойнтинга–Томсона и Кельвина ([57], фиг. 1а), а все четыре РеМ-4 ([57], фиг. 1в) эквивалентны модели стандартного тела (последовательному соединению моделей Максвелла и Фойгта, т.е. РеМ-2 и СиМ-2). Например, семейство

$$\Pi(t) = \alpha t + \beta - \gamma e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0, \quad \alpha, \beta \geq 0, \quad \gamma \in [0, \beta] \tag{2.2}$$

удовлетворяет всем ограничениям на ФП. Оно порождает все РеМ-4 при $\gamma \in (0;\beta)$, $\alpha, \beta > 0$, а при $\alpha = 0$ – все РеМ-3. Так как $\Pi(0) = \beta - \gamma$, то ФП (2.2) порождает СиМ, когда $\gamma = \beta$: при $\lambda\beta = 0$ – ньютоновскую жидкость, при $\alpha = 0$ – модель Фойгта (СиМ-2), при $\alpha > 0$ – все СиМ-3. При $\gamma = 0$ семейство (2.2) дает модель Максвелла.

На МФ $\varphi(u)$ в ОС (1.1) наложим следующие минимальные априорные требования (анализ покажет, нужно ли дополнить их список): функция $\varphi(u)$, $u \in (\omega_-;\omega_+)$, непрерывно дифференцируема и строго возрастает на $(\omega_-;0) \cup (0;\omega_+)$ (где $\omega_-\omega_+ < 0$), причем $\varphi(0+) = \varphi(0-) = 0$ (иначе процессу $\varepsilon(t) \equiv 0$ соответствует ненулевой отклик $\sigma(t)$). Формально возможны случаи $\omega_- = -\infty$ и $\omega_+ = +\infty$, и случай $\varphi'(0) = +\infty$. Для материалов с одинаковым поведением при растяжении и сжатии МФ $\varphi(u)$ нечетна, $\omega_- = -\omega_+$. Из возрастания $\varphi(u)$ следует существование обратной функции $\Phi := \varphi^{-1}$ на промежутке $D_\Phi = (\underline{x};\overline{x})$, где $\overline{x} := \sup\varphi(u) = \varphi(\omega_+ - 0)$, $\underline{x} := \inf\varphi(u) = \varphi(\omega_- + 0)$, и обратимость ОС (1.1). Величины $\overline{x}$ и $\underline{x}$ – важные характеристики МФ φ и Φ, существенно влияющие на поведение теоретических кривых ОС (1.1) [49–52].

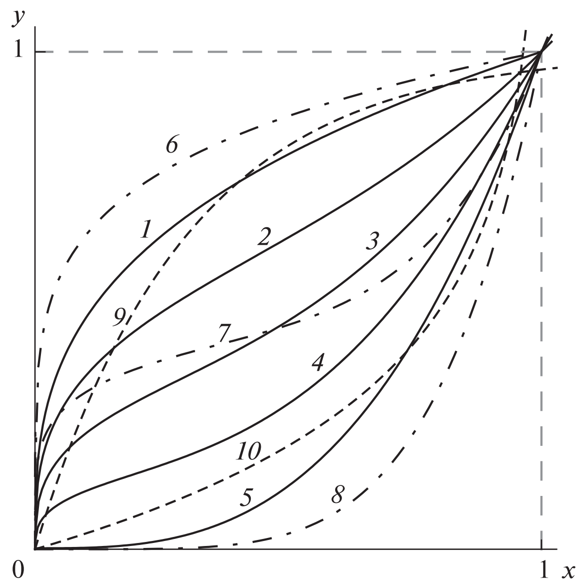
Конечность ω_+ или $\overline{x}$ (или ω_- и $\underline{x}$) означает, что, благодаря такому выбору МФ, в ОС (1.1) встроен критерий разрушения при растяжении (при сжатии), обеспечивающий обрыв теоретических кривых (ползучести, деформирования и др.) в некоторый момент времени. В этом случае их можно интерпретировать как материальные параметры, через которые выражаются предел прочности, предельная деформация, время разрушения [49]. Например, задача моделирования с помощью ОС (1.1) дробно-линейной зависимости Шестерикова-Юмашевой [64] для скорости ползучести от напряжения $r(x) = Ax/(\sigma_* - x)$, $x \in [0;\sigma_*)$, приводит к МФ

$$\varphi(u) = \sigma_*(1 - e^{-u/A}), \quad u \geq 0; \quad \Phi(x) = A\ln[\sigma_*/(\sigma_* - x)], \quad x \in [0;\sigma_*) \tag{2.3}$$

с $\omega_+ = +\infty$ и с конечным $\overline{x} = \sigma_*$ [49].

Для задания МФ φ или Φ удобно, например, пятипараметрическое семейство (оно будет использовано для иллюстрации свойств диаграмм деформирования ОС (1.1))

$$\begin{gathered} y(x) = A[\vartheta(x/C)^n + (1 - \vartheta)(x/C)^m], \quad x \geq 0, \\ n > 1, \quad m < 1, \quad \vartheta \in [0;1], \quad A, C > 0 \end{gathered} \tag{2.4}$$



Фиг. 1

При любых значениях параметров (кроме $\vartheta = 0;1$) $y(0) = 0$, $y'(0) = \infty$, $y(C) = A$, функция $y(x)$ возрастает и имеет точку перегиба

$$\tilde{x} = Cq(n, m, \vartheta)^{1/(n-m)}, \quad q := m(1-m)(1-\vartheta)\left[n(n-1)\vartheta\right]^{-1} \tag{2.5}$$

Весовой параметр $\vartheta \in (0;1)$ позволяет совместить точку перегиба (2.5) с любой точкой $x > 0$ и описать кривые ползучести со всеми тремя стадиями [49]. Семейство (2.4) убывает по ϑ на интервале $x \in (0;C)$ и возрастает на $(C;\infty)$. В случае $m = 1/n$ семейство (2.4) стремится при $n \to 1+0$ к линейной функции $y = AC^{-1}x$, то есть МФ φ или Φ в ОС (1.1) “исчезает” и нелинейное ОС превращается в линейное ОС (1.2).

На фиг. 1 приведены графики функций (2.4) с $m = 1/n$, $n = 3$, $A = C = 1$ и $\vartheta = 0$; 0.25; 0.5; 0.75; 1 (линии *1–5*) и графики при $n = 5$ и $\vartheta = 0$; 0.5; 1 (штрих-пунктирные линии *6–8*). С ростом n $\varphi'(x)$ в окрестностях точек $x = 0$ и $x = 1$ возрастают. Штриховые линии *9*, *10* – графики взаимно обратных МФ (2.3) с $\sigma_* = 1$, $A = 0.25$.

При $u < 0$ можно определить $\varphi(u)$ формулой $\varphi(u) = -y(-u)$, причем для материала с разными свойствами при растяжении и сжатии можно взять разные наборы пяти параметров функции (2.4) при $u < 0$ и $u > 0$ (условия $y(0) = 0$, $y'(0) = \infty$ обеспечивают гладкую склейку МФ φ в точке $u = 0$ при любом выборе параметров).

3. Семейства кривых релаксации и ползучести ОС Работнова. Кривые релаксации (КР), порождаемые ОС (1.1) при мгновенном деформировании $\varepsilon(t) = \bar{\varepsilon}h(t)$ до уровня $\bar{\varepsilon} \in (\omega_-;\omega_+)$, имеют вид

$$\sigma(t, \bar{\varepsilon}) = \varphi(\bar{\varepsilon})R(t), \quad t > 0 \tag{3.1}$$

КР с $\bar{\varepsilon} > 0$ убывают и выпуклы вниз по t и возрастают по $\bar{\varepsilon}$ (т.е. ОС (1.1) воспроизводит основные качественные свойства типичных экспериментальных КР), ибо $R(t)$ убывает и выпукла вниз, а $\varphi(u)$ возрастает. КР (3.1) подобны и имеют точно такую же форму, как и у линейного ОС (1.2), но зависимость КР от $\bar{\varepsilon}$ уже не линейна, а задается

МФ φ. Существенно, что МФ φ не влияет на форму КР и на время (спектр, скорость) релаксации. Подобие КР материала – важный индикатор применимости ОС (1.1). Разделение переменных в уравнении (3.1) позволяет, в принципе, определить обе МФ по нескольким КР материала для разных $\bar{\varepsilon}$ (если наблюдается их подобие).

Кривые ползучести ОС (1.1) при мгновенном нагружении $\sigma(t) = \bar{\sigma}\, h(t)$ имеют вид:

$$\varepsilon(t,\bar{\sigma}) = \Phi(\bar{\sigma}\Pi(t)) \quad \text{при} \quad \underline{x} < \bar{\sigma}\Pi(t) < \bar{x} \tag{3.2}$$

где $\bar{x} := \sup\varphi(u)$, $\underline{x} := \inf\varphi(u)$. Семейство КП (3.2) возрастает по $\bar{\sigma}$ (ибо Φ возрастает), а при любом $\bar{\sigma} > 0$ (будем рассматривать этот случай) КП возрастает по t на всем промежутке, где $\bar{\sigma}\,\Pi(t) < \bar{x}$. Если $\bar{x} = \infty$ (как для линейного ОС (1.2)), то КП с $\bar{\sigma} > 0$ определены при всех $t \ge 0$. Если же $\bar{x} < \infty$, то $\bar{\sigma}\Pi(t) \in D_\Phi$ только при $\bar{\sigma} < \bar{x}/\Pi(0)$ и $\Pi(t) < \bar{x}/\bar{\sigma}$; это означает, что КП (3.2) существует только для напряжений $\bar{\sigma} < \sigma_+$, $\sigma_+ := \bar{x}/\Pi(0)$ и обрывается в момент t_*, удовлетворяющий уравнению $\Pi(t_*) = \bar{x}/\bar{\sigma}$, если $\bar{\sigma} > \bar{x}/\Pi(\infty)$ (если $\Pi(\infty) < \infty$, то КП (3.2) с $\bar{\sigma} < \bar{x}/\Pi(\infty)$ не обрывается).

Таким образом, если $\bar{x} < \infty$ и $\Pi(0) \ne 0$, то параметр $\sigma_+ := \bar{x}/\Pi(0) = E\bar{x}$ имеет смысл предела (мгновенной) прочности при растяжении, и в ОС (1.1) уже встроен критерий разрушения. Если $\omega_+ < \infty$, разрушение при растяжении происходит по достижению критической деформации: $\varepsilon_* := \Phi(\bar{x}) = \omega_+$ (такой физический смысл можно придать параметру ω_+). Уравнение кривой длительной прочности при растяжении:

$$t_* = p(\bar{x}/\bar{\sigma}), \quad E_\infty\bar{x} < \bar{\sigma} < E\bar{x},$$

где $p(x)$ – обратная функция к $\Pi(t)$, $E := 1/\Pi(0)$, $E_\infty := 1/\Pi(\infty)$ – мгновенный и длительный модули диаграмм деформирования линейного ОС (1.2) [56, 57].

Изохронные КП $\sigma = \varphi(\varepsilon)/\Pi(t)$ подобны; это один из необходимых признаков применимости ОС (1.1). В работах [1–19] подобие изохронных КП материала трактовалось как достаточное условие применимости ОС (1.3).

Подробный анализ свойств кривых релаксации, ползучести и длительной прочности, порождаемых ОС (1.1), проведен в работах [49–52].

4. Свойства диаграмм деформирования с постоянной скоростью нагружения. Найдем отклик ОС (1.1) на процессы вида $\sigma = bt$, $t > 0$, где $b > 0$ – скорость нагружения:

$$\varphi(\varepsilon(t)) = \int_0^t \Pi(t-\tau)b\,d\tau = bQ(t), \quad Q(t) := \int_0^t \Pi(\tau)d\tau$$

то есть $\varepsilon(t) = \Phi(bQ(t))$ при $bQ(t) \in D_\Phi$. Это параметрическое задание ДД. Удобно переписать его в форме $\varepsilon(t) = \Phi(\sigma\Theta(t))$, где $\Theta(t) := t^{-1}Q(t)$ (свойства усреднения ФП $\Theta(t)$ смотри в [56, 57]). Очевидно, $Q(0) = 0$, $\Theta(0+) = \Pi(0)$, $Q(\infty) = \infty$, $\Theta(\infty) = \Pi(\infty)$, а при $t > 0$: $Q(t) > 0$, $\dot{Q}(t) = \Pi(t) > 0$, $\ddot{Q}(t) = \dot{\Pi}(t) > 0$, $\dddot{Q}(t) = \ddot{\Pi}(t) < 0$. Для ФП вида (2.2), например, $Q(t) = 0.5\alpha t^2 + \beta t - \gamma\lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda t})$.

Исключив параметр $t = \sigma/b$ (или $t = F(\varphi(\varepsilon)/b)$, $F = Q^{-1}$) из тождества $\varphi(\varepsilon(t)) = bQ(t)$, получим семейство ДД в виде $\varepsilon = \varepsilon(\sigma, b)$ и в *явной* форме $\sigma = \sigma(\varepsilon, b)$:

$$\varepsilon(\sigma,b) = \Phi(bQ(\sigma/b)) \text{ при } bQ(\sigma/b) < \bar{x}, \text{ или } \sigma(\varepsilon,b) = bF(\varphi(\varepsilon)/b), \ \varepsilon \in [0,\omega) \tag{4.1}$$

где ω – краткое обозначение для ω_+. Так как $Q(0) = 0$ и $Q(\infty) = \infty$, то обратная к Q функция $F(x)$ определена на всем луче $x \ge 0$, $F(0) = 0$, $F(\infty) = \infty$.

Уравнение (4.1) можно записать в виде

$$\sigma(\varepsilon,b) = \varphi(\varepsilon)F(s)/s, \quad \text{где} \quad \varepsilon \in (0;\omega), \quad s := \varphi(\varepsilon)/b \tag{4.2}$$

Для исследования семейства ДД в общем виде установим свойства МФ $F(x)$, вытекающие из ограничений, наложенных на ФП $\Pi(t)$ в п. 2 (за исключением $\ddot{\Pi}(t) \le 0$).

Лемма. Если $\Pi(t)$ положительна, дифференцируема и строго возрастает на $(0; \infty)$, то функция $F = Q^{-1}$ определена на $[0; \infty)$ и при $x > 0$ обладает следующими свойствами:

1) F положительна, дважды дифференцируема и строго возрастает, $F(0) = 0$, $F(\infty) = \infty$;

2) $F'(x) = 1/\dot{Q}(F(x)) = 1/\Pi(F(x)) > 0$, $F'(x)$ строго убывает, $F'(0+) = 1/\Pi(0) = \sup F'(x)$ (в частности, $F'(0+) = \infty$ для нерегулярных моделей), $F'(\infty) = 1/\Pi(\infty) = \inf F'(x)$;

3) $F''(x) = -\ddot{Q}(F(x))[\dot{Q}(F(x))]^{-3} = -\dot{\Pi}(F(x))[\Pi(F(x))]^{-3} \le 0$;

в частности, $F''(x) < 0$, если нет точек с $\dot{\Pi}(t) = 0$;

4) $F(x)/x > F'(x)$ при $x > 0$;

5) функция $F(x)/x$ убывает при $x > 0$;

6) при $x \to 0$ $F(x)/x \to 1/\Pi(0)$ (для нерегулярных моделей $F(x)/x \to \infty$), а при $x \to \infty$: $F(x)/x \to 1/\Pi(\infty)$;

7) Если ФП дважды дифференцируема и $\ddot{\Pi}(t) \le 0$, то $\dddot{Q}(t) \le 0$ и $F'''(x) = -\ddot{\Pi}(F(x))[\Pi(F(x))]^{-4} + 3[\dot{\Pi}(F(x))]^2[\Pi(F(x))]^{-5}$ (и потому $F'''(x) > 0$ на $(0; \infty)$).

Доказательство. Пункты 1–3 леммы следуют из свойств $Q(t)$ и обратной функции. В частности, строгое убывание $F'(x)$ могло бы быть нарушено лишь на тех интервалах, где $\Pi(t) = const$ (но в предпосылке требуется строгое возрастания ФП); $\ddot{Q}(t) = \dot{\Pi}(t) > 0$ и $F''(x) < 0$, а равенство $F''(x) = 0$ возможно лишь в тех точках, где $\dot{\Pi}(F(x)) = 0$; если $\ddot{\Pi}(t) \le 0$, то наличие точки, в которой $\dot{\Pi}(t_0) = 0$, означает, что $\Pi(t) = const$ при $t > t_0$.

Пункты 4 и 5 справедливы для любой функции с $F''(x) < 0$ и $F(0) \ge 0$. В самом деле, по теореме Лагранжа $y := F(x)/x - F'(x) = F'(\xi) - F'(x) + F(0)/x$, $\xi \in (0; x)$, $F'(\xi) > F'(x)$, так как $F'(x)$ строго убывает (если бы в некоторой точке достигалось равенство $y(x_0) = 0$, то было бы $F(x) = \text{const}$ на некотором отрезке $[\xi, x_0]$ и $\Pi(t) = \text{const}$ на соответствующем отрезке $[t_0, \zeta]$, что противоречит строгому неравенству $F''(x) < 0$ и строгой монотонности ФП). Итак, $y(x) > 0$. Отсюда следует и п. 5: $(F(x)/x)' = F'(x)x^{-1} - F(x)x^{-2} = -x^{-1}y(x) < 0$.

Пункт 6 следует из дифференцируемости F и предельных равенств $F'(0+) = 1/\Pi(0)$ и $F'(\infty) = 1/\Pi(\infty)$ по правилу Лопиталя.

Пункт 7 получается дифференцированием равенства из п. 3:

$$F'''(x) = -\ddot{\Pi}(F(x)F'(x)[\Pi(F(x))]^{-3} + 3[\dot{\Pi}(F(x))]^2[\Pi(F(x))]^{-4} F'(x);$$

$F'''(x) \ge 0$, так как $\ddot{\Pi}(t) \le 0$ при всех $t > 0$; равенство $F'''(x) = 0$ возможно в некоторой точке $x_0 > 0$ только если существует точка $t_0 > 0$, в которой одновременно $\dot{\Pi}(t_0) = 0$ и $\ddot{\Pi}(t_0) = 0$, но в силу ограничений $\dot{\Pi}(t) \ge 0$ и $\ddot{\Pi}(t) \le 0$, наличие такой точки означает, что $\dot{\Pi}(t) \equiv 0$ и $\Pi(t) = const$ при $t \ge t_0$. Если такие модели с финитной ползучестью исключить из рассмотрения (требованием строгого возрастания ФП – смотри предпосылку леммы), то справедливо строгое неравенство $F'''(x) > 0$ при $x > 0$.

Из представления ДД в виде (4.2) и пунктов 5, 6 леммы сразу следуют два важных свойства: 1) семейство ДД возрастает по b при любом фиксированном $\varepsilon \in (0; \omega)$, т.е. с ростом b ДД (4.1) целиком смещается вверх вдоль оси σ (ОС моделирует материалы с положительной скоростной чувствительностью); 2) для любой ДД с $b > 0$, порожденной ОС (1.1) с произвольной допустимой ФП, справедливы (точные) оценки:

$$\varphi(\varepsilon)/\Pi_\infty < \sigma(\varepsilon, b) < \varphi(\varepsilon)/\Pi_0, \quad \varepsilon \in (0, \omega)$$

Оценка сверху содержательна, если $\Pi_0 \neq 0$, то есть для регулярных моделей. Ниже будет показано, что верхняя и нижняя границы имеют механический смысл: $\varphi(\varepsilon)/\Pi_0 = \sigma(\varepsilon, +\infty)$ – "мгновенная" ДД, а $\varphi(\varepsilon)/\Pi_\infty = \sigma(\varepsilon, 0)$ – "равновесная" ДД. Дифференцируя (4.1) по ε, найдем касательный модуль

$$\sigma'_\varepsilon(\varepsilon, b) = F'(\varphi(\varepsilon)/b)\varphi'(\varepsilon) = \varphi'(\varepsilon)\left[\Pi(F(\varphi(\varepsilon)/b))\right]^{-1}, \quad \varepsilon \in [0, \omega) \tag{4.3}$$

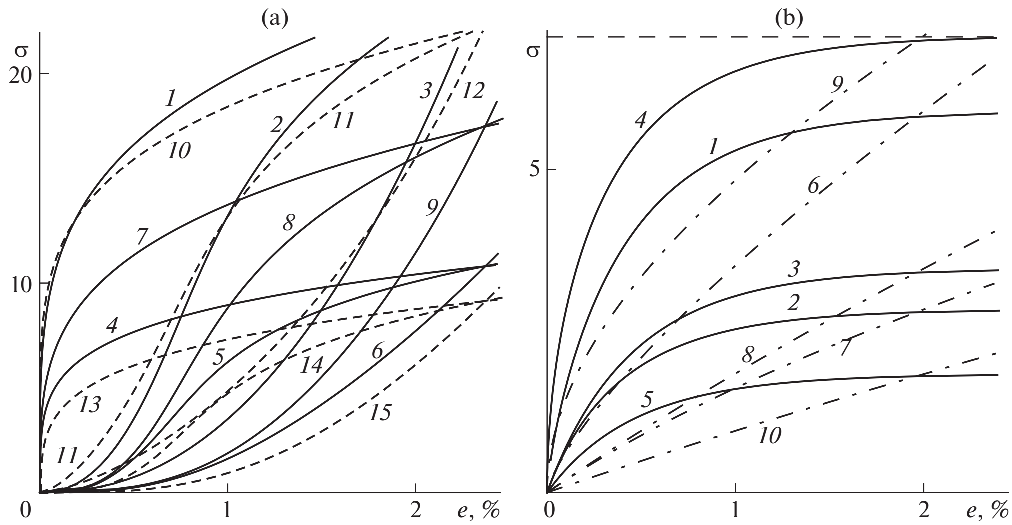
Так как $\varphi'(\varepsilon) > 0$ и $F'(x) > 0$, то всегда $\sigma'_\varepsilon(\varepsilon, b) > 0$, и ДД $\sigma = \sigma(\varepsilon, b)$ возрастает по ε.

Если $\bar{x} := \varphi(\omega) = \infty$ (как для линейного ОС (1.2), например), то $D_\Phi = [0; \infty)$, ДД (4.1) определены при всех $\sigma \geq 0$ и $t \geq 0$, и напряжение $\sigma = bt$ формально может нарастать неограниченно. Если $\omega = \infty$ ДД (4.2) определены на всем луче $\varepsilon \geq 0$. Если же $\omega < \infty$ (т.е. $\varphi(\varepsilon)$ имеет асимптоту $\varepsilon = \omega$), то ДД $\sigma(\varepsilon, b)$ имеют общую вертикальную асимптоту $\varepsilon = \omega$ (если рабочий диапазон деформаций при моделировании лежит внутри $[0; \omega/2]$ наличие этой асимптоты и предельной деформации $\varepsilon = \omega$ не проявляются).

Рассмотрим случай $\bar{x} < +\infty$. Тогда $bQ(t) \in D_\Phi$ только при $Q(t) < \bar{x}/b$; это означает, что каждая ДД обрывается в момент времени $t = t_\omega$, такой, что $Q(t_\omega) = \bar{x}/b$, т.е. $t_\omega = F(\bar{x}/b)$. В силу п.1 леммы $t_\omega(b)$ убывает с ростом b и $t_\omega(b) \to 0$ при $b \to +\infty$. ДД ведут себя по-разному в двух случаях. 1) Если $\omega < +\infty$, то есть $\Phi(\bar{x}) < \infty$, то обрыв любой ДД (разрушение) происходит (как и при ползучести) по достижению критической деформации: $\varepsilon(t_\omega) = \varepsilon_*$, где $\varepsilon_* := \Phi(\bar{x}) = \omega$ – постоянная, не зависящая от b и ФП $\Pi(t)$. Напряжение в момент разрушения зависит от b и ФП: $\sigma_\omega = bt_\omega = bF(\bar{x}/b)$, причем $\sigma_\omega(b)$ возрастает (т.к. $\sigma'_\omega(b) > 0$ в силу п. 4 леммы) и $\sigma_\omega(b) \to \sigma_+ := \bar{x}/\Pi(0)$ (см. п. 2) при $b \to \infty$ в силу п. 6 леммы (в частности, $\sigma_\omega(b)$ меньше предела прочности σ_+ при любых СН и $\sigma_+ = \sup \sigma_\omega(b)$).

2) Если же $\omega = +\infty$, то есть $\Phi(\bar{x}) = \infty$, то деформация $\varepsilon(t) = \Phi(bQ(t))$ обладает вертикальной асимптотой $t = t_\omega$; это означает, что любая ДД обрывается в момент времени $t = t_\omega$ из-за неограниченного нарастания деформации и ее скорости (можно интерпретировать это как свидетельство зарождения и роста шейки в образце), а каждая ДД в форме $\sigma(\varepsilon, b)$ имеет горизонтальную асимптоту $\sigma = \bar{\sigma}(b)$, где $\bar{\sigma} = bF(\varphi(\infty)/b) = bF(\bar{x}/b)$. "Напряжение течения" (или "шейкообразования") $\bar{\sigma}(b)$ возрастает с ростом СН (так как $\bar{\sigma} = \bar{x}F(x)/x$, $x := \bar{x}/b$, а функция $F(x)/x$ убывает), $\inf \bar{\sigma}(b) = \bar{\sigma}(0+) = \bar{x}/\Pi(\infty)$, $\sup \bar{\sigma}(b) = \bar{\sigma}(\infty) = \bar{x}/\Pi(0)$ (для регулярных моделей $\bar{\sigma}(\infty) < \infty$, для нерегулярных $\bar{\sigma}(\infty) = \infty$). Верно и обратное: если хотя бы одна ДД (4/1) имеет горизонтальную асимптоту, то ее имеет и МФ φ (т.е. $\omega = \infty$ и $\bar{x} < \infty$), а значит, и все ДД (ДД при постоянной СН линейного ОС (1.2) никогда не имеют горизонтальной асимптоты). Существенно, что зависимости времени разрушения $t_\omega(b) = F(\bar{x}/b)$ и "напряжения течения" $\bar{\sigma}(b) = bF(\bar{x}/b)$ от СН определяются только ФП $\Pi(t)$, а МФ φ влияет на них только через скалярный параметр $\bar{x} := \varphi(\omega)$.

Касательный модуль (4.3) зависит от СН (возрастает по b при любом фиксированном ε, так как $\Pi(t)$ и $F(x)$ возрастают). Мгновенный модуль при $\varepsilon = 0$ не зависит от СН: $E := \sigma'_\varepsilon(0+, b) = F'(\varphi(0)/b)\varphi'(0) = F'(0)\varphi'(0) = \varphi'(0)/\Pi(0)$. Для регулярных моделей он конечен, если $\varphi'(0) < \infty$, для нерегулярных (с $\Pi(0) = 0$) он бесконечен, если $\varphi'(0) \neq 0$. Если же $\varphi'(0) = 0$ или $\varphi'(0) = \infty$, то предел $\sigma'_\varepsilon(0+, b)$ зависит от соотношений порядков асимптотик $\varphi'(\varepsilon)$ и $\Pi(F(\varphi(\varepsilon)/b))$ при $\varepsilon \to 0$.



Фиг. 2

Длительный модуль $E_\infty := \sigma'_\varepsilon(\infty, b)$ определен лишь в случае $D_\varphi = [0;\infty)$, то есть когда $\omega = \infty$: $E_\infty = \varphi'(\infty)/\Pi(F(\bar{x}/b))$. Если $\bar{x} = \infty$, то $E_\infty = \varphi'(\infty)/\Pi(\infty)$ (так как $F(\infty) = \infty$), и конечность предела $E_\infty = \varphi'(\infty)/\Pi(\infty)$ зависит от того, конечны ли $\varphi'(\infty)$ и $\Pi(\infty)$; в частности, если $\varphi'(\infty) < \infty$, то E_∞ конечен (и $E_\infty = 0$ при $\Pi(\infty) = \infty$). Если $\bar{x} < \infty$ (т.е. $\varphi(\varepsilon)$ имеет горизонтальную асимптоту), то $E_\infty = 0$, так как $\varphi'(\infty) = 0$, $\Pi(F(\varphi(\infty)/b)) < \infty$ (это верно для любой ФП с любым пределом $\Pi(\infty)$). В случае линейного ОС (1.2) (при $\varphi(u) = u$) касательный модуль убывает по ε и все ДД $\sigma(\varepsilon, b)$ выпуклы вверх [56, 57], мгновенный модуль – максимальный касательный модуль, а длительный модуль – минимальный. Для ОС (1.1) с произвольной МФ φ это не обязательно так, ибо ДД не обязана быть выпуклой вверх.

Так как $\sigma''_\varepsilon(\varepsilon, b) = [F'(\varphi(\varepsilon)/b)\varphi'(\varepsilon)]' = b^{-1}F''(\varphi(\varepsilon)/b)\varphi'(\varepsilon)^2 + F'(\varphi(\varepsilon)/b)\varphi''(\varepsilon)$, выпуклость ДД зависит от знака и величины $\varphi''(x)$: первое слагаемое отрицательно (ибо $F'(x) < 0$ по п. 3 леммы); если $\varphi''(\varepsilon) < 0$, то второе слагаемое в скобке тоже отрицательно, $\sigma''_\varepsilon(\varepsilon, b) < 0$ и ДД выпукла вверх. Таким образом, если $\varphi(x)$ выпукла вверх, то ДД выпукла вверх, а если у $\varphi(x)$ есть участки выпуклости вниз, то у ДД они тоже могут быть (см. фиг. 2a).

Фигуры 2a, 2b демонстрируют разнообразие форм (свойств) ДД ОС (1.1). На фиг. 2a приведены ДД при постоянной СН $b = 1$ моделей с тремя разными МФ $\Phi(x)$ ($\Phi = (x/10)^3$, $\Phi = x^{1/3}$ и МФ $\Phi(x)$ вида (2.4) с $m = 1/n$, $n = 3$, $\vartheta = 0.001$, $A = 0.5$, $C = 1$) для ФП $\Pi(t) = 0.25t^{1/3}$ (ДД *1–3*) и четырех классических ФП вида (2.2): кривые *4–6* – ДД для ФП РеМ-4 (с $\lambda = 0.1$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 1$, $\gamma = 0.5$ и временем ретардации $\tau_c = 1/\lambda = 10$), кривые *7–9* – ДД для ФП РеМ-3 (с $\alpha = 0$, $\lambda = 0.1$, $\beta = 1$, $\gamma = 0.5$; тогда $\tau_c = 10$, а время релаксации $\tau = \tau_c(1 - \gamma/\beta) = 5$), штриховые кривые *10–12* – ДД для ФП модели Фойгта (с $\lambda = 0.1$, $\gamma = \beta = 1$), штриховые кривые *13–15* – ДД для ФП модели Максвелла (с $\gamma = 0$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.5$ и $\tau = \beta/\alpha = 5$). ДД моделей с $\Phi = (x/10)^3$ выпуклы вверх, с $\Phi = x^{1/3}$ выпуклы вниз, а с $\Phi(x)$ вида (2.4) имеют точку перегиба. На фиг. 2b приведены ДД *1–5* моделей с МФ (2.3) для $A = 0.5$, $\sigma_* = 2$ и теми же пятью ФП (нумерация ДД – в порядке перечисления ФП). У МФ φ вида (2.3) есть горизонтальная асимптота, и потому каждая ДД $\sigma(\varepsilon, b)$ имеет горизонтальную асимптоту $\sigma = \bar{\sigma}$ с $\bar{\sigma} = bF(\sigma_*/b)$. Штрих-пунктирные линии *6–10* – ДД линейного ОС (1.2) ($\varphi(u) = u$) с теми же ФП.

Основные обнаруженные выше общие свойства всех ДД (4.2), порождаемых ОС (1.1) при фиксированной СН, соберем в теореме.

Теорема 1. Пусть $\Pi(t)$ положительна, дифференцируема и строго возрастает на $(0;\infty)$, а $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема и строго возрастает на $(0;\omega)$ и $\varphi(0) = 0$. Тогда любая ДД $\sigma = \sigma(\varepsilon, b)$ с фиксированной СН $b > 0$ обладает следующими свойствами.

1) Все ДД $\sigma(\varepsilon, b)$ возрастают по ε на всей области определения, $\sigma(0, b) = 0$.

2) Если $\bar{x} := \varphi(\omega) = \infty$ то ДД (4.1) определены при всех $\varepsilon \in (0, \omega)$ и напряжение $\sigma = bt$ формально может нарастать неограниченно; в случае $\omega < \infty$ (когда МФ $\varphi(\varepsilon)$ имеет асимптоту $\varepsilon = \omega$) все ДД $\sigma = \sigma(\varepsilon, b)$ имеют общую вертикальную асимптоту $\varepsilon = \omega$.

2) Если $\bar{x} < +\infty$, каждая ДД обрывается в момент $t_\omega = F(\bar{x}/b)$; в случае $\omega < +\infty$ обрыв ДД (разрушение) происходит по достижению критической деформации: $\varepsilon(t_\omega) = \varepsilon_*$, где $\varepsilon_* := \Phi(\bar{x}) = \omega$ не зависит от СН b; в случае $\omega = +\infty$ каждая ДД $\sigma(\varepsilon, b)$ имеет горизонтальную асимптоту $\sigma = \bar{\sigma}(b)$, где $\bar{\sigma} = bF(\bar{x}/b)$ – напряжение течения, а деформация $\varepsilon(t) = \Phi(bQ(t))$ обладает вертикальной асимптотой $t = t_\omega$ (и $\dot{\varepsilon}(t) \to \infty$).

3) Касательный модуль ДД выражается формулой (4.3), он не обязан убывать по ε.

4) Мгновенный модуль (при $\varepsilon = 0$) равен $E := \sigma'_\varepsilon(0+, b) = \varphi'(0)/\Pi(0)$ (не зависит от СН), для регулярных моделей $E < \infty$, если $\varphi'(0) < \infty$, для нерегулярных $E = \infty$, если $\varphi'(0) \neq 0$.

5) Длительный модуль $E_\infty := \sigma'_\varepsilon(\infty, b)$ определен лишь в случае $\omega = \infty$ и равен $E_\infty = \varphi'(\infty)/\Pi(F(\bar{x}/b))$; для его равенства нулю достаточно одного из условий: а) $\bar{x} < \infty$ или б) $\bar{x} = \infty$ и $\Pi(\infty) = \infty$ и $\varphi'(\infty) < \infty$.

6) Для любой ДД справедливы (точные) оценки: $\varphi(\varepsilon)/\Pi_\infty < \sigma(\varepsilon, b) < \varphi(\varepsilon)/\Pi_0$, $\varepsilon \in (0, \omega)$.

5. Зависимость диаграмм деформирования от скорости нагружения. Все доказанные утверждения опираются на общие предпосылки – ограничения на МФ ОС (1.1), наложенные в теореме 1 (см. также п. 2). В предыдущем пункте уже доказана

Теорема 2. В предпосылках теоремы 1 справедливы следующие утверждения:

1) При любом $\varepsilon \in (0;\omega)$ семейство ДД (4.2) $\sigma(\varepsilon, b)$, $b > 0$, возрастает по b (с ростом СН ДД смещается вверх); для всех ДД справедлива оценка снизу $\sigma(\varepsilon, b) > \varphi(\varepsilon)/\Pi_\infty$ ($\sigma > 0$, если $\Pi_\infty = \infty$), а если $\Pi_0 \neq 0$, то верна и оценка сверху $\sigma(\varepsilon, b) < \varphi(\varepsilon)/\Pi_0$, $\varepsilon \in (0;\omega)$.

2) Касательный модуль (4.3) возрастает по b при любом $\varepsilon \in (0;\omega)$, а его предельные значения при $\varepsilon \to 0$ и $\varepsilon \to \infty$ (мгновенный и длительный модули) не зависят от СН.

3) Если $\bar{x} < \infty$, то ДД (4.1) обрывается в момент $t_\omega = F(\bar{x}/b)$, t_ω убывает с ростом СН b, напряжение разрушения $\sigma_\omega(b) = bt_\omega = bF(\bar{x}/b)$ возрастает по b, $\sigma_\omega(b) < \sigma_+$, где $\sigma_+ := \bar{x}/\Pi(0)$ – предел прочности, а при $b \to +\infty$ $\sigma_\omega(b) \to \sigma_+ = \sup \sigma_\omega(b)$ и $t_\omega(b) \to 0$.

Исследуем, существуют ли пределы семейства ДД (4.2) при $b \to \infty$ и $b \to 0$, то есть ДД при “мгновенном” нагружении и равновесная ДД.

Теорема 3. 1) При $b \to \infty$ (для любого фиксированного $\varepsilon \in [0;\omega)$) семейство ДД (4.2) сходится (снизу) к кривой $\sigma = \varphi(\varepsilon)/\Pi_0$ (мгновенной ДД), если $\Pi_0 \neq 0$. Если же $\Pi_0 = 0$

(модель нерегулярна), то при $b \to \infty$ семейство ДД (в форме $\varepsilon(\sigma, b) = \Phi(\sigma\Theta(\sigma/b))$) сходится к вертикальной прямой $\varepsilon = 0$ для любого допустимого $\sigma \geq 0$, т.е. такого, что $\sigma\Theta(\sigma/b) \in D_\Phi$, или $\sigma\Theta(\sigma/b) < \bar{x}$ (если $\bar{x} = \infty$, то сходимость имеет место на всем луче $\sigma \geq 0$, а если $\bar{x} < \infty$, то с ростом СН b область сходимости неограниченно расширяется, т.к. $\sigma/b \to 0$ и $\Theta(\sigma/b) \to 0$ при $b \to \infty$).

2) При $b \to 0$ (для любого $\varepsilon \in [0;\omega)$) семейство ДД (4.1) сходится (сверху) к кривой $\sigma = \varphi(\varepsilon)/\Pi(\infty)$ ("равновесной" ДД), ибо $F(x)/x \to 1/\Pi(\infty)$ при $x \to \infty$. Если ФП не ограничена ($\Pi_\infty = \infty$), то семейство ДД (4.1) сходится к прямой $\sigma = 0$.

Доказательство. По (4.2) $\sigma(\varepsilon, b) = \varphi(\varepsilon)F(x)/x$, где $x = \varphi(\varepsilon)/b$. Но для любой допустимой ФП $F(x)/x < 1/\Pi_0$ и $F(x)/x \to 1/\Pi_0$ при $x \to 0$ (п. 6 леммы); при $\varepsilon = 0$ сходимость имеет место, так как $\sigma(0, b) = 0$ и $\varphi(0) = 0$. Если же $\Pi_0 = 0$, то при $b \to \infty$ семейство ДД $\varepsilon(\sigma, b) = \Phi(\sigma\Theta(\sigma/b))$ сходится к прямой $\varepsilon = 0$ для любого фиксированного $\sigma \geq 0$, так как $\Theta(0+) = \Pi_0 = 0$ и $\Phi(0) = 0$ (и для любого фиксированного $\sigma \geq 0$ найдется достаточно большое b, при котором $\sigma\Theta(\sigma/b) < \bar{x}$).

Докажем, что сходимость семейства ДД (4.2) к мгновенной и к равновесной ДД равномерна внутри области определения (на любом отрезке).

Теорема 4. 1) Если модель регулярна ($\Pi_0 \neq 0$), то при $b \to +\infty$ семейство ДД (4.2) $\sigma(\varepsilon, b)$ сходится к функции $\sigma = \varphi(\varepsilon)/\Pi_0$ равномерно на любом отрезке $[0, \tilde{\varepsilon}]$ с $\tilde{\varepsilon} < \omega$.

2) Семейство ДД любой модели в форме $\varepsilon = \varepsilon(\sigma, b)$ сходится при $b \to +\infty$ к функции $\varepsilon(\sigma) = \Phi(\Pi_0\sigma)$ равномерно на любом отрезке $S = [\sigma_1, \sigma_2]$ с $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 < \bar{x}/\Pi_0$; если $\Phi'(0+) < \infty$ (т.е. $\varphi'(0+) \neq 0$), это верно и для отрезков с $\sigma_1 = 0$.

3) Если $\Pi_0 = 0$, то семейство $\varepsilon(\sigma, b)$ сходится при $b \to +\infty$ к функции $\varepsilon = 0$ на любом отрезке вида $[0, \sigma_2]$ с $\sigma_2 > 0$.

4) При $b \to 0$ семейство ДД $\sigma = \sigma(\varepsilon, b)$ любой модели сходится к функции $\sigma = \varphi(\varepsilon)/\Pi_\infty$ равномерно на любом отрезке $[0, \tilde{\varepsilon}]$ с $\tilde{\varepsilon} < \omega$ (в случае $\Pi_\infty = \infty$ – к функции $\sigma \equiv 0$).

5) Если $\bar{x} < \infty$ и $\Pi_0 \neq 0$, то равномерная сходимость семейства ДД $\sigma(\varepsilon, b)$ при $b \to \infty$ и $b \to 0$ имеет место не только внутри D_φ, но и на ее замыкании: если $\omega < \infty$, то сходимость равномерна на $[0, \omega]$, а если $\omega = \infty$, то – на всем луче $[0, \infty)$.

6) Если $\bar{x} = \infty$, то равномерной сходимости на всем интервале $[0, \omega)$ при $b \to +\infty$ нет.

Доказательство. 1) Уклонение ДД (4.2) с фиксированной СН от предельной функции $y(\varepsilon) := |\sigma(\varepsilon, b) - \varphi(\varepsilon)/\Pi_0)| = \varphi(\varepsilon)[\Pi_0^{-1} - F(x)x^{-1}]$ – возрастающая функция ε на D_φ (как произведение возрастающих функций: ведь второй множитель возрастает в силу п. 5 леммы), и потому его норма в пространстве $C[0, \tilde{\varepsilon}]$ совпадает со значением уклонения на правом конце отрезка $E = [0, \tilde{\varepsilon}]$: $\Delta(b) = \sup_{\varepsilon \in E} |y(\varepsilon)| = \varphi(\tilde{\varepsilon})[\Pi_0^{-1} - F(\tilde{x})\tilde{x}^{-1}]$, где $\tilde{x} = \varphi(\tilde{\varepsilon})/b$. При $b \to +\infty$, очевидно, $\tilde{x} \to 0$, $F(\tilde{x})\tilde{x}^{-1} \to \Pi_0^{-1}$ (в силу п. 6 леммы) и $\Delta(b) \to 0$, то есть сходимость равномерна на $[0, \tilde{\varepsilon}]$.

2) Норма уклонения ДД $\varepsilon(\sigma, b)$ от предельной функции на отрезке S:

$$\Delta(b) = \sup_{\sigma \in S} |\varepsilon(\sigma, b) - \Phi(\Pi_0\sigma)| = \sup_S |\Phi(\sigma\Theta(\sigma/b)) - \Phi(\Pi_0\sigma)| =$$
$$= \sup_S \Phi'(\xi)\,|\sigma\Theta(\sigma/b) - \sigma\Pi(0)|$$

где $\xi = \xi(\sigma, b) \in (\sigma\Pi_0; \sigma\Theta(\sigma/b)) \subset I$, $I := [\sigma_1\Pi_0, \sigma_2\Theta(\sigma_2/b)]$. Если $\Pi_0 \neq 0$, то $\sigma_1\Pi_0 > 0$ и $\Phi'(x)$ ограничена на отрезке I (как непрерывная функция), поэтому $\Delta(b) \le M\sigma_2|\Theta(\sigma_2/b) - \Pi_0| \to 0$ при $b \to \infty$ (так как $\dot{\Theta}(t) > 0$ и $\Theta(0+) = \Pi_0$).

3) Если $\Pi_0 = 0$, то $\Theta(0+) = 0$, условие $\sigma_2\Theta(0) \in D_\Phi$ выполнено для всех $\sigma_2 \ge 0$, а отклонение $\varepsilon(\sigma, b)$ от предельной функции $\varepsilon = 0$ на отрезке $S = [0, \sigma_2]$ можно оценить без использования Φ': $\Delta(b) = \sup\limits_{\sigma \in S} |\Phi(\sigma\Theta(\sigma/b)) - 0| = \Phi(\sigma_2\Theta(\sigma_2/b))$ (в силу возрастания функции от σ). При фиксированном $\sigma_2 \ge 0$ $\Delta(b) \to 0$ при $b \to \infty$, так как $\Theta(0+) = 0$.

4) Уклонение $z(\varepsilon) := |\sigma(\varepsilon, b) - \Pi_\infty^{-1}\varphi(\varepsilon))| = bF(\varphi(\varepsilon)/b) - \Pi_\infty^{-1}\varphi(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon)[F(x)x^{-1} - \Pi_\infty^{-1}]$ является возрастающей функцией ε на D_φ (хотя второй множитель убывает в силу п. 5 леммы): ведь $z'(\varepsilon) = \varphi'(\varepsilon)[F'(\varphi(\varepsilon)/b) - \Pi_\infty^{-1}] > 0$, ибо $F'(x) > F'(\infty) = \Pi_\infty^{-1}$ в силу п. 2 леммы. Поэтому норма уклонения $z(\varepsilon)$ в пространстве $C[0, \tilde{\varepsilon}]$ совпадает со значением уклонения на правом конце отрезка $E = [0, \tilde{\varepsilon}]$: $\Delta(b) = \varphi(\tilde{\varepsilon})[F(\tilde{x})\tilde{x}^{-1} - \Pi_\infty^{-1}]$, где $\tilde{x} = \varphi(\tilde{\varepsilon})/b$. При $b \to 0$, очевидно, $\tilde{x} \to \infty$, $F(\tilde{x})\tilde{x}^{-1} \to \Pi_\infty^{-1}$ (в силу п. 6 леммы) и $\Delta(b) \to 0$, то есть сходимость равномерна на любом отрезке $[0, \tilde{\varepsilon}]$ с $\tilde{\varepsilon} < \omega$. Доказательство сохраняет силу и в случае $\Pi_\infty = \infty$, т.е. $\Pi_\infty^{-1} = 0$.

5) Если $\omega < \infty$ и $\bar{x} < \infty$ (т.е. МФ определена и непрерывна на отрезке $[0, \omega]$), то можно положить $\tilde{\varepsilon} = \omega$ и сходимость равномерна на всем $[0, \omega]$. Если $\omega = \infty$ и $\bar{x} < \infty$ (т.е. МФ φ имеет горизонтальную асимптоту, а обратная функция Φ – вертикальную), то сходимость равномерна на всем луче $[0, \infty)$, так как $\Delta(b) = \sup\limits_{\varepsilon \in [0, \infty)} |z(\varepsilon)| = \varphi(\infty)[F(\tilde{x})\tilde{x}^{-1} - \Pi_\infty^{-1}]$, где $\tilde{x} = \varphi(\infty)/b$, и, по-прежнему, при $b \to 0$ будет $\tilde{x} \to \infty$ и $F(\tilde{x})\tilde{x}^{-1} \to \Pi_\infty^{-1}$ и $\Delta(b) \to 0$. Аналогично ведет себя и норма уклонения при $b \to +\infty$, если $\Pi_0 \neq 0$: $\Delta(b) = \sup\limits_{\varepsilon \in [0, \infty)} |y(\varepsilon)| = \varphi(\infty)[\Pi_0^{-1} - F(\tilde{x})\tilde{x}^{-1}]$, где $\tilde{x} = \varphi(\infty)/b$, и, по-прежнему, при $b \to +\infty$ будет $\tilde{x} \to 0$ и $F(\tilde{x})\tilde{x}^{-1} \to \Pi_0^{-1}$ и $\Delta(b) \to 0$.

6) Если же $\bar{x} = \infty$, то при $\tilde{\varepsilon} \to \omega$ (и фиксированном b) будет $\tilde{x} \to \infty$, $F(\tilde{x})\tilde{x}^{-1} \to \Pi_\infty^{-1}$ и норма уклонения на отрезке $[0, \tilde{\varepsilon}]$ равна $\Delta(b) = \sup|y(\varepsilon)| \to \varphi(\omega)[\Pi_0^{-1} - \Pi_\infty^{-1}] = \infty$, уклонение $\Delta(b)$ не ограничено на $[0, \omega)$ и равномерной сходимости при $b \to +\infty$ нет.

Математические результаты данной статьи о свойствах диаграмм деформирования ОС (1.1) справедливы как для случая малых деформаций в ОС (1.1), так и для случая, когда ОС (1.1) связывает логарифмическую деформацию $\varepsilon = \ln[l(t)/l_0]$ и истинное напряжение. Но от выбора меры деформации и напряжения, конечно, зависит физический смысл этих результатов, сопоставление с данными испытаний и методика идентификации. Специфике ОС Работнова в случае конечных деформаций и трехмерного напряженного состояния (как результатам испытаний, так и используемому понятийному аппарату, включая выбор мер деформаций и напряжений и объективных производных в ОС (1.1) будут посвящены отдельные работы.

6. Примеры диаграмм деформирования конкретных моделей. Для степенной ФП $\Pi(t) = Bt^u$, $B > 0$, $u \in (0;1]$, имеем $Q(t) = B(u+1)^{-1}t^{u+1}$, $F(x) = Hx^w$, где $w := (u+1)^{-1} \in [0.5; 1)$, $H := (wB)^{-w}$, и ДД (4.1) имеет вид:

$$\sigma(\varepsilon, b) = bH(\varphi(\varepsilon)/b)^w = Hb^{1-w}\varphi(\varepsilon)^w \tag{6.1}$$

В этом случае переменные разделяются, ДД с разными СН b подобны, форма всех ДД определяется функцией $\varphi(\varepsilon)^w$, зависимость от СН – степенная с показателем $1-w \in (0; 0.5]$ (при $u \to 0$ имеем $w \to 1$, $\sigma(\varepsilon, b) \to \varphi(\varepsilon)/B$, т.е. ДД становится слабо чувствительной к СН при малых u). Касательный и мгновенный модули:

$$\sigma'(\varepsilon, b) = Hwb^{1-w}\varphi'(\varepsilon)\varphi(\varepsilon)^{-(1-w)}, \quad E = Hwb^{1-w}\varphi'(0)\varphi(0)^{-(1-w)}.$$

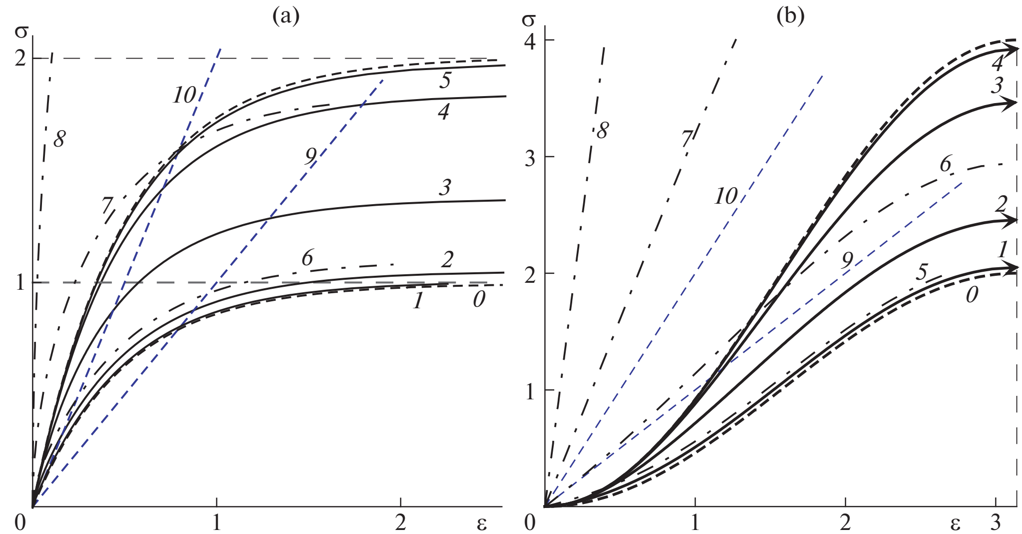
$E = \infty$, если $\varphi'(0) \neq 0$ (ибо $\varphi(0) = 0$), а если $\varphi'(0) = 0$, то все зависит от асимптотики произведения $\varphi'(\varepsilon)\varphi(\varepsilon)^{w-1}$ при $\varepsilon \to 0$ (в частности, при $u < 1$ из существования $\varphi''(0) \neq 0$ следует, что $E = 0$). При $b \to \infty$ семейство ДД модели с любым $u \in (0;1]$ и любой МФ $\varphi(\varepsilon)$ сходится к вертикальной прямой $\varepsilon = 0$, так как $\Pi(0) = 0$; при $b \to 0$ семейство ДД сходится к прямой $\sigma = 0$, так как $b^{1-w} \to 0$. Абсцисса точки перегиба (если она есть) не зависит от СН и совпадает с абсциссой точки перегиба функции $\varphi(\varepsilon)^w$, поскольку

$$\sigma''(\varepsilon, b) = Hwb^{1-w}\varphi(\varepsilon)^{w-2}[\varphi''(\varepsilon)\varphi(\varepsilon) - (1-w)\varphi'(\varepsilon)^2]$$

Для степенной ФП и любой МФ φ с $\omega = \infty$ и $\bar{x} < \infty$ зависимости времени разрушения и напряжения течения от СН имеют степенной вид: $t_\omega = F(\bar{x}/b) = H\bar{x}^w b^{-w}$, $w \in [0.5;1)$, и $\bar{\sigma}(b) = bF(\bar{x}/b) = H\bar{x}^w b^{1-w}$, $1-w \in (0; 0.5]$. В частности, для МФ (2.3) ДД (6.1) имеют вид $\sigma(\varepsilon, b) = Hb^{1-w}\sigma_*^w(1-e^{-\varepsilon/A})^w$, $\varepsilon \geq 0$. Каждая ДД обладает горизонтальной асимптотой $\sigma = \bar{\sigma}$, $\bar{\sigma} = H\sigma_*^w b^{1-w}$, время разрушения $t_\omega = F(\bar{x}/b) = H\sigma_*^w b^{-w}$.

Для МФ $\varphi(\varepsilon) = C(1-\cos(\varepsilon/A))$, возрастающей на отрезке $\varepsilon \in [0, \pi A]$, имеем $\omega = \pi A$, $\Phi(x) = A[\arcsin(x/C - 1) + 0.5\pi]$, $x \in [0, 2C]$, $\bar{x} = 2C$, а семейство ДД (6.1) имеет вид: $\sigma(\varepsilon, b) = Hb^{1-w}C^w(1-\cos(\varepsilon/A))^w$, $\varepsilon \in [0, \pi A]$. Обрыв любой ДД происходит по достижению критической деформации: $\varepsilon(t_\omega) = \varepsilon_*$, где $\varepsilon_* = \omega = \pi A$ (не зависит от СН b и ФП), время разрушения $t_\omega = F(\bar{x}/b) = H(2C)^w b^{-w}$. Мгновенный модуль E равен нулю для всех $u \in (0;1)$: в самом деле, при $\varepsilon \to 0$ $\varphi(\varepsilon) \sim 0.5CA^{-2}\varepsilon^2$, $\varphi'(\varepsilon)\varphi(\varepsilon)^{w-1} \sim$ $\sim (0.5CA^{-2}\varepsilon^2)^{w-1}CA^{-2}\varepsilon = c\varepsilon^{2w-1}$; но для $u \in (0;1)$ всегда $w > 0.5$, и потому $E = 0$ (а для $u = 1$ имеем $w = 0.5$ и $E = c \in (0;\infty)$). ДД с этой МФ всегда имеет точку перегиба $\tilde{\varepsilon} = A\arccos u > 0$ (и еще одну в т. $\varepsilon = 0$). При $u \to 0$ $\tilde{\varepsilon} \to 0.5\pi A$, при $u \to 1$ $\tilde{\varepsilon} \to 0$.

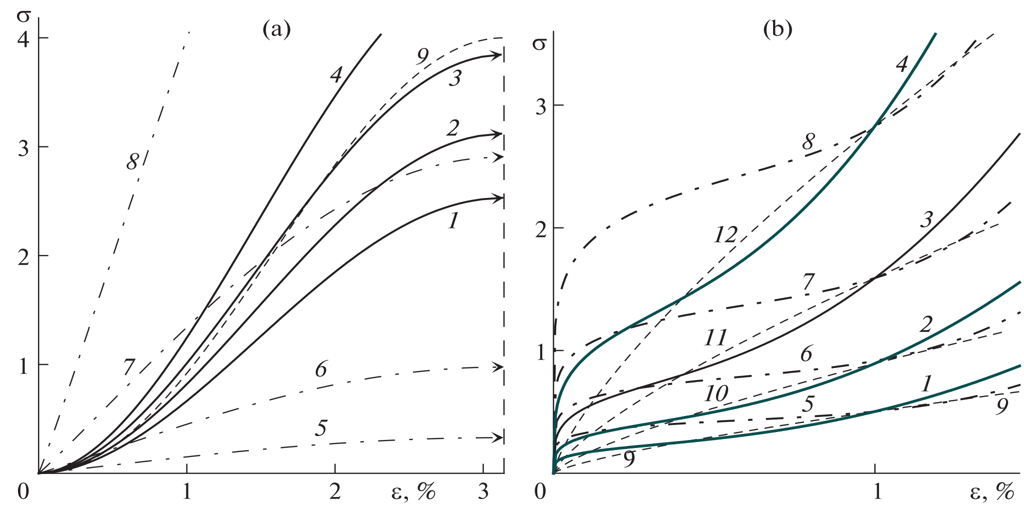
На фиг. 3*а* приведены ДД $\sigma(\varepsilon, b)$ с разными СН $b = 0.001; 0.01; 0.1; 1; 10$ (кривые *1*–*5*) для модели с МФ (2.3) (она дает дробно-линейную зависимость Шестерикова-Юмашевой [64] для скорости ползучести), $A = 0.5$, $\sigma_* = 1$, и ФП PeM-3, т.е. ФП (2.2) с $\alpha = 0$, $\lambda = 0.1$, $\beta = 1$, $\gamma = 0.5$ (тогда $\Pi(0) = \beta - \gamma \neq 0$, время ретардации $\tau_c = 1/\lambda = 10$, время релаксации $\tau = \tau_c(1-\gamma/\beta) = 5$). У всех ДД мгновенный модуль $E = \varphi'(0)/\Pi(0) = A^{-1}\sigma_*(\beta-\gamma)^{-1}$, а длительный модуль $E_\infty = 0$. Так как у МФ φ вида (2.3) есть горизонтальная асимптота $\sigma = \sigma_*$, то каждая ДД обрывается в момент $t_\omega = F(\sigma_*/b)$ ($\varepsilon(t_\omega - 0) = \infty$) и имеет горизонтальную асимптоту $y = \bar{\sigma}(b)$, где напряжение течения $\bar{\sigma} = bF(\sigma_*/b)$ – возрастающая функция СН ($\bar{\sigma}(\infty) = \sigma_*/\Pi(0) = \sigma_*/(\beta-\gamma)$, $\bar{\sigma}(0+) = \sigma_*/\Pi(\infty) = \sigma_*/\beta$). При $b \to \infty$ семейство ДД (монотонно) сходится к кривой $\sigma = (\beta-\gamma)^{-1}\varphi(\varepsilon)$, то есть $\sigma(\varepsilon) = \sigma_*(\beta-\gamma)^{-1}(1-e^{-\varepsilon/A})$, а при $b \to 0$ семейство ДД сходит-



Фиг. 3

ся к кривой $\sigma = \varphi(\varepsilon)/\beta$, т.е. $\sigma(\varepsilon) = \sigma_*\beta^{-1}(1 - e^{-\varepsilon/A})$ (штриховые кривые с маркерами ∞ и 0); в секторе между ними лежат все ДД с $b > 0$. Три штрих-пунктирные кривые *6–8*, выходящие за пределы описанного криволинейного сектора, – ДД модели с той же МФ φ, но с ФП Фойгта (ФП (2.2) с $\beta = \gamma = 1$) для СН $b = 0.01; 0.1; 1$. При $b \to 0$ семейство ДД модели с ФП Фойгта сходится к той же кривой $\sigma = \varphi(\varepsilon)/\beta$ (ибо значение β такое же). Отличие от РеМ-3 (с $\gamma < \beta$) состоит в том, что $\Pi(0) = 0$ (модель Фойгта сингулярна) и потому $E = \infty$ (касательные к ДД в т. $\varepsilon = 0$ вертикальны), а при $b \to \infty$ семейство ДД сходится к вертикальной прямой $\varepsilon = 0$. Штриховые прямые *9*, *10* – предельные ДД для $b \to \infty$ и $b \to 0$ ($\sigma = \varepsilon/(\beta - \gamma)$ и $\sigma = \varepsilon/\beta$) в случае линейного ОС (когда $\varphi(u) = u$).

На фиг. 3b приведены ДД с разными СН $b = 0.01; 0.1; 1; 10$ (кривые *1–4*) для модели с той же ФП РеМ-3, что и на фиг. 3a, и МФ $\Phi(x) = A[\arcsin(x/C - 1) + 0.5\pi]$, $x \in [0, 2C]$ ($\varphi(\varepsilon) = C(1 - \cos(\varepsilon/A))$, $\omega = \pi A$, $\bar{x} = 2C$) с $A = 1$, $C = 1$. Все ДД имеют нулевой мгновенный модуль $E = \varphi'(0)/\Pi(0)$, так как $\varphi'(0) = 0$, а $\Pi(0) \neq 0$. Поскольку $\bar{x} < \infty$ и $\Phi(\bar{x}) < \infty$, то любая ДД обрывается (происходит разрушение) по достижению критической деформации $\varepsilon_* = \omega = \pi A$ (постоянная не зависит от СН b и ФП $\Pi(t)$), время разрушения $t_\omega = F(\bar{x}/b)$ и предельное напряжение $\sigma_\omega = bF(\bar{x}/b)$ зависят от СН b и ФП. При $b \to \infty$ семейство ДД (монотонно) сходится к кривой $\sigma = (\beta - \gamma)^{-1}\varphi(\varepsilon)$, то есть $\sigma = 2(1 - \cos\varepsilon)$, а при $b \to 0$ семейство ДД сходится к кривой $\sigma = \varphi(\varepsilon)/\beta$, то есть $\sigma = 1 - \cos\varepsilon$ (штриховые кривые с маркерами ∞ и 0); в секторе между ними лежат все ДД с $b > 0$. Четыре штрих-пунктирные кривые *5–8*, выходящие за пределы описанного криволинейного сектора, – ДД модели с ФП Фойгта (при $\beta = \gamma = 1$) и той же МФ $\Phi(x)$ для тех же СН $b = 0.01; 0.1; 1; 10$. При $b \to 0$ семейство ДД модели с ФП Фойгта сходится к той же кривой $\sigma = \varphi(\varepsilon)/\beta$ (поскольку значение β то же самое), а при $b \to \infty$ – к вертикальной прямой $\varepsilon = 0$.



Фиг. 4

На фиг. 4a приведены ДД для двух моделей с МФ $\Phi(x) = A[\arcsin(x/C - 1) + 0.5\pi]$, $x \in [0, 2C]$ (той же самой, что и на фиг. 3b) и ФП $\Pi(t) = Bt^u$ с $B = 0.5$ и двумя значениями показателя: $u = 0.1$ (ДД *1–4*) и $u = 0.9$ (ДД *5–8*). СН пробегают 3 порядка: $b = 0.01;\ 0.1;\ 1;\ 10$. Для $\Pi(t) = Bt^u$ имеем $F(x) = Hx^w$, где $w := (u+1)^{-1} \in [0.5;1)$, $H := (wB)^{-w}$, и ДД (4.1): $\sigma(\varepsilon, b) = bH(\varphi(\varepsilon)/b)^w = Hb^{1-w}\varphi(\varepsilon)^w$. ДД с разными СН подобны, форма всех ДД определяется функцией $\varphi(\varepsilon)^w$, абсцисса точки перегиба $\tilde{\varepsilon} = A\arccos u$ не зависит от СН, мгновенный модуль E равен нулю для всех $u \in (0;1)$. Так как $\bar{x} < \infty$ и $\Phi(\bar{x}) < \infty$, то любая ДД обрывается по достижению критической деформации $\varepsilon_* = \omega = \pi A$. Зависимость ДД от СН – степенная с показателем $1 - w \in (0; 0.5]$. При $b \to \infty$ семейство ДД модели с любым $u \in (0;1]$ монотонно сходится к вертикальной прямой $\varepsilon = 0$, так как $\Pi(0) = 0$; при $b \to 0$ семейство ДД сходится к прямой $\sigma = 0$, так как $\Pi(\infty) = \infty$. При малых u модель становится слабо чувствительной к СН (ДД *1–4* для модели с $u = 0.1$ лежат в заметно более узком секторе, чем ДД модели с $u = 0.9$), а при $u \to 0$ имеем $w \to 1$, $\tilde{\varepsilon} \to 0.5\pi A$, $\sigma(\varepsilon, b) \to \varphi(\varepsilon)/B$ (см. штриховую кривую *9*).

На фиг. 4b приведены ДД при $b = 0.001;\ 0.01;\ 0.1;\ 1$ для двух моделей с ФП $\Pi(t) = t^{1/3}/3$ (тогда $w = 3/4$, $F(s) = 2^{3/2}s^{3/4}$) и двумя МФ $\varphi(x) = \vartheta x^n + (1-\vartheta)x^{1/n}$ вида (2.4), $x \geq 0$, $n > 1$, $\vartheta \in (0;1)$, с разными значениями n и ϑ: ДД *1–4* – для $n = 3$, $\vartheta = 0.5$, ДД *5–8* – для $n = 5$, $\vartheta = 0.1$. Уравнение ДД имеет вид $\sigma = Hb^{1-w}\varphi(\varepsilon)^w$, т.е. $\sigma(\varepsilon, b) = 2^{3/2}b^{1/4}(\vartheta\varepsilon^n + (1-\vartheta)\varepsilon^{1/n})^{3/4}$. Все ДД имеют вертикальную касательную в нуле ($E = \infty$), точку перегиба (ее абсцисса не зависит от СН b, так как для степенных ФП ДД подобны) и $E_\infty = \infty$. С ростом n ДД приобретает “площадку текучести”. При $b \to \infty$ семейство ДД сходится к прямой $\varepsilon = 0$ (так как $\Pi(0) = 0$); при $b \to 0$ семейство ДД сходится к прямой $\sigma = 0$. Штриховые кривые *9–12* – ДД линейного ОС (1.2) с той же ФП при тех же скоростях $b = 0.001;\ 0.01;\ 0.1;\ 1$.

Формы ДД на фиг. 3a и 4b типичны для многих полимеров, асфальтобетонов, металлов и сплавов со скоростной чувствительностью [7–10, 32, 38–46, 63, 65–73]. ДД на фиг. 4a и 3b (с малым, но быстро растущим при очень малых деформациях касательным модулем и точкой перегиба) качественно воспроизводят поведение ДД эластомеров (каучуков, резин и т.п.), пенопластов и биологических тканей (связок, сухожилий, сосудов) [20–22, 25–27, 30–33, 63, 74, 75].

Заключение. В работе продолжен качественный анализ определяющего соотношения Работнова (1.1): при минимальных ограничениях на две МФ выведены в общем виде уравнения семейств теоретических кривых деформирования при постоянных скоростях нагружения, детально изучены их общие качественные свойства в зависимости от свойств МФ (см. теоремы 1–4). На основе их сравнения с типичными свойствами кривых испытаний реономных материалов выявлены необходимые ограничения на МФ, обеспечивающие адекватное описание комплекса основных реологических эффектов, наблюдаемых при нагружениях с постоянной скоростью, сферы влияния обеих МФ и ряд индикаторов применимости ОС. Обнаружены те эффекты, которые ОС (1.1) принципиально не может описать ни при каких МФ (например, зависимость формы кривых релаксации от уровня деформации, отрицательная скоростная чувствительность ДД и др.), и те, которые могут быть описаны при определенных дополнительных ограничениях, наложенных на МФ (например: выпуклость ДД или наличие у них точек перегиба, подобие ДД, существование мгновенной ДД, конечность мгновенного модуля, равенство нулю или отличие от нуля длительного модуля, разрушение при деформировании с постоянной СН, зависимость времени разрушения от уровня напряжения или СН и т.п.).

Проведенный анализ позволил сопоставить круг реологических явлений, которые ОС (1.1) может адекватно описывать, с арсеналом возможностей линейного ОС вязкоупругости, которое оно обобщает, указать как наследуемые свойства, так и дополнительные возможности нелинейного ОС по сравнению с линейным. Например, доказано, что: при любых МФ все ДД с постоянными скоростями нагружения $\sigma(\varepsilon, b)$ возрастают по ε и по параметру b (то есть ДД смещаются вверх с ростом СН); однако их мгновенный и длительный (касательные) модули не зависят от скоростей; если модель регулярна, то при стремлении СН к бесконечности семейство ДД сходится на луче $\varepsilon \geq 0$ к кривой $\sigma = \varphi(\varepsilon)/\Pi(0)$ (мгновенной ДД), а при стремлении СН к нулю они сходятся (сверху) к кривой $\sigma = \varphi(\varepsilon)/\Pi(\infty)$ (см. теоремы 1–4). Все перечисленные свойства ДД нелинейного ОС (1.1) унаследованы от линейного ОС вязкоупругости (1.2) [56, 57] (в этом случае мгновенная и равновесная ДД прямолинейны). Но, в отличие от ДД линейного ОС, которые всегда выпуклы вверх, ДД ОС (1.1) могут иметь участки выпуклости вниз (в частности, в окрестности нуля) и точки перегиба, если они имеются у МФ $\varphi(u)$, и горизонтальную асимптоту, если она есть у φ.

В последующих работах будут исследованы качественные свойства остальных квазистатических кривых, порождаемых ОС (1.1): кривых деформирования при постоянных и кусочно-постоянных скоростях деформации, кривых релаксации и ползучести с произвольной начальной стадией нагружения, условий описания немонотонности и знакопеременности коэффициента Пуассона, влияния гидростатического давления на кривые ползучести и деформирования, эффекта Маллинза, циклической ползучести, рэтчетинга, приспособляемости и других эффектов. На основе этого анализа будут составлены более полные списки индикаторов применимости ОС (1.1) и его возможностей по моделированию комплексного поведения классов реономных материалов, проявляющих нелинейную наследственность, скоростную чувствительность и разносопротивляемость.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 17-08-01146_а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Работнов Ю.Н.* Равновесие упругой среды с последействием // ПММ. 1948. Т. 12. № 1. С. 53–62.
2. *Наместников В.С., Работнов Ю.Н.* О наследственных теориях ползучести // ПМТФ. 1961. Т. 2. № 4. С. 148–150.
3. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
4. *Работнов Ю.Н., Паперник Л.Х., Степанычев Е.И.* Приложение нелинейной теории наследственности к описанию временных эффектов в полимерных материалах // Механика полимеров. 1971. № 1. С. 74–87.
5. *Дергунов Н.Н., Паперник Л.Х., Работнов Ю.Н.* Анализ поведения графита на основе нелинейной наследственной теории // ПМТФ. 1971. № 2. С. 76–82.
6. *Работнов Ю.Н., Паперник Л.Х., Степанычев Е.И.* Нелинейная ползучесть стеклопластика ТС8/3-250 // Механика полимеров. 1971. № 3. С. 391–397.
7. *Работнов Ю.Н., Паперник Л.Х., Степанычев Е.И.* О связи характеристик ползучести стеклопластиков с кривой мгновенного деформирования // Механика полимеров. 1971. № 4. С. 624–628.
8. *Работнов Ю.Н., Суворова Ю.В.* О законе деформирования металлов при одноосном нагружении // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 4. С. 41–54.
9. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.
10. *Мельшанов А.Ф., Суворова Ю.В., Хазанов С.Ю.* Экспериментальная проверка определяющего уравнения для металлов при нагружении и разгрузке // Изв. АН СССР. МТТ. 1974. № 6. С. 166–170.
11. *Суворова Ю.В.* Нелинейные эффекты при деформировании наследственных сред // Механика полимеров. 1977. № 6. С. 976–980.
12. *Осокин А.Е., Суворова Ю.В.* Нелинейное определяющее уравнение наследственной среды и методика определения его параметров // ПММ. 1978. Т. 42. № 6. С. 1107–1114.
13. *Суворова Ю.В., Алексеева С.И.* Нелинейная модель изотропной наследственной среды для случая сложного напряженного состояния // Механика композитных материалов. 1993. № 5. С. 602–607.
14. *Суворова Ю.В., Алексеева С.И.* Инженерные приложения модели наследственного типа к описанию поведения полимеров и композитов с полимерной матрицей // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2000. Т. 66. № 5. С. 47–51.
15. *Алексеева С.И.* Модель нелинейной наследственной среды с учетом температуры и влажности // ДАН. 2001. Т. 376. № 4. С. 471–473.
16. *Мосин А.В.* Вычисление параметров нелинейного определяющего уравнения наследственного типа // Проблемы машиноведения и надежности машин. 2002. № 2. С. 83–88.
17. *Суворова Ю.В.* О нелинейно-наследственном уравнении Ю.Н. Работнова и его приложениях // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 1. С. 174–181.
18. *Алексеева С.И., Фроня М.А., Викторова И.В.* Анализ вязкоупругих свойств полимерных композитов с углеродными нанонаполнителями // Композиты и наноструктуры. 2011. № 2. С. 28–39.
19. *Алексеева С.И., Викторова И.В., Фроня М.А.* Развитие наследственной модели Работнова и анализ деформационных характеристик композитов // Труды конференции “Наследственная механика деформирования и разрушения твердых тел – научное наследие Ю.Н. Работнова”. М.: Изд-во ИМАШ РАН, 2014. С. 11–17.
20. *Fung Y.C.* Stress-strain history relations of soft tissues in simple elongation. In: Biomechanics, Its Foundations and Objectives (ed. by *Fung Y.C.*). New Jersey: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1972. P. 181–208.
21. *Фанг Я.Ч.* Математические модели зависимости напряжение–деформация для живых мягких тканей // Механика полимеров. 1975. № 5. С. 850–867.
22. *Woo S. L.-Y.* Mechanical properties of tendons and ligaments – I. Quasi-static and nonlinear viscoelastic properties // Biorheology. 1982. V. 19. P. 385–396.
23. *Sauren A.A., Rousseau E.P.* A concise sensitivity analysis of the quasi-linear viscoelastic model proposed by Fung // J. Biomech. Eng. 1983. V. 105. P. 92–95.
24. *Nigul I., Nigul U.* On algorithms of evaluation of Fung’s relaxation function parameters // J. Biomech. 1987. V. 20. № 4. P. 343–352.
25. *Fung Y.C.* Biomechanics. Mechanical Properties of Living Tissues. New York: Springer-Verlag, 1993. 568 p.
26. *Funk J.R., Hall G.W., Crandall J.R., Pilkey W.D.* Linear and quasi-linear viscoelastic characterization of ankle ligaments // J. Biomech. Eng. 2000. V. 122. P. 15–22.

27. *Abramowitch S.D., Woo S.L.-Y.* An improved method to analyze the stress relaxation of ligaments following a finite ramp time based on the quasi-linear viscoelastic theory // J. Biomech. Eng. 2004. V. 126. P. 92–97.
28. *Yang W., Fung T.C., Chian K.S., Chong C.K.* Viscoelasticity of Esophageal Tissue and Application of a QLV model // J. Biomech. Engineering. 2006. V. 128. P. 909–916.
29. *Nekouzadeh A., Pryse K.M., Elson E.L., Genin G.M.* A simplified approach to quasi-linear viscoelastic modeling // J. Biomechanics. 2007. V. 40. № 14. P. 3070–3078.
30. *De Frate L.E., Li G.* The prediction of stress-relaxation of ligaments and tendons using the quasi-linear viscoelastic model // Biomechanics and Modeling in Mechanobiology. 2007. V. 6. № 4. P. 245–251.
31. *Duenwald S.E., Vanderby R., Lakes R.S.* Constitutive equations for ligament and other soft tissue: evaluation by experiment // Acta Mechanica. 2009. V. 205. P. 23–33.
32. *Lakes R.S.* Viscoelastic Materials. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. 461 p.
33. *Duenwald S.E., Vanderby R., Lakes R.S.* Stress relaxation and recovery in tendon and ligament: Experiment and modeling // Biorheology. 2010. V. 47. P. 1–14.
34. *Nekouzadeh A., Genin G.M.* Adaptive Quasi-Linear Viscoelastic Modeling. In “Studies in Mechanobiology, Tissue Engineering and Biomaterials. Vl.10”. Berlin Heidelberg: Springer, 2013. P. 47–83.
35. *Karimi A., Navidbakhsh M.* Mechanical properties of PVA material for tissue engineering applications // Materials Technology. 2014. V. 29. № 2. P. 90–100.
36. *De Pascalis R., Abrahams I.D., Parnell W.J.* On nonlinear viscoelastic deformations: a reappraisal of Fung’s quasi-linear viscoelastic model // Proc. R. Soc. A. 2014. V. 470. 20140058. DOI: 10.1098/rspa.2014.0058
37. *Babaei B., Abramowitch S.D. et al.* A discrete spectral analysis for determining quasi-linear viscoelastic properties of biological materials // J. Royal. Soc. Interface. 2015. V. 12. 20150707. DOI: 10.1098/rsif.2015.0707
38. *Коларов Д., Балтов А., Бончева Н.* Механика пластических сред. М.: Мир, 1979. 304 с.
39. *Гольдман А.Я.* Прогнозирование деформационно-прочностных свойств полимерных и композиционных материалов. Л.: Химия, 1988. 272 с.
40. *Drozdov A.D.* Mechanics of viscoelastic solids. N.-Y.: Wiley, 1998. 484 p.
41. *Адамов А.А., Матвеенко В.П., Труфанов Н.А., Шардаков И.Н.* Методы прикладной вязкоупругости. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2003. 411 с.
42. *Betten J.* Creep Mechanics. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. 367 p.
43. *Segal V.M., Beyerlein I.J., Tome C.N., Chuvil’deev V.N., Kopylov V.I.* Fundamentals and Engineering of Severe Plastic Deformation. N.Y.: Nova Science Pub. Inc., 2010. 542 p
44. *Brinson H.F., Brinson L.C.* Polymer Engineering Science and Viscoelasticity. Springer Science & Business Media, 2008. 446 p.
45. *Christensen R.M.* Mechanics of Composite Materials. N.Y.: Dover Publications, 2012. 384 p.
46. *Bergstrom J.S.* Mechanics of Solid Polymers. Theory and Computational Modeling. Elsevier, William Andrew, 2015. 520 p.
47. *Волков И.А., Игумнов Л.А., Коротких Ю.Г.* Прикладная теория вязкопластичности. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2015. 318 с.
48. *Локощенко А.М.* Ползучесть и длительная прочность металлов. М.: Физматлит, 2016. 504 с.
49. *Хохлов А.В.* Анализ общих свойств кривых ползучести при ступенчатом нагружении, порождаемых нелинейным соотношением Работнова для вязкоупругопластичных материалов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естеств. науки. 2017. № 3. С. 93–123.
50. *Хохлов А.В.* Асимптотика кривых ползучести, порожденных нелинейной теорией наследственности Работнова при кусочно-постоянных нагружениях, и условия затухания памяти // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2017. № 5. С. 26–31.
51. *Khokhlov A.V.* Analysis of properties of ramp stress relaxation curves produced by the Rabotnov nonlinear hereditary theory // Mechanics of Composite Materials. 2018. V. 54. № 4. P. 473–486.
52. *Хохлов А.В.* Моделирование зависимости кривых ползучести при растяжении и коэффициента Пуассона реономных материалов от гидростатического давления с помощью нелинейно-наследственного соотношения Работнова // Механика композиционных материалов и конструкций. 2018. Т. 24. № 3. С. 407–436.
53. *Хохлов А.В.* Определяющее соотношение для реологических процессов: свойства теоретических кривых ползучести и моделирование затухания памяти // Изв. РАН. МТТ. 2007. № 2. С. 147–166.
54. *Хохлов А.В.* Определяющее соотношение для реологических процессов с известной историей нагружения. Кривые ползучести и длительной прочности // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 2. С. 140–160.

55. *Хохлов А.В.* Критерии разрушения при ползучести, учитывающие историю деформирования, и моделирование длительной прочности // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 4. С. 121–135.

56. *Хохлов А.В.* Характерные особенности семейств кривых деформирования линейных моделей вязкоупругости // Проблемы прочности и пластичности. 2015. Вып. 77. № 2. С. 139–154.

57. *Хохлов А.В.* Качественный анализ общих свойств теоретических кривых линейного определяющего соотношения вязкоупругости // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2016. № 5. С. 187–245. Режим доступа: http://technomag.edu.ru/doc/840650.html.

58. *Хохлов А.В.* Двусторонние оценки для функции релаксации линейной теории наследственности через кривые релаксации при ramp-деформировании и методики ее идентификации // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 3. С. 81–104.

59. *Хохлов А.В.* Анализ общих свойств кривых ползучести при циклических ступенчатых нагружениях, порождаемых линейной теорией наследственности // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2017. Т. 21. № 2. С. 326–361.

60. *Хохлов А.В.* Нелинейная модель вязкоупругопластичности типа Максвелла: моделирование влияния температуры на кривые деформирования, релаксации и ползучести // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2017. Т. 21. № 1. С. 160–179.

61. *Хохлов А.В.* Нелинейная модель вязкоупругопластичности типа Максвелла: свойства семейства кривых релаксации и ограничения на материальные функции // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2017. № 6. С. 31–55.

62. *Хохлов А.В.* Идентификация нелинейной модели упруговязкопластичности типа Максвелла по диаграммам нагружения с постоянными скоростями // Деформация и разрушение материалов. 2018. № 4. С. 2–10.

63. *Хохлов А.В.* Свойства диаграмм нагружения и разгрузки, порождаемых нелинейным определяющим соотношением типа Максвелла для реономных материалов // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22. № 2. С. 293–324. doi: 10.14498/vsgtu1573

64. *Шестериков С.А., Юмашева М.А.* Конкретизация уравнения состояния при ползучести // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 1. С. 86–91.

65. *Khan A.S., Lopez-Pamies O.* Time and temperature dependent response and relaxation of a soft polymer // International Journal of Plasticity. 2002. V. 18. P. 1359–1372.

66. *Krempl E., Khan F.* Rate (time)-dependent deformation behavior: an overview of some properties of metals and solid polymers // Int. J. Plasticity. 2003. V. 19. P. 1069–1095

67. *McClung A.J.W., Ruggles-Wrenn M.B.* The rate (time)-dependent mechanical behavior of the PMR-15 thermoset polymer at elevated temperature // Polymer Testing. 2008. V. 27. P. 908–914.

68. *Белякова Т.А., Зезин Ю.П., Ломакин Е.В.* Термовязкогиперупругое поведение эластомерных материалов, модифицированных наночастицами наполнителя // Изв. РАН. МТТ. 2010. № 4. С. 63–81.

69. *Вильдеман В.Э., Третьяков М.П. и др.* Экспериментальные исследования свойств материалов при сложных термомеханических воздействиях. М.: Физматлит, 2012. 209 с.

70. *Khan F., Yeakle C.* Experimental investigation and modeling of non-monotonic creep behavior in polymers. // Int. J. Plasticity. 2011. V. 27. P. 512–521.

71. *Kastner M. et al.* Inelastic material behavior of polymers – Experimental characterization, formulation and implementation of a material model // Mech. Mater. 2012. V. 52. P. 40–57.

72. *Yun K.-S., Park J.-B., Jung G.-D., Youn S.-K.* Viscoelastic constitutive modelling of solid propellant with damage // Int. J. Solids and Structures. 2016. V. 34. P. 118–127.

73. *Kim J.W., Medvedev G.A., Caruthers J.M.* The response of a glassy polymer in a loading-unloading deformation: the stress memory experiment // Polymer. 2013. V. 54. № 21. P. 5993–6002.

74. *MacHado G., Chagnon G., Favier D.* Analysis of the isotropic models of the Mullins effect based on filled silicone rubber experimental results // Mech. Mater. 2010. V. 42. P. 841–851.

75. *Fernandes V.A., De Focatiis D.S.* The role of deformation history on stress relaxation and stress memory of filled rubber // Polymer Testing. 2014. V. 40. P. 124–132.