ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
2019, № 2, с. 63–71

УДК 539.3:534.1

К ТЕОРИИ ЗВУКОВЫХ БАРЬЕРОВ: ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКИХ, ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И СФЕРИЧЕСКИХ ВОЛН НА “ТВЕРДО-МЯГКОЙ” ПОЛУПЛОСКОСТИ

М. Ш. Исраилов

Комплексный научно-исследовательский институт РАН, Грозный, Россия
e-mail: israiler@hotmail.com

Поступила в редакцию 28.09.2017 г.
После доработки 28.09.2017 г.
Принята к публикации 18.10.2017 г.

При проектировании звуковых барьеров важное значение имеет выяснение вопросов о целесообразности частичного или полного покрытия поверхности барьера абсорбентом или конструирования барьеров с рассеивающими звук поверхностями. Исследование указанных прикладных проблем для плоских барьеров приводит к необходимости постановки и решения задач дифракции звуковых волн на полуплоскости с разнотипными (неодинаковыми) граничными условиями на сторонах полуплоскости. Решение таких задач традиционными методами существенно усложняется в сравнении с рассмотрениями аналогичных задач для однотипных краевых условий на всей границе рассеивающего тела и приводит зачастую к труднообозримым результатам.

В работе предложены простые способы решения задач дифракции акустических волн на полуплоскости с краевыми условиями Неймана на одной стороне полуплоскости и Дирихле – на другой. Для плоских падающих волн способ основан на применении метода разделения переменных с последующим суммированием рядов Фурье–Бесселя. В случае цилиндрических и сферических волн способ решения состоит в использовании полученных результатов для плоских волн в сочетании с методом геометрической теории дифракции Келлера.

Получены новые аналитические решения задач дифракции плоских, цилиндрических и сферических волн на твердо-мягкой полуплоскости, справедливые во всей области дифракции или в дальней зоне, на больших расстояниях от ребра барьера. Эти решения той же “простоты”, что и соответствующие решения для однотипных краевых условий, что делает их удобными при сравнительном анализе в приложениях к звуковым барьерам.

Ключевые слова: звуковые барьеры, акустические волны, дифракция на полуплоскости

DOI: 10.1134/S0572329919020065

1. Дифракция плоских звуковых волн. Впервые задача дифракции плоских звуковых волн на полуплоскости при разных краевых условиях на ее сторонах (Неймана на одной стороне полуплоскости и Дирихле – на другой) рассмотрена А.Д. Роулинзом [1], который использовал для ее решения метод Винера–Хопфа (традиционно применяемый в задачах рассеяния волн на плоских препятствиях). Однако, в отличие от случаев с однотипными (одинаковыми) краевыми условиями на сторонах полуплоскости, здесь метод приводит не к одному, а к системе (двух) функциональных уравнений и к необходимости факторизации матрицы 2×2 с элементами в виде аналитических функций, что сильно усложняет реализацию метода. В результате, в обозримом виде удалось получить только асимптотическое представление решения в дальней зоне, справедливое на расстояниях от ребра полуплоскости, значительно превышающих длину звуковой волны.

В работе [2] нами предложен существенно более простой метод решения этой задачи, приводящий к аналитическому решению одинаково эффективному во всей области дифракции – как в ближней зоне (на конечных расстояниях и вблизи ребра), так и на больших (в сравнении с длиной волны) расстояниях от полуплоскости. Начав с постановки задачи, изложим вкратце суть метода и приведем некоторые новые решения, относящиеся к случаю плоских падающих волн. Эти результаты необходимы в последующих пунктах для построения решений задач дифракции цилиндрических и сферических волн на полуплоскости в аналогичной постановке.

Избыточное давление p в газе (воздухе) или идеальной сжимаемой жидкости, возникающее из-за возмущений в дополнение к давлению в среде в состоянии покоя, удовлетворяет в линейном (акустическом) приближении волновому уравнению или следующему уравнению Гельмгольца

$$\Delta P + k^2 P = 0 \tag{1.1}$$

в случае стационарных движений с гармоническим законом изменения по времени t: $p = P(x, y, z)\exp(-i\omega t)$. В уравнении (1.1) Δ есть оператор Лапласа, а волновое число k связано с частотой ω соотношением $k = \omega/c$, в котором c – скорость звука в газе.

Тому же уравнению (1.1) удовлетворяет и потенциал скоростей частиц среды $\Phi = -iP/(\omega\rho_0)$; ρ_0 – плотность среды в состоянии покоя.

Пусть полуплоскость, вставленная в среду (барьер), является частью координатной плоскости и описывается в декартовой системе координат соотношениями $y = 0$, $x > 0$, $-\infty < z < +\infty$. На полуплоскость набегает плоская звуковая волна $p^i = P^i(x, y)\exp(-i\omega t)$, в которой компонента скорости $v_z^i = 0$ и плоскость равной фазы параллельна ребру барьера. Тогда движение в среде является плоским ($v_z \equiv 0$) и давление P, а также потенциал скоростей Φ зависят только от координат (x, y) или (r, θ), если в плоскости $z = \text{const}$ введены полярные координаты.

В соответствии со сказанным, падающая волна может быть задана в виде

$$P^i = \exp\{-ikr\cos(\theta - \theta_0)\} \tag{1.2}$$

и есть плоская волна, образующая угол θ_0 с барьером.

Предположим, что сторона барьера $\theta = 0$ является идеально отражающей звук (акустически “твердой”), а сторона $\theta = 2\pi$ – полностью поглощающей звук (акустически “мягкой”). Эти условия сводятся, соответственно, к однородным условиям Неймана и Дирихле для полного давления P на сторонах полуплоскости, т.е. к условиям

$$\partial P/\partial\theta = 0 \quad \text{при} \quad \theta = 0 \quad \text{и} \quad P = 0 \quad \text{при} \quad \theta = 2\pi \tag{1.3}$$

Поскольку рассеивающее падающую волну тело (полуплоскость) имеет угловую точку, то для обеспечения единственности решения необходимо выполнение “условий на ребре”; вывод их для акустической среды дан, например, в монографии [3]. Полученные в [3] условия (формулы 5.2.3) могут быть в случае стационарной задачи записаны в следующей эквивалентной форме: единственность решения обеспечивается когда

$$P = C + O(r^\alpha), \quad \alpha > 0 \quad \text{при} \quad r \to 0 \tag{1.4}$$

где C – константа.

Наконец, решение стационарной динамической задачи должно удовлетворять условию излучения на бесконечности. Чтобы правильно сформулировать это условие в случае наличия границ, простирающихся до бесконечности, нужно выделить из решения падающую волну и все отраженные волны, которые не обязаны удовлетворять условию излучения. Представим P в виде суммы падающей (P^i), отраженной (P^r) и дифрагированной (P^d) волн, то есть в виде

$$P = P^i + P^r + P^d \equiv P_0 + P^d \tag{1.5}$$

Тогда для обеспечения единственности решения функция P^d должна удовлетворять в рассматриваемом двумерном случае следующему условию излучения на бесконечности

$$\lim_{r\to\infty} r^{1/2}(\partial P^d/\partial r - ikP^d) = 0 \tag{1.6}$$

равномерно по θ. Знак минус в (1.6) согласован со знаком во временной экспоненте для падающей волны. Физически условие излучения (1.6) означает, что возмущение, возникающее дополнительно к падающей и отраженным волнам, ведет себя на бесконечности как уходящая от точечного источника волна.

Пусть в уравнении плоской волны (1.2) $0 < \theta_0 \le \pi$. Это означает, в соответствии с граничными условиями (1.3), что освещенная сторона $\theta = 0$ барьера является акустически “твердой”. Поскольку отраженная волна от стороны полуплоскости (на которой должно выполняться однородное краевое условие Неймана) элементарно определяется, то для суммы падающей и отраженной волн $P_0 \equiv P^i + P^r$ имеем (эта часть решения называется “решением геометрической оптики”).

$$P_0 = \begin{cases} \exp[-ikr\cos(\theta-\theta_0)] + \exp[-ikr\cos(\theta+\theta_0)], & 0 < \theta < \pi - \theta_0 \\ \exp[-ikr\cos(\theta-\theta_0)], & \pi - \theta_0 < \theta < \pi + \theta_0 \\ 0, & \pi + \theta_0 < \theta < 2\pi \end{cases} \tag{1.7}$$

Видно, что решение геометрической оптики (1.7) имеет разрывы на линиях, разделяющих области: теневую, освещенную одной падающей волной и освещенную падающей и отраженной волнами. Таким образом, задача сводится к нахождению дифрагированной волны P^d, компенсирующей эти разрывы. Простой путь построения решения задачи (1.1)–(1.6), предложенный в [2], состоит в использовании метода Фурье. Легко показывается, что ряд

$$P(r,\theta) \equiv P_0 + P^d = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{l(n)/2}(kr)\cos\frac{l(n)\theta}{2} \tag{1.8}$$

в котором $J_\nu(z)$ означают функции Бесселя, удовлетворяет при $l(n) \equiv l = n + 1/2$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) всем условиям задачи, кроме условия излучения (1.6). Далее, вычисляя асимптотику при $kr \to \infty$ косинус-преобразования Фурье функции P_0, определенной формулами (1.7), по методу стационарной фазы (см., например, [4]), находятся константы a_n в (1.8) так, чтобы удовлетворялось и условие излучения (1.6). В результате решение поставленной задачи (в форме ряда Фурье–Бесселя) принимает вид

$$P(r,\theta) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-il(n)\pi/4) J_{l(n)/2}(kr)\cos[l(n)\theta_0/2]\cos[l(n)\theta/2] \tag{1.9}$$

Ряд (1.9) удобен для вычисления поля при конечных kr, в частности, для исследования поведения поля вблизи ребра барьера. Но он может быть и просуммирован по способу, развитому в [2] и использующему известное представление бесселевой функции в виде интеграла по петлеобразному контуру, обходящему начало координат (точку $r = 0$). Тогда решение (1.9) приобретает конечную аналитическую форму, выражаясь через сумму двух интегралов:

$$P(r,\theta) = I(r,\theta-\theta_0) + I(r,\theta+\theta_0) \tag{1.10}$$

$$I(r,\alpha) = e^{-ikr\cos\alpha} - \frac{e^{ikr}}{2^{1/4}\pi i}e^{i\pi/8}\cos\frac{\alpha}{4}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-kr\lambda^2}d\lambda}{\sqrt{\lambda+\sqrt{2}e^{i\pi/4}}[\lambda-\sqrt{2}e^{i\pi/4}\cos(\alpha/2)]}$$

Сумма внеинтегральных членов в (1.10) совпадает с функцией P_0 в представлении (1.5), определяемой формулой (1.7). Следовательно, сумма двух интегральных членов для $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$ дает дифракционное поле $P^d(r,\theta)$.

При $kr \to \infty$, т.е. на больших расстояниях от ребра полуплоскости в сравнении с длиной звуковой волны, основной вклад в значения интегралов $I(r,\theta-\theta_0)$ и $I(\theta+\theta_0)$ в (1.10) дает окрестность точки $\lambda = 0$. Разлагая подынтегральные функции в названных интегралах в ряды в окрестности $\lambda = 0$ и интегрируя их в [2] получено следующее асимптотическое представление дифракционного поля в дальней зоне

$$P_{hs}^d = P_{hs} - P_0 \sim \hat{P}_{hs} = -\frac{e^{i(kr+\pi/4)}}{2\sqrt{\pi kr}}\left\{\frac{\cos[1/4(\theta-\theta_0)]}{\cos[1/2(\theta-\theta_0)]} + \frac{\cos[1/4(\theta+\theta_0)]}{\cos[1/2(\theta+\theta_0)]}\right\} \tag{1.11}$$

Полученные решения и их асимптотики помечены индексами “*hs*” (hard-soft) чтобы подчеркнуть, что результат относится к дифракции на “твердо-мягкой” полуплоскости, у которой освещенная сторона является идеально отражающей. Формула (1.11) справедлива вне малых окрестностей особых лучей $\alpha_{1,2} \equiv \theta \mp \theta_0 = \pi$, разделяющих теневую область и области, в которых существует только падающая волна и падающая и отраженная волны (точнее при $|(\theta \mp \theta_0) - \pi| > \delta > 0$, где δ – число более высокого порядка малости чем $(kr)^{-1/2}$).

Можно показать, что вне указанных окрестностей асимптотическое решение А.Д. Роулинза [1, формулы (31)] совпадает с (1.11), однако решение (1.11) значительно проще, что важно для вывода простых закономерностей гашения звука барьерами.

На практике защищаемый от звука объект или его часть могут попадать в окрестность границы раздела теневой и освещенной областей, где решение (1.11) не справедливо. Поэтому представляет интерес получение равномерной асимптотики решения в дальней зоне, имеющее смысл для всех углов θ. Для вывода последней достаточно заметить, что интеграл по действительной оси, входящий в выражение $I(r,\alpha)$ из (1.10) (обозначим его через I'), асимптотически (при $kr \to \infty$) эквивалентен интегралу, преобразующемуся в интеграл Френеля. А именно, имеют место равенства

$$\begin{aligned} I' &\sim \frac{1}{2^{1/4}e^{i\pi/8}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-kr\lambda^2}d\lambda}{\lambda-\sqrt{2}e^{i\pi/4}\cos(\alpha/2)} = \\ &= 2^{3/4}e^{i\pi/8}\eta\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{-kr\lambda^2}d\lambda}{\lambda^2-i\eta^2} = \pm\sqrt{\pi}2^{3/4}e^{i\pi/8-ikr\eta^2}F\{|\eta|\sqrt{kr}\} \end{aligned} \tag{1.12}$$

Здесь использованы обозначения: $\eta \equiv \sqrt{2}\cos(\alpha/2)$ и $F(z) \equiv \int_z^{\infty}\exp(i\mu^2)d\mu$ (интеграл Френеля); при этом, верхний знак берется при $\eta > 0$, а нижний – при $\eta < 0$.

С учетом результата (1.12), получаем из (1.10) равномерную асимптотику дифрагированного поля в дальней зоне в виде ($Q_{\pm} \equiv \sqrt{2kr}\cos[1/2(\theta \pm \theta_0)]$):

$$P_{hs}^{d} \sim \widehat{P}_{hs}^{1} = -\frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi kr}}\left\{e^{-ikr\cos(\theta-\theta_0)}\frac{\cos[1/4(\theta-\theta_0)]}{\cos[1/2(\theta-\theta_0)]}|Q_{-}|\,F(|Q_{-}|) + \right.$$
$$\left. + e^{-ikr\cos(\theta+\theta_0)}\frac{\cos[1/4(\theta+\theta_0)]}{\cos[1/2(\theta+\theta_0)]}|Q_{+}|\,F(|Q_{+}|)\right\} \tag{1.13}$$

Вне малых окрестностей особых лучей $\alpha_{1,2} \equiv \theta \mp \theta_0 = \pi$ можно в формуле (1.13) $|Q_{\pm}|\,F(|Q_{\pm}|)$ при $kr \to \infty$ заменить на $i\exp(iQ_{\pm}^2)/2$ в силу асимптотики интеграла Френеля $F(z) \sim i(2z)^{-1}\exp(iz^2) + O(z^{-3})$ для больших положительных z, получаемой методом интегрирования по частям (см., например, [5], с. 569). Следовательно, вне указанных окрестностей асимптотика (1.13) приводится к виду (1.11).

Решение для случая, когда освещенная сторона полуплоскости является акустически “мягкой” может быть получено, полагая в (1.2) угол падения большим π ($\pi < \theta_0 < 2\pi$). Тогда освещенной будет сторона полуплоскости $\theta = 2\pi$, являющаяся, согласно краевым условиям (1.3), поглощающей звук. В этом случае очевидно “решение геометрической оптики” (типа (1.7)) и асимптотика решения в дальней зоне дается теми же функциями (1.11), (1.13), в которых необходимо только сделать замену аргументов: $\theta_0 \to 2\pi - \theta_0$, $\theta \to 2\pi - \theta$ (и отсчитывать углы от акустически “мягкой” стороны полуплоскости в противоположном направлении). Таким образом, $\widehat{P}_{sh}(r,\theta,\theta_0) = \widehat{P}_{hs}(r, 2\pi-\theta, 2\pi-\theta_0)$, $\widehat{P}_{sh}^{1}(r,\theta,\theta_0) = \widehat{P}_{hs}^{1}(r, 2\pi-\theta, 2\pi-\theta_0)$ и, следовательно, выражения для $\widehat{P}_{sh}$ и $\widehat{P}_{sh}^{1}$ совпадают с (1.11), (1.13), если в последних изменить знаки перед вторыми слагаемыми.

2. Дифракция цилиндрических волн. Автомобили на автостраде производят звук в области частот от 10 до 2000 Гц. При этом, пик интенсивности (в *децибелах*) достигается для колебаний частоты, равной примерно 500 Гц [6]. Шум от качения колес железнодорожного состава по рельсу состоит из колебаний с частотами от 50 до 4000 Гц с пиковым значением интенсивности для колебаний частоты ≈1600 Гц [7]. Таким образом, при скорости звука в воздухе равной 330 м/с основной вклад в создаваемый шум вносят звуковые колебания с длинами волн равными ≈66 см в первом случае и ≈21 см – во втором. Шумозащищающие барьеры и щиты (экраны), расположенные вдоль автострад и железных дорог, находятся от источников звука на расстояниях, сравнимых или одного порядка с названными длинами волн. Поэтому, для оценки эффективности барьеров необходимо иметь решения задач дифракции волн от источника (линейного или точечного), когда приближение плоской падающей волны может оказаться слишком грубым и неприемлемым. Однако, расстояния от барьеров до защищаемых от шума зданий или других объектов даже в черте города значительно (на порядок или несколько порядков) превышают указанные длины волн. Следовательно, достаточно получить асимптотические решения рассматриваемых задач в дальней зоне (вдали от ребра барьера). Последнее обстоятельство важно, поскольку далеко не всегда существуют в удобном аналитическом виде решения возникающих здесь задач дифракции и, сверх того, если даже точное решение найдено, удобнее воспользоваться асимптотическим решением для вывода в наиболее простой и наглядной форме характеристик гашения волн экранами.

Поток машин на автостраде и длинный железнодорожный состав можно рассматривать как линейно распределенные источники звука, возбуждающие цилиндрические волны. Когда источники звука распределены на прямой, параллельной ребру полуплоскости, возникает плоская задача дифракции, сформулированная в п. 1, в которой плоскую падающую волну (1.2) необходимо заменить на цилиндрическую волну

$$P^i(r,\theta;r_0,\theta_0) = H_0^{(1)}(kR), \quad R \equiv \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\theta - \theta_0)} \tag{2.1}$$

В (2.1) R есть расстояние от точки (r_0,θ_0), в которой сосредоточен источник, до произвольной точки наблюдения (r,θ), а $H_0^{(1)}(z)$ – функция Ханкеля первого рода. Выбор этой функции из двух линейно независимых решений $H_0^{(1)}(kR)$ и $H_0^{(2)}(kR)$ плоского уравнения Гельмгольца (1.1) объясняется тем, что в силу известных асимптотических свойств функций Ханкеля $H_0^{(1,2)}(kR) \sim \sqrt{2/(\pi kR)}\cdot\exp[\pm i(kR - \pi/4)]$ при $kR \gg 1$ (знак “+” относится к функции первого рода), только волна (2.1) является уходящей на бесконечность и удовлетворяющей условию излучения (1.6) (при выбранном временном множителе $\exp(-i\omega t)$).

Как и в п. 1, предположим, что $0 < \theta_0 \le \pi$; тогда освещенная сторона полуплоскости $\theta = 0$ является в соответствии с граничным условием (1.3) акустически “твердой”.

Поскольку, как отмечено выше, для приложений к звуковым барьерам достаточно получения асимптотического решения в дальней зоне, используем для его получения в случае цилиндрической падающей волны метод геометрической теории дифракции Келлера, наиболее подробно изложенный в работе [8]. Согласно этой теории дифрагированная от ребра полуплоскости цилиндрическая волна представляется в виде

$$P_C^d = \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}}a(\theta;r_0,\theta_0,k) \tag{2.2}$$

в котором амплитуда $A = a(\theta;\theta_0,r_0,k)/\sqrt{r}$ удовлетворяет закону сохранения энергии в лучевой трубке. Функция $a(\theta;\theta_0,r_0,k)$ определяется из решения эталонной задачи о дифракции плоской волны на полуплоскости, а именно, той плоской волны, в которую переходит цилиндрическая падающая волна (2.1) при удалении источника в бесконечность вдоль луча $\theta = \theta_0$. Тогда, при $r_0 \to \infty$ (а, следовательно, и $kR \to \infty$) волна от источника (2.1) переходит в плоскую волну

$$P^{i0} = m_C(r_0,k)e^{-ikr\cos(\theta-\theta_0)}, \quad m_C(r_0,k) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi kr_0}}e^{ikr_0 - i\pi/4} \tag{2.3}$$

Следовательно, решение задачи дифракции плоской волны (2.3) на “твердо-мягкой” полуплоскости совпадает с решением (1.11), помноженным на множитель (амплитуду падающей волны) m_C, т.е. оно равно

$$P_{hs}^{d0} = -\frac{e^{ik(r_0+r)}}{\sqrt{2}\pi k\sqrt{r_0r}}\left\{\frac{\cos[1/4(\theta-\theta_0)]}{\cos[1/2(\theta-\theta_0)]} + \frac{\cos[1/4(\theta+\theta_0)]}{\cos[1/2(\theta+\theta_0)]}\right\} \tag{2.4}$$

Сравнивая (2.4) с (2.2) получаем значение функции $a(\theta;\theta_0,r_0,k)$ и дифракционную волну P_C^d. Выражение для P_C^d, которое в данном случае (дифракции цилиндрической волны) совпадает с (2.4), перепишем в виде

$$P_C^d = P_{hs}^{d0} = -\frac{e^{ik(r_0+r)}}{2\pi k\sqrt{r_0r}}D_{hs}(\theta,\theta_0) \tag{2.5}$$

вводя функцию, зависящую только от углов и называемую в теории Келлера коэффициентом дифракции

$$D_{hs}(\theta,\theta_0) = \sqrt{2}\left\{\frac{\cos[1/4(\theta-\theta_0)]}{\cos[1/2(\theta-\theta_0)]} + \frac{\cos[1/4(\theta+\theta_0)]}{\cos[1/2(\theta+\theta_0)]}\right\} \tag{2.6}$$

Выбор коэффициента дифракции (2.6) со множителем $\sqrt{2}$ продиктован тем, чтобы сделать запись решения в форме (2.5) универсальной, в которой при других граничных условиях (например, однотипных) заменяется только коэффициент дифракции.

Чтобы получить полное решение задачи нужно к полю дифракции (2.5), (2.6) добавить в соответствующих областях падающую (2.1) и отраженную от стороны полуплоскости цилиндрические волны, т.е. добавить "решение геометрической оптики", аналогичное (1.7), которое и в данном случае легко выписывается. Полученная асимптотика непригодна при $\theta \approx \pi \pm \theta_0$, т.е. в окрестности границ по разному освещенных областей, из-за того, что выражение (2.6) не справедливо в этих окрестностях. Однако, в рассматриваемой задаче может быть получена и равномерная асимптотика, компенсирующая (сглаживающая) разрывы на линиях $\theta = \pi \pm \theta_0$ части решения типа (1.7), если принять во внимание, что асимптотики дифракционных полей для цилиндрической (2.5) и плоской волн (1.11) связаны между собой через множитель (константу) $m_C(r_0, k) \equiv \sqrt{2/(\pi k r_0)} e^{ikr_0 - i\pi/4}$ (через тот же, что связывает волну от источника (2.1) и плоскую волну (2.3)). Следовательно, указанная равномерная асимптотика дается равенством

$$P_C^{d1} = \sqrt{\frac{2}{\pi k r_0}} e^{ikr_0 - i\pi/4} \widehat{P}_{hs}^1(r, \theta; \theta_0)$$

в котором $\widehat{P}_{hs}^1(r, \theta; \theta_0)$ есть равномерная асимптотика для случая плоской падающей волны, определенная формулой (1.13).

3. Дифракция сферических волн на твердо-мягкой полуплоскости. Сферическая волна от точечного источника в точке $A(r_0, \theta_0, z_0)$задается в виде

$$P^i = e^{ikR_1}/R_1, \quad R_1 \equiv \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\theta - \theta_0) + (z - z_0)^2} \tag{3.1}$$

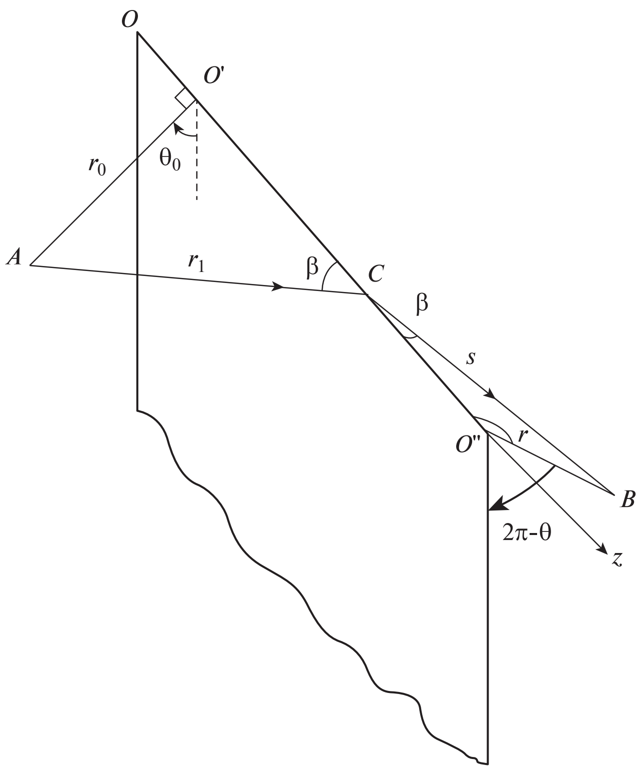
Считаем угол θ_0, отсчитываемый по часовой стрелке от акустически твердой стороны полуплоскости (фиг. 1) меньшим π; тогда эта сторона будет освещенной. Поле (давление) в произвольной точке $B(r, \theta, z)$, вызванное дифракцией волны (3.1) на ребре OO'' полуплоскости будем также искать, используя геометрическую теорию дифракции Дж.Б. Келлера [8]. Согласно этой теории в пространственном случае каждый луч AC, попавший в точку C ребра, возбуждает бесконечное множество дифрагированных лучей, образующих в однородной среде (с одинаковой скоростью звука во всех направлениях) круговой конус с осью, совпадающей с ребром полуплоскости. Тогда из принципа Ферма для однородной среды следует, что дифракционный луч, попавший в точку наблюдения B исходит из той точки C ребра, для которой расстояние вдоль лучей $AC + CB$ является кратчайшим. Последнее имеет место, когда угол полураствора конуса дифрагированных лучей совпадает с углом, образуемым падающим лучом AC с ребром барьера (на фигуре этот угол обозначен через β).

Амплитуда поля в точке B выписывается из условия сохранения энергии в лучевой трубке, включающей в себя малый элемент ребра вблизи точки C (в нашем случае прямолинейный элемент радиуса кривизны $\rho = \infty$), что приводит к результату (см. [8], §§ 4–6, где приняты несколько иные обозначения)

$$P_S^d = a_0 a(\theta, \theta_0, k, \beta)[s(1 + r_1^{-1}s)]^{-1/2} e^{ik(r_1 + s)} \tag{3.2}$$

В формуле (3.2) $r_1 = |AC|$, $s = |CB|$ и a_0 есть амплитуда сферической волны (3.1) в точке C, т.е. $a_0 = 1/r_1$.

Как и в предыдущем пункте, функция $a(\theta, \theta_0, k, \beta)$ определяется из решения эталонной задачи о дифракции плоской волны на полуплоскости, но уже пространственной, в которой луч, перпендикулярный плоскости фронта и попадающий в точку C ребра образует угол β с ребром полуплоскости (иначе говоря, фронт плоской волны перпендикуля-



Фиг. 1

рен лучу AC). Точное асимптотическое решение этой пространственной задачи с граничными условиями (1.3) так же, как и в случае однотипных граничных условий, легко получить из соответствующей точной асимптотики (1.11) двумерной задачи заменой в последней k на $k\sin\beta$ и умножением выражения (1.11) на множитель $\exp(ikz\cos\beta)$. С другой стороны, асимптотическое представление этого решения, полученное по методу геометрической теории дифракции в [8] содержит неопределенную функцию $a(\theta,\theta_0,k,\beta)$ пространственной задачи (заметим, что форма асимптотики в геометрической теории дифракции не зависит от типа краевых условий, от краевых условий зависит вид функции $a(\theta,\theta_0,k,\beta)$). Сравнивая указанные асимптотические решения, имеем

$$a(\theta,\theta_0,k,\beta) = -\frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{\pi k}\sin\beta}\left\{\frac{\cos[1/4(\theta-\theta_0)]}{\cos[1/2(\theta-\theta_0)]}+\frac{\cos[1/4(\theta+\theta_0)]}{\cos[1/2(\theta+\theta_0)]}\right\} \tag{3.3}$$

Подставляя теперь (3.3) в (3.2), получаем асимптотику решения в дальней зоне для задачи дифракции сферической волны на твердо-мягкой полуплоскости в виде

$$\begin{aligned} P_S^d &= -\frac{e^{ik(r_1+s)+i\pi/4}}{2\sqrt{\pi k}\sqrt{r_1 s(r_1+s)}\sin\beta}\left\{\frac{\cos[1/4(\theta-\theta_0)]}{\cos[1/2(\theta-\theta_0)]}+\frac{\cos[1/4(\theta+\theta_0)]}{\cos[1/2(\theta+\theta_0)]}\right\} = \\ &= -\frac{e^{ikL}}{2\sqrt{2\pi kL}}\frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{r_0 r}}D_{hs}(\theta,\theta_0) \end{aligned} \tag{3.4}$$

В (3.4) введены обозначения (фиг. 1): $L = r_1 + s = |AC| + |CB|$, $r_0 = r_1\sin\beta$, $r = s\sin\beta$.

Таблица 1

Падающая волна	Дифрагированная волна в дальней зоне ($kr \gg 1, kL \gg 1$)
Плоская	$P^d = -\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi kr}} e^{ikr+i\pi/4} D(\theta, \theta_0)$
Цилиндрическая	$P_C^d = -\dfrac{e^{ikr}}{\sqrt{2\pi kr}} \dfrac{e^{ikr_0}}{\sqrt{2\pi kr_0}} D(\theta, \theta_0)$
Сферическая	$P_S^d = -\dfrac{e^{ikL}}{2\sqrt{2\pi kL}} \dfrac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{r_0 r}} D(\theta, \theta_0)$

4. Заключение. Полезно дать сводку полученных решений в виде таблицы, в которой (при разнотипных краевых условиях) коэффициент дифракции D следует положить равным D_{hs}, если освещенная сторона полуплоскости является акустически твердой, и равным D_{sh}, если освещенная сторона является акустически мягкой. Эти коэффициенты, в соответствии с полученными в работе решениями, даются соотношениями (верхний знак относится к D_{hs})

$$(D_{hs}, D_{sh}) = \sqrt{2}\left\{\frac{\cos[1/4(\theta-\theta_0)]}{\cos[1/2(\theta-\theta_0)]} \pm \frac{\cos[1/4(\theta+\theta_0)]}{\cos[1/2(\theta+\theta_0)]}\right\}$$

Таблица 1 дает также асимптотические решения задач дифракции на полуплоскости и для однотипных краевых условий, если для коэффициента дифракции принять одно из следующих выражений

$$(D_h, D_s) = \frac{1}{\cos[1/2(\theta-\theta_0)]} \pm \frac{1}{\cos[1/2(\theta+\theta_0)]}$$

При этом, D_h (с верхним знаком в приведенной формуле) соответствует краевым условиям Неймана на сторонах полуплоскости, а D_s – условиям Дирихле на них. Асимптотические решения для однотипных краевых условий известны и выписаны, например, в [9] (следует иметь в виду, что в этой работе коэффициенты дифракции D_h и D_s приведены с ошибочным множителем 1/2; можно этот множитель ввести в выражения для D_h и D_s, но тогда следует изменить коэффициенты при $D(\theta, \theta_0)$ в приведенных в [9] асимптотических решениях для всех трех типов падающих волн).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 17-08-00066).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rawlins A.D.* The solution of a mixed boundary value problem in the theory of diffraction by a semi-infinite plane // Proc. Roy. Soc. L. 1975. A346. № 1647. P. 469–484.
2. *Исраилов М.Ш.* Дифракция акустических и упругих волн на полуплоскости при разнотипных граничных условиях // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 3. С. 121–134.
3. *Friedlender F.G.* Sound pulses. Cambridge: Univ. Press, 1958. Фридлендер Ф. Звуковые импульсы. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 232 с.
4. *Holmes M.H.* Introduction to Perturbation Methods. N.Y. ets.: Springer, 1995. 338 p.
5. *Born M., Wolf E.* Principles of optics. London: Pergamon Press, 1959. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970. 856 с.
6. *Klinger R.E., McNerney M.T., Busch-Vishniac I.* Design Guide for Highway Noise Barriers // Res. Rep. U.S. Department of Transportation. Washington, 2003. 81 p.
7. *Hohenwarter D.* Railway Noise Propagation Models // J. Sound and Vibration. 1990. V. 141. № 3. P. 17–41.
8. *Keller J.B.* Diffraction by an aperture. I // New York Univ., Inst. Math. Sci., Tech. Rep. № EM-92. N.Y., 1956. 61 p.
9. *Menounou P., Busch-Vishniac I.J., Blackstock D.T.* Directive line source model: A new model for sound diffraction by half-planes and wedges // J. Acoust. Soc. Am. 2000. V. 107. № 6. P. 2973–2986.