ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
2019, № 1, с. 72–87

УДК 539.3:539.621

ТЕРМОУПРУГАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В СВЯЗАННОЙ КВАЗИСТАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕРМОУПРУГОСТИ О СКОЛЬЗЯЩЕМ КОНТАКТЕ С РАЗОГРЕВОМ ОТ ТРЕНИЯ

В. Б. Зеленцов[a], **Б. И. Митрин**[a,*]

[a]*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия*
** e-mail: bmitrin@dstu.edu.ru*

Поступила в редакцию 07.08.2017 г.
После доработки 07.08.2017 г.
Принята к публикации 03.05.2018 г.

Рассматривается связанная квазистатическая контактная задача термоупругости о скользящем фрикционном контакте с учетом разогрева от трения. Точные решения задачи построены в виде сверток Лапласа, а после их вычисления – в виде бесконечных рядов по собственным числам задачи. Исследование собственных чисел задачи проводится в зависимости от трех безразмерных параметров задачи. На основании анализа полученных решений удается в пространстве безразмерных параметров выделить области устойчивых и неустойчивых решений. Свойства полученных решений изучаются в зависимости от размерных и безразмерных параметров задачи. В условиях основной задачи исследования формулируются и решаются частные задачи о мониторинге параметров скользящего контакта, а также задачи об управлении параметрами контакта для избежания термоупругой неустойчивости.

Ключевые слова: связанная термоупругость, квазистатика, скольжение, трение, тепловыделение от трения, термоупругая неустойчивость

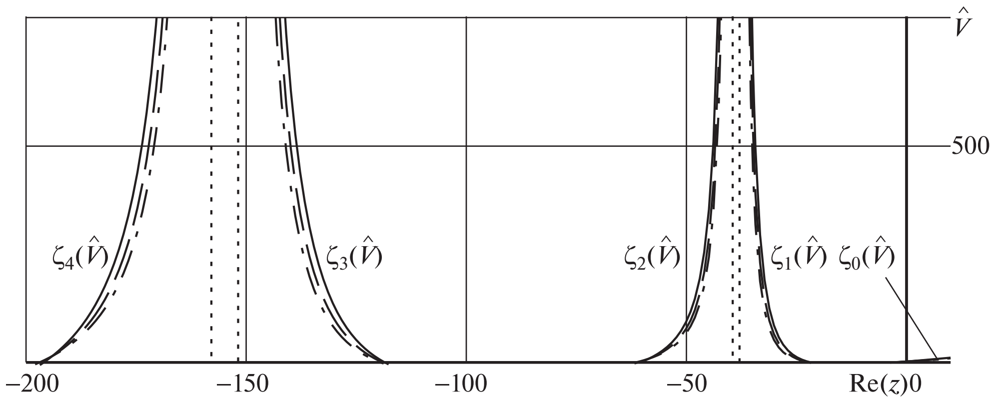
DOI: 10.1134/S0572329919010124

1. Введение. Повышенный интерес к исследованию задач термоупругости с учетом взаимодействия полей деформации и температуры получил развитие в середине прошлого века [1–3]. Новое направление исследований – связанная термоупругость – получило развитие в [3–5] и других.

Для решения задач связанной термоупругости использовались как аналитические [4, 5], так и численные [6] методы: метод конечных элементов, метод граничных и интегральных уравнений и др. Для решения связанных задач термоупругости разрабатывались в основном конечно-элементные модели в [7–11] и других. Аналитические методы решения этого класса задач были подытожены в [12].

Несвязанные задачи термоупругости о скользящем контакте жесткого тела с упругим покрытием с учетом трения и разогрева от трения на контакте рассматривались как отечественными, так и зарубежными учеными [13–23]. Исследование несвязанных задач термоупругости о скользящем контакте позволило установить наличие областей устойчивых и неустойчивых решений. Изучению свойств неустойчивых решений несвязанных задач термоупругости о скользящем контакте посвящены исследования, проводимые как аналитическими [13, 22, 23], так и численными методами [14–21].

В настоящей работе в рамках связанной термоупругости аналитическими методами в пространстве безразмерных параметров задачи изучаются границы области устойчивых и области неустойчивых решений, которую на практике часто называют областью



Фиг. 1

термоупругой неустойчивости скользящего контакта. Исследуются признаки возникновения и развития термоупругой неустойчивости. Формулируются частные задачи опосредованного мониторинга основных параметров скользящего контакта и задачи управления этими параметрами.

2. Постановка основной задачи. Рассматривается контактная задача связанной термоупругости о скольжении с постоянной скоростью V жесткой теплоизолированной полуплоскости I ($h \le x < \infty$) по верхней поверхности ($x = h$) упругого теплопроводящего покрытия толщины h ($0 \le x \le h$), нижняя поверхность которого жестко сцеплена с недеформируемой, нетеплопроводной подложкой в виде полуплоскости II ($-\infty < x < 0$). Скольжение полуплоскости I по поверхности упругого покрытия происходит с учетом кулоновского трения. Поток тепла, образующийся на контакте за счет трения, направлен в покрытие. С начального момента времени движущаяся вдоль оси y полуплоскость I деформирует поверхность ($x = h$) упругого покрытия, смещаясь в направлении, противоположном направлению оси x, по закону $\Delta(t)$. До начального момента покрытие находится в покое, а его температура равняется T_0.

Рассматриваемая задача предполагает, что распределения температуры, смещений и напряжений в покрытии не зависят от выбора горизонтальной координаты по оси y, параллельной направлению движения полуплоскости I, и являются функциями только вертикальной координаты x и времени t. В этом случае дифференциальные уравнения термоупругости [24]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha\frac{\partial T}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < h, \quad t > 0 \tag{2.1}$$

совместно с дифференциальным уравнением связанной теплопроводности [24]:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{\kappa}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{3\lambda + 2\mu}{K}\alpha T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \quad 0 < x < h, \quad t > 0 \tag{2.2}$$

составляют систему дифференциальных уравнений связанной термоупругости, описывающих поведение упругого покрытия, в которых $u(x,t)$, $w(x,t)$ — вертикальные и горизонтальные смещения материала покрытия, $T(x,t)$ — температура в покрытии, λ, μ — постоянные Ламе, ν — коэффициент Пуассона, α — коэффициент линейного теплового расширения материала покрытия, κ — коэффициент температуропроводности, K — коэффициент теплопроводности, T_0 — начальная температура в покрытии.

Граничные условия сформулированной задачи для дифференциальных уравнений (2.1), (2.2) имеют вид:

$$x = h: \quad u(h,t) = -\Delta(t), \quad \sigma_{xy}(h,t) = -f\sigma_{xx}(h,t) \tag{2.3}$$

$$K\frac{\partial T(h,t)}{\partial x} = -fV\sigma_{xx}(h,t) \tag{2.4}$$

$$x = 0: \quad u(0,t) = 0, \quad w(0,t) = 0, \tag{2.5}$$

$$K\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = k\left(T(0,t) - T_0\right) \tag{2.6}$$

где f — коэффициент трения, k — коэффициент теплообмена, $\sigma_{xx}(x,t)$, $\sigma_{xy}(x,t)$ — нормальные и касательные напряжения в покрытии:

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u}{\partial x} - (3\lambda + 2\mu)\alpha(T - T_0), \quad \sigma_{xy} = \mu\frac{\partial w}{\partial x} \tag{2.7}$$

Начальные условия задачи на смещения u, w — нулевые:

$$u(x,0) = w(x,0) = 0, \quad \Delta(0) = 0 \tag{2.8}$$

Начальная температура в покрытии

$$T(x,0) = T_0 \tag{2.9}$$

Следует заметить, что вертикальные смещения $u(x,t)$, нормальные напряжения $\sigma_{xx}(x,t)$ и температура $T(x,t)$ в упругом покрытии определяются независимо от горизонтальных смещений $w(x,t)$. Горизонтальные смещения определяются из второго уравнения в (2.1), граничных (2.3), (2.5) и начальных условий (2.8) через нормальные напряжения $\sigma_{xx}(h,t)$.

3. Точное решение задачи. Решение связанной контактной задачи термоупругости, поставленной в предыдущем пункте, определяется с помощью интегрального преобразования Лапласа [25] в виде сверток Лапласа для температуры $T(x,t)$, смещений $u(x,t)$ и напряжений $\sigma_{xx}(x,t)$ в покрытии

$$T(x,t) - T_0 = \frac{1-\nu}{1+\nu}\frac{1}{\alpha h}\int_0^t \Delta(\tau) f_T^0(x,t-\tau)d\tau, \quad 0 \le x \le h, \quad t > 0 \tag{3.1}$$

$$f_T^0(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{N_T^0(x,z)}{t_\kappa R(z)} e^{z\tilde{t}} dz, \quad \tilde{t} = \frac{t}{t_\kappa}, \quad t_\kappa = \frac{h^2}{\kappa} \tag{3.2}$$

$$N_T^0(x,z) = \hat{V}\beta^2\sqrt{z}\left(\mathrm{Bi}\ \mathrm{sh}\sqrt{z}\frac{x}{h} + \sqrt{z}\,\mathrm{ch}\sqrt{z}\frac{x}{h}\right) + \hat{T}z\left(r(z) - \mathrm{Bi}\ \mathrm{ch}\sqrt{z}\frac{h-x}{h}\right) \tag{3.3}$$

$$R(z) = zr(z) - \hat{V}\beta^2\left(r(z) - \mathrm{Bi}\right) + \hat{T}\mathrm{Bi}\sqrt{z}\,\mathrm{sh}\sqrt{z} \tag{3.4}$$

$$r(z) = \mathrm{Bi}\ \mathrm{ch}\sqrt{z} + \sqrt{z}\,\mathrm{sh}\sqrt{z}$$

$$u(x,t) = -\int_0^t \Delta(\tau) f_u^0(x,t-\tau)d\tau, \quad 0 \le x \le h, \quad t > 0 \tag{3.5}$$

$$f_u^0(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{N_u^0(x,z)}{t_\kappa R(z)} e^{z\tilde{t}} dz \tag{3.6}$$

$$
\begin{gathered}
N_u^0(x,z) = zr(z)\frac{x}{h} - \hat{V}\beta^2\left(\sqrt{z}\,\mathrm{sh}\sqrt{z}\frac{x}{h} - \mathrm{Bi}\left(1 - \mathrm{ch}\sqrt{z}\frac{x}{h}\right)\right) + \\
+ \hat{T}\mathrm{Bi}\sqrt{z}\left(\mathrm{sh}\sqrt{z} - \mathrm{sh}\sqrt{z}\frac{h-x}{h}\right)
\end{gathered}
\tag{3.7}
$$

$$
\sigma_{xx}(x,t) = -\frac{2\mu(1-\nu)}{(1-2\nu)h}\int_0^t \Delta(\tau) f_\sigma^0(x,t-\tau)d\tau, \quad 0 \le x \le h, \quad t > 0 \tag{3.8}
$$

$$
f_\sigma^0(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{N_\sigma^0(x,z)}{t_\text{к}R(z)}e^{z\tilde{t}}dz \tag{3.9}
$$

$$
N_\sigma^0(x,z) = (1+\hat{T})zr(z) \tag{3.10}
$$

где

$$
\mathrm{Bi} = \frac{kh}{K}, \quad \hat{V} = \frac{fV\alpha}{K}\frac{2\mu(1+\nu)h}{(1-2\nu)}, \quad \hat{T} = \frac{2\mu(1+\nu)^2}{(1-\nu)(1-2\nu)}\frac{\kappa\alpha^2}{K}T_0, \quad \beta^2 = 1+\hat{T},
$$

Контур интегрирования $\Gamma = \{z: -i\infty + dt_\text{к}, i\infty + dt_\text{к}\}$ представляет собой прямую линию в комплексной плоскости переменной интегрирования z, параллельную мнимой оси и отстоящую вправо от нее на величину $dt_\text{к} > 0$. Значение d подбирается таким образом, чтобы контур интегрирования проходил правее всех изолированных особых точек подынтегральных функций. Следует заметить, что при $\hat{T} = 0$ полученные формулы (3.1)–(3.10) совпадают с соответствующими формулами несвязанной задачи термоупругости о скользящем термофрикционном контакте [23].

В полученных формулах решения рассматриваемой задачи (3.1)–(3.10) для $T(x,t)$, $u(x,t)$, $\sigma_{xx}(x,t)$ присутствуют контурные квадратуры (3.2), (3.6), (3.9). Подынтегральные функции этих квадратур в комплексной плоскости переменной интегрирования z являются функциями мероморфными, содержащими счетное множество полюсов. На бесконечности в комплексной плоскости переменной интегрирования z подынтегральные функции из (3.2), (3.6), (3.9) имеют следующие асимптотические оценки

$$
N_T^0(x,z)R^{-1}(z) = \hat{T} + O(z^{-1/2}) \quad \text{при} \quad |z| \to \infty, \quad 0 < x < h \tag{3.11}
$$

$$
N_u^0(x,z)R^{-1}(z) = -\frac{x}{h} + O(z^{-1/2}) \quad \text{при} \quad |z| \to \infty, \quad 0 < x < h \tag{3.12}
$$

$$
N_\sigma^0(x,z)R^{-1}(z) = 1 + \hat{T} + O(z^{-1/2}) \quad \text{при} \quad |z| \to \infty, \quad 0 < x < h \tag{3.13}
$$

Проведенные исследования показывают, что квадратуры (3.2), (3.6), (3.9) в обычном смысле не существуют и понимаются в обобщенном смысле [26]. После регуляризации подынтегральных функций контурных квадратур на бесконечности (при $|z| \to \infty$) с учетом асимптотических соотношений (3.11)–(3.13) контурные квадратуры записываются в виде суперпозиции регулярной части обобщенной составляющей и свертки Лапласа

$$
T(x,t) - T_0 = \frac{1-\nu}{1+\nu}\frac{1}{\alpha h}\left(\hat{T}\Delta(t) + \int_0^t \Delta(\tau)f_T(x,t-\tau)d\tau\right), \quad 0 \le x \le h, \quad t > 0 \tag{3.14}
$$

$$
f_T(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{N_T(x,z)}{t_\text{к}R(z)}e^{z\tilde{t}}dz, \quad N_T(x,z) = N_T^0(x,z) - \hat{T}R(z) \tag{3.15}
$$

$$
u(x,t) = -\Delta(t)\frac{x}{h} - \int_0^t \Delta(\tau)f_u(x,t-\tau)d\tau, \quad 0 \le x \le h, \quad t > 0 \tag{3.16}
$$

$$f_u(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{N_u(x,z)}{t_к R(z)} e^{z\tilde{t}} dz, \quad N_u(x,z) = N_u^0(x,z) - \frac{x}{h}R(z) \tag{3.17}$$

$$\sigma_{xx}(x,t) = -\frac{2\mu(1-\nu)}{(1-2\nu)h}\left((1+\hat{T})\Delta(t) - \int_0^t \Delta(\tau) f_\sigma(x, t-\tau)d\tau\right), \quad 0 \le x \le h, \quad t > 0 \tag{3.18}$$

$$f_\sigma(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{N_\sigma(x,z)}{t_к R(z)} e^{z\tilde{t}} dz, \quad N_\sigma(x,z) = N_\sigma^0(x,z) - (1+\hat{T})R(z) \tag{3.19}$$

в которых $N_T^0(x,z)$, $N_u^0(x,z)$, $N_\sigma^0(x,z)$, $R(z)$ из формул (3.3), (3.7), (3.10), (3.4) соответственно.

Квадратуры в (3.15), (3.17), (3.19) являются регулярными, подынтегральные функции квадратур являются мероморфными и на бесконечности имеют степенное убывание

$$N_{T,u,\sigma}^0(x,z)R^{-1}(z) = O(z^{-1/2}), \quad |z| \to \infty, \quad 0 \le x \le h \tag{3.20}$$

Для их вычисления можно использовать методы теории функций комплексного переменного [27]. В связи с этим возникает задача определения полюсов подынтегральных функций в квадратурах (3.15), (3.17), (3.19) в комплексной плоскости переменной интегрирования.

4. Полюсы подынтегральных функций. Полюсы подынтегральных функций в (3.15), (3.17), (3.19) совпадают с нулями $R(z)$ из (3.4) за исключением тех нулей $R(z)$, которые являются устранимыми особыми точками подынтегральных функций. Для определения нулей знаменателя подынтегральных функций $R(z)$ необходимо решить уравнение

$$R(z) = zr(z) - \hat{V}\beta^2\left(r(z) - \mathrm{Bi}\right) + \hat{T}\mathrm{Bi}\sqrt{z}\,\mathrm{sh}\sqrt{z} = 0 \tag{4.1}$$

в комплексной плоскости $z = \xi + i\eta$, где β^2, Bi, $\hat{T}$, $\hat{V}$ даны после (3.10).

В уравнении (4.1) нули $R(z)$ зависят от трех безразмерных параметров задачи $\hat{V}$, Bi, $\hat{T}$, так как четвертый безразмерный параметр β^2 выражается через $\hat{T}$. Исследование поведения нулей $R(z)$ из (4.1) проводилось, используя опыт [22, 23] в зависимости от $\hat{V} \in [0,\infty)$ при фиксированных Bi, $\hat{T}$. Вычисления показали, что уравнение (4.1) имеет счетное множество действительных корней ζ_k $k = 0, 1, 2, \ldots$, которые являются полюсами подынтегральных функций (3.15), (3.17), (3.19), На фиг. 1 показано изменение действительной части полюсов ζ_k $k = 0$–4 для Bi = 100. Сплошной линией показана величина полюса при значении параметра связанности $\hat{T} = 0$, что соответствует несвязанной задаче термоупругости [23]; штриховая линия соответствует $\hat{T} = 0.25$, а штрихпунктирная – $\hat{T} = 0.5$.

На фиг. 1 видно, что $\zeta_k(\hat{V}) < 0$ $k = 1, 2, 3, \ldots$ при любых значениях $\hat{V} \in [0,\infty)$. Знак полюса ζ_0 зависит от значения $\hat{V}$: при $\hat{V} < \hat{V}_c$ где

$$\hat{V}_c = \frac{2\mathrm{Bi}}{2+\mathrm{Bi}} \tag{4.2}$$

величина $\zeta_0(\hat{V}) < 0$, при $\hat{V} = \hat{V}_c$ полюс находится в начале координат $\zeta_0(\hat{V}_c) = 0$, в то время как при $\hat{V} > \hat{V}_c$ полюс становится положительным $\zeta_0(\hat{V}_c) > 0$ и при неограниченном увеличении $\hat{V}$ $\lim\limits_{\hat{V}\to\infty} \zeta_0(\hat{V}) = \infty$.

5. Эффективные решения задачи. В предположении, что полюсы подынтегральных функций ζ_k $k = 0, 1, 2, \ldots$ из (3.15), (3.17), (3.19) однократны и известны, формулы вычисления перечисленных квадратур принимают вид

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{N_{T,u,\sigma}(x,z)}{t_{\kappa}R(z)}e^{z\tilde{t}}dz = \sum_{k=0}^{\infty}B_{T,u,\sigma}(x,\zeta_k)e^{\zeta_k\tilde{t}}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{t_{\kappa}} \tag{5.1}$$

$$B_{T,u,\sigma}(x,z) = \frac{N_{T,u,\sigma}(x,z)}{t_{\kappa}R'(z)} \tag{5.2}$$

где $R'(z)$ – производная от $R(z)$.

С учетом (3.14)–(3.19) и (5.2) получается, что

$$f_a(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{N_a(x,z)}{t_{\kappa}R(z)}e^{z\tilde{t}}dz = \sum_{k=0}^{\infty}B_a(x,\zeta_k)e^{\zeta_k\tilde{t}}, \quad a = T,u,\sigma \tag{5.3}$$

Решения задачи $T(x,t)$, $u(x,t)$, $\sigma_{xx}(x,t)$ при этом записываются в виде рядов по полюсам ζ_k $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$T(x,t) - T_0 = \frac{1-\nu}{1+\nu}\frac{1}{\alpha h}\left(\hat{T}\Delta(t) + \sum_{k=0}^{\infty}B_T(x,\zeta_k)D(\zeta_k,t)\right), \quad 0 \le x \le h, \quad t > 0 \tag{5.4}$$

$$u(x,t) = -\Delta(t)\frac{x}{h} + \sum_{k=0}^{\infty}B_u(x,\zeta_k)D(\zeta_k,t), \quad 0 \le x \le h, \quad t > 0 \tag{5.5}$$

$$\sigma_{xx}(x,t) = -\frac{2\mu(1-\nu)}{(1-2\nu)h}\left[(1+\hat{T})\Delta(t) + \sum_{k=0}^{\infty}B_{\sigma}(x,\zeta_k)D(\zeta_k,t)\right], \quad 0 \le x \le h, \quad t > 0 \tag{5.6}$$

где $B_a(x,z)$ вычисляется по формуле (5/2), $D(z,t)$ по формуле

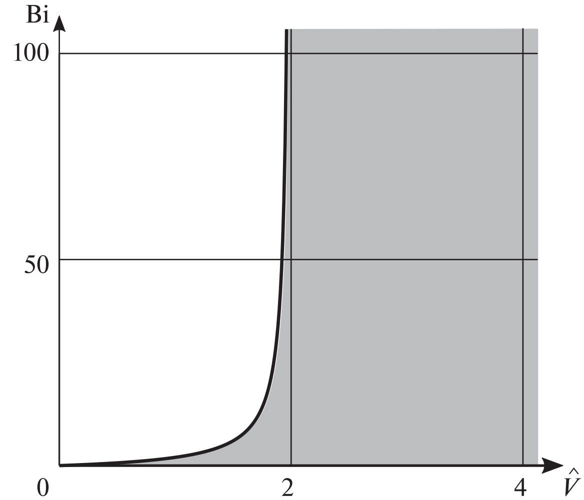
$$D(z,t) = \int_0^t \Delta(\tau)\exp\left(z(t-\tau)/t_{\kappa}\right)d\tau, \quad t > 0 \tag{5.7}$$

Горизонтальные смещения $w(x,t)$ определяются из (2.1) и вторых условий в (2.3), (2.5) и даются формулой

$$w(x,t) = -f\mu^{-1}\sigma_{xx}(h,t)x, \quad 0 \le x \le h, \quad t > 0 \tag{5.8}$$

6. Анализ решений задачи. Области устойчивых и неустойчивых решений. При анализе свойств полученных решений $T(x,t)$, $u(x,t)$, $\sigma_{xx}(x,t)$ используются разные их формы, как в виде свертки Лапласа (3.14), (3.16), (3.18), где одна из подынтегральных функций представляется в виде контурной квадратуры (3.15), (3.17), (3.19), так и в виде функциональных рядов (5.4)–(5.6). Исследование решений задачи $T(x,t)$, $u(x,t)$, $\sigma_{xx}(x,t)$, представленных как формулами (3.14), (3.16), (3.18), так и формулами (5.4)–(5.6), показывает, что при $\zeta_k < 0$ $k = 0, 1, 2, \ldots$ решения задачи устойчивы и стремятся с увеличением времени t к стационарному состоянию. Если хотя бы один из ζ_k $k = 0, 1, 2, \ldots$ при изменении параметров задачи становится положительным $\zeta_k > 0$, то амплитуда $T(x,t)$, $u(x,t)$, $\sigma_{xx}(x,t)$ неограниченно возрастает при $t \to \infty$, что свидетельствует о неустойчивости решения задачи, о термоупругой неустойчивости скользящего контакта. В предположении, что внедрение $\Delta(t)$ является функцией ограниченной

$$m < \Delta(t) < M, \quad 0 < t < \infty$$



Фиг. 2

для интеграла (5.7) при $\zeta_k > 0$ $k = 0, 1, 2, \ldots$ справедлива оценка

$$|D(\zeta_k, t)| \geq m\left|\frac{1 - e^{\zeta_k \tilde{t}}}{\zeta_k}\right|, \quad \tilde{t} = \frac{t}{t_\text{к}} \tag{6.1}$$

свидетельствующая о том, что при $t \to \infty$ решения задачи (5.4)–(5.6) становятся неограниченными $\lim\limits_{t\to\infty}\{T(x,t), p(x,t)\} = \infty$, где $p(x,t) = -\sigma_{xx}(x,t)$.

В комплексной плоскости z траектории $\zeta_0(\hat{V})$ для $\hat{V} \in [0, \hat{V}_\text{c})$, где $\hat{V}_\text{c}$ из (4.2), и ζ_k $k = 1, 2, \ldots$ для $\hat{V} \in [0, \infty)$ и любых Bi и $\hat{T}$ находятся в левой полуплоскости на отрицательной части действительной оси (фиг. 1) и образуют область устойчивых решений задачи. При $\hat{V} > \hat{V}_\text{c}$ полюс $\zeta_0(\hat{V})$ становится положительным, и хотя все остальные полюса ζ_k $k = 1, 2, 3, \ldots$ отрицательны решение задачи согласно (6.1) неустойчиво.

На фиг. 2 на плоскости $\hat{V}$, Bi представлены области устойчивых (не закрашена) и неустойчивых (закрашена) решений задачи. Граница между указанными областями определяется из условия обнуления $\zeta_0(\hat{V}) = 0$ или $\text{Bi} = 2\hat{V}/(2 - \hat{V})$ и не зависит от параметра термомеханической связанности $\hat{T}$.

7. Асимптотический и численный анализ полученных решений. Формулы решения рассматриваемой связанной задачи термоупругости о скользящем контакте, полученные для температуры $T(x,t)$ (3.14), смещений $u(x,t)$ (3.16) и напряжений $\sigma_{xx}(x,t)$ (3.18), позволяют провести сравнительный асимптотический анализ изменения этих характеристик при малых t в условиях связанной и соответствующей несвязанной задачи. Формулы решения задачи (3.14), (3.16), (3.18) с учетом оценок (3.20) в области устойчивых решений записываются для малых t в виде следующих асимптотических соотношений

$$T(x,t) - T_0 = \frac{1-\nu}{1+\nu}\frac{\hat{T}}{\alpha}\frac{\Delta(t)}{h} + O(t^{3/2}\Delta(t)) \quad \text{при} \quad t \to 0, \quad 0 \leq x \leq h \tag{7.1}$$

$$u(x,t) = -x\frac{\Delta(t)}{h} + O(t^{3/2}\Delta(t)) \quad \text{при} \quad t \to 0, \quad 0 \leq x \leq h \tag{7.2}$$

$$\sigma_{xx}(x,t) = -\frac{2\mu(1-\nu)}{(1-2\nu)}(1+\hat{T})\frac{\Delta(t)}{h} + O(t^{3/2}\Delta(t)) \quad \text{при} \quad t \to 0, \quad 0 \le x \le h \tag{7.3}$$

Первый член асимптотики (7.2) для смещения $u(x,t)$ совпадает с соответствующим членом несвязанной задачи [23]. После дифференцирования $u(x,t)$ в (7.2) по x и по t скорость деформации на контакте $\dot{\varepsilon}_{xx}(h,t)$ имеет вид

$$\dot{\varepsilon}_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = -\frac{\dot{\Delta}(t)}{h} + O(t^{3/2}\dot{\Delta}(t)), \quad t \to 0 \tag{7.4}$$

Отсюда следует, что в связанной задаче интенсивность изменения температуры на контакте $\dot{T}(h,t)$ при малых t пропорциональна скорости деформации $\dot{\varepsilon}_{xx}$ с коэффициентом пропорциональности

$$-\frac{1-\nu}{1+\nu}\frac{\hat{T}}{\alpha h} \tag{7.5}$$

пропорциональном $\hat{T}$. Напряжения на контакте $\sigma_{xx}(x,t)$ при малых t пропорциональны скорости деформации $\dot{\varepsilon}_{xx}$ с коэффициентом пропорциональности

$$-\frac{2\mu(1-\nu)}{(1-2\nu)h}(1+\hat{T}) \tag{7.6}$$

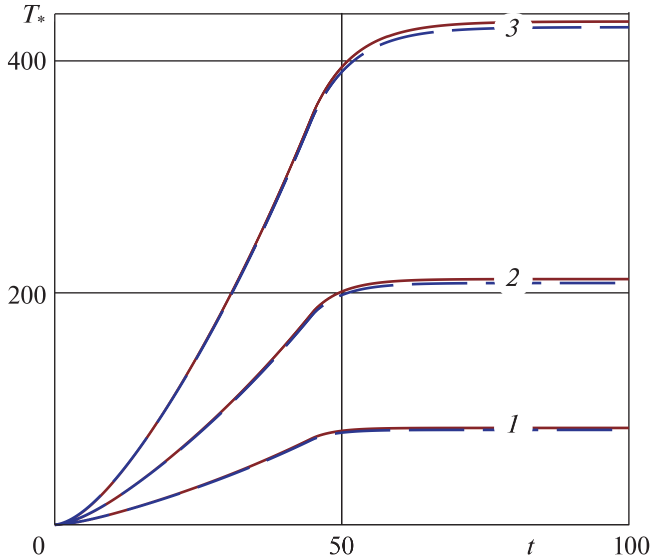
также зависящим от $\hat{T}$. Формулы (7.5), (7.6), как и формулы (7.1), (7.3), демонстрируют влияние связанности на основные параметры контакта и позволяют указать параметры задачи, которые способствуют усилению этого влияния.

Численный анализ полученных решений рассматриваемой связанной задачи термоупругости о скользящем контакте в условиях разогрева от трения сводится к расчетам температуры $T(h,t)$ по формуле (5.4) и контактных напряжений $p(t) = -\sigma_{xx}(h,t)$ (5.6) в пространстве безразмерных параметров $\hat{V}$, Bi, $\hat{T}$. Расчеты проводятся в предположении, что максимальный уровень проседания жесткой полуплоскости I в упругое покрытие равен Δ_0. Закон $\Delta(t)$ внедрения полуплоскости I, состоящий из активной фазы (на временном интервале $0 < t < t_\varepsilon$) и пассивной фазы (на интервале $t_\varepsilon < t < \infty$) принимается в виде

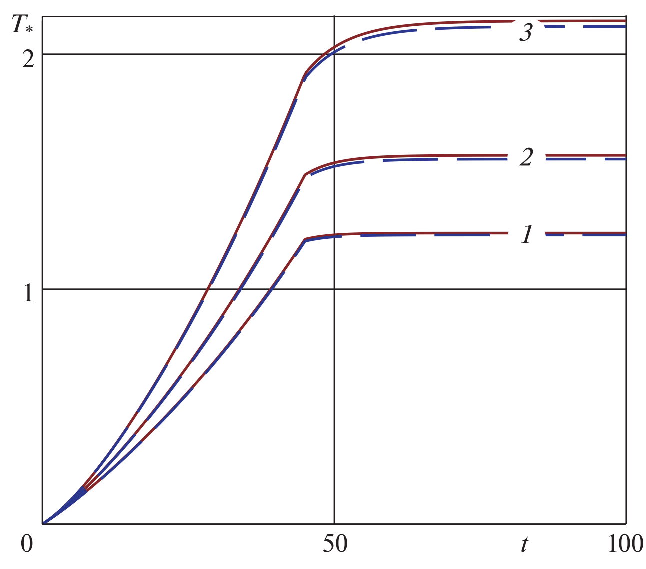
$$\Delta(t) = \Delta_0 \begin{cases} -1 + e^{\varepsilon t}, & 0 < t < t_\varepsilon \\ 1, & t_\varepsilon < t < \infty \end{cases} \tag{7.7}$$

где $t_\varepsilon = \varepsilon^{-1}\ln 2$ — время окончания активной фазы внедрения, ε — параметр закона внедрения.

Характер неустойчивых решений связанной задачи качественно не отличается от соответствующих неустойчивых решений несвязанной задачи [23], а области неустойчивых решений связанной и несвязанной задач совпадают. Ниже исследуется влияние параметров V — скорости скольжения полуплоскости I и T_0 — температуры окружающей среды на развитие температуры на контакте $T(h,t)$ и контактных напряжений $p(t) = -\sigma_{xx}(h,t)$, возникающих и развивающихся во времени на скользящем контакте между жесткой полуплоскостью I и покрытием из алюминиевого сплава со следующими термомеханическими $\mu = 24.8$ ГПа, $\nu = 0.34$, $\kappa = 88.09 \times 10^{-6}$ м^2/с, $\alpha = 22.9 \times 10^{-6}$ 1/град, $K = 209.3$ Вт/(м · град), $f = 0.15$, $k = 100$ кВт/(м^2 · град) и геометрическими $h = 25$ мм, $\Delta_0 = 0.01h = 0.25$ мм характеристиками. Рассматриваются три скорости скольжения $V: V_1 = 3.5$ мм/с, $V_2 = 7$ мм/с, $V_3 = 10.5$ мм/с, и два значения начальной температуры T_0 : $T_0^1 = 0$, $T_0^2 = 525$ K, которые соответствуют следующим безразмерным параметрам $\hat{V}$



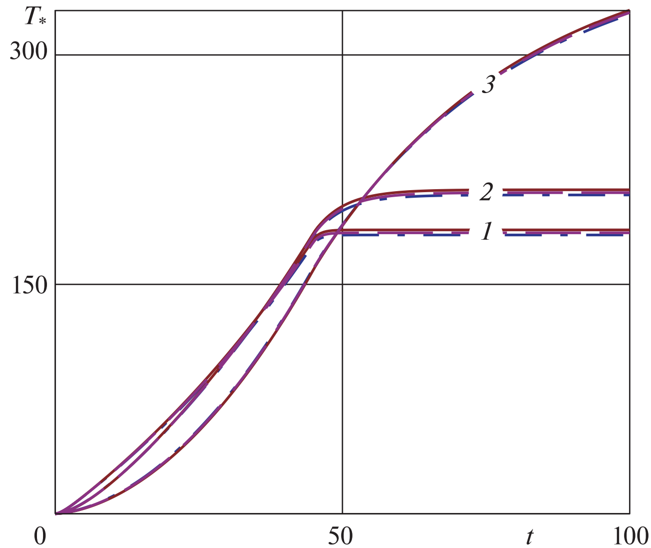
Фиг. 3



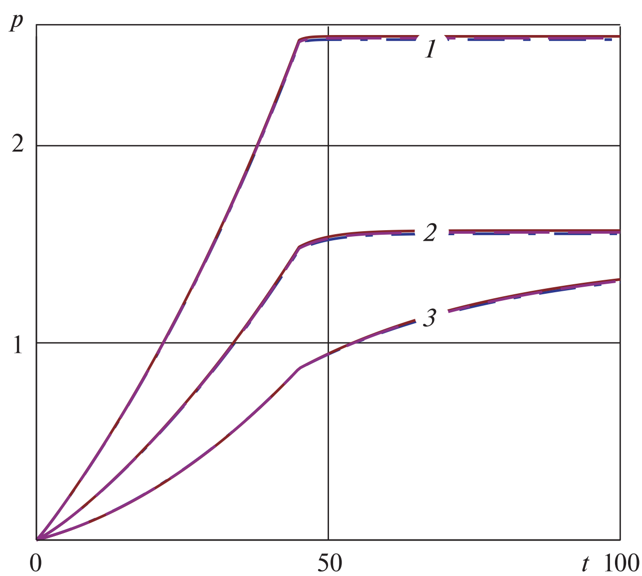
Фиг. 4

и $\hat{T}$: $\hat{V}_1 = 0.298266$, $\hat{V}_2 = 0.596530$, $\hat{V}_3 = 0.894794$ и $\hat{T}_1 = 0$, $\hat{T}_2 = 0.000093$ из области устойчивых решений (фиг. 2). Параметр Bi фиксирован и равен 11.9446.

На фиг. 3 представлены графики $T_*(h,t) = T(h,t) - T_0$ (K), на фиг. 4 – графики $p(t) = -\sigma_{xx}(h,t)$ (ГПа) при $\hat{T} = \hat{T}_1$ (сплошной линией) и $\hat{T} = \hat{T}_2$ (штриховой) для различных $\hat{V}_k$, номера k которых указаны цифрами *1–3* на кривых. По горизонтальной оси на фиг. 3



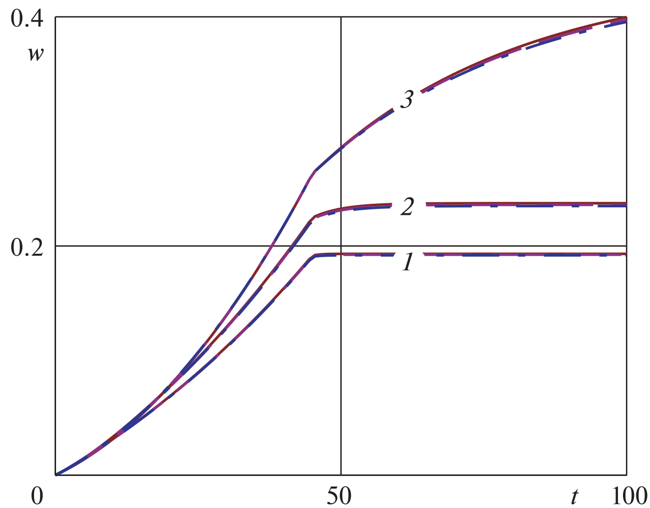
Фиг. 5



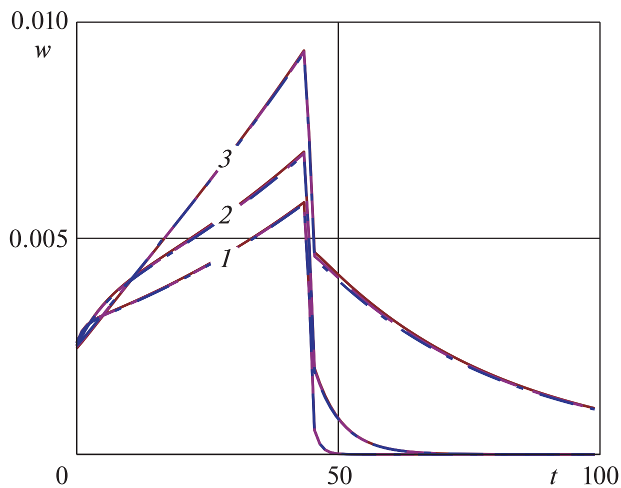
Фиг. 6

и последующих фигурах отмечено время t (с). Время окончания активной фазы внедрения t_ε составляет 45 с.

Расчеты показали, что заметное влияние на физические характеристики контакта $T(h,t)$ и $p(t) = -\sigma_{xx}(h,t)$ оказывает толщина покрытия h и время активной фазы внедрения t_ε. На фиг. 5–6 представлены графики $T_*(h,t) = T(h,t) - T_0$ (K) и $p(t) = -\sigma_{xx}(h,t)$ (ГПа) для трех значений $h = 12.5$ мм (отмечен цифрой *1*), 25 мм (*2*), 50 мм (*3*) и фикси-



Фиг. 7



Фиг. 8

рованного $\Delta_0 = 0.25$ мм для покрытия из алюминиевого сплава. Скорость скольжения $V = 7$ мм/с. Сплошной линией изображены графики при начальной температуре $T_0^1 = 0$, штриховой – $T_0^2 = 525$ K. Из графиков на фиг. 6 видно, что увеличение толщины покрытия приводит к уменьшению значений контактного давления $p(t)$ (фиг. 6).

Горизонтальные смещения поверхности покрытия $w(h,t)$ и скорости $\dot{w}(h,t)$ приобретают влияние связанности через нормальные напряжения $\sigma_{xx}(h,t)$ на контакте согласно формулам (5.8) и асимптотики $\sigma_{xx}(h,t)$ (7.3). На фиг. 7–8 приведены графики $w(h,t)$ (мм) и $\dot{w}(h,t)$ (мм/с) при трех значениях $h = 12.5$ мм (отмечен цифрой *1*), 25 мм (*2*), 50 мм (*3*) и тех же значениях параметров контакта, которые использовались при построении графиков на фиг. 5–6. Из фиг. 7–8 видно, что с увеличением толщины покрытия величины горизонтальных смещений и их скорости увеличиваются.

8. Мониторинг и управление параметрами контакта. Размещение пленочных наноразмерных датчиков в изделиях из композитных, функционально-градиентных и многослойных материалов вносит исчезающе малый вклад при расчетах напряженно-деформируемого состояния на макроуровне. В рамках постановки основной задачи макроисследования скользящего контакта появляется возможность решения частных задач об отслеживании основных параметров контакта по данным датчиков, расположенных на произвольной глубине контактирующих материалов. К частным задачам такого типа относятся задачи о мониторинге основных параметров скользящего контакта при эксплуатации триботехнических устройств, а также задачи управления этими параметрами с целью недопущения возникновения термоупругой неустойчивости. Полученные в результате мониторинга данные с датчиков, расположенных на глубине под скользящим контактом, пересчитываются по формулам, заранее полученным при решении соответствующих частных задач, на значения основных параметров контакта.

Частные задачи мониторинга параметров скользящего контакта формулируются следующим образом: по данным датчиков а) давления, б) температуры, установленных, к примеру, между покрытием и подложкой, определить значения основных параметров скользящего контакта – контактных напряжений, температуры разогрева контакта. При этом предполагается, что сами датчики в силу их малости не вносят искажений в напряженно-деформированное состояние изделия.

В случае а) для получения формул пересчета напряжений между покрытием и подложкой $\sigma_{xx}(0,t)$ на температуру $T(h,t)-T_0$ на контакте используются формулы (3.1)–(3.3) и (3.8)–(3.10), из которых следует

$$\sigma_{xx}(0,t) = -\frac{2\mu(1-\nu)}{(1-2\nu)h}\int_0^t \Delta(\tau) f_\sigma^0(0,t-\tau)d\tau \tag{8.1}$$

$$T(h,t)-T_0 = \frac{1-\nu}{1+\nu}\frac{1}{\alpha h}\int_0^t \Delta(\tau) f_T^0(h,t-\tau)d\tau, \quad t>0 \tag{8.2}$$

где $f_\sigma^0(0,t)$ и $f_\sigma^0(h,t)$ вычисляются по формуле (3.9), $f_T^0(h,t)$ вычисляется по формуле (3.2) через функцию $N_T^0(h,z)$ из (3.3).

Исключая $\Delta(t)$ из (8.1), (8.2) с помощью преобразования Лапласа получим соотношение для пересчета $\sigma_{xx}(0,t)$ на $T(h,t)-T_0$ в виде

$$T(h,t)-T_0 = -\frac{1-2\nu}{2(1+\nu)}\frac{1}{\mu\alpha}\left[\frac{\hat{T}}{1+\hat{T}}\sigma_{xx}(0,t) + \int_0^t \sigma_{xx}(0,\tau) g_{T,\sigma}(t-\tau)d\tau\right] \tag{8.3}$$

$$g_{T,\sigma}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\tilde{N}_T^0(z)}{t_\text{к}\tilde{N}_\sigma^0(0,z)} e^{z\tilde{t}}dz, \quad \tilde{t} = \frac{t}{t_\text{к}} \tag{8.4}$$

$$\tilde{N}_T^0(z) = \hat{V}\beta^2 z \operatorname{ch}\sqrt{z} - \hat{T}\mathrm{Bi}z + \mathrm{Bi}\sqrt{z}\operatorname{sh}\sqrt{z}$$

$$\tilde{N}_\sigma^0(0,z) = z^{-1}N_\sigma^0(0,z) = \beta^2 r(z)$$

Вычисляя интеграл в (8.4), получим соотношение (8.3) в новой форме

$$T(h,t)-T_0 = -\frac{1-2\nu}{2(1+\nu)}\frac{1}{\alpha\mu}\left[\frac{\hat{T}}{1+\hat{T}}\sigma_{xx}(0,t) + \sum_{k=0}^{\infty} B_\sigma^T(\zeta_k)\int_0^t \sigma_{xx}(0,\tau) e^{\zeta_k \frac{t-\tau}{t_\text{к}}}d\tau\right]$$

$$B_\sigma^T(z) = \frac{\tilde{N}_T^0(z)}{t_\text{к}(\tilde{N}_\sigma^0(0,z))'_z}$$

где ζ_k $k = 0, 1, 2, \ldots$ являются корнями уравнения $\tilde{N}_\sigma^0(0,z) = 0$, причем $\operatorname{Re}(\zeta_k) < 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

В случае б) для получения формулы пересчета температуры $T(0,t) - T_0$ между покрытием и подложкой на контактные напряжения $\sigma_{xx}(h,t)$ воспользуемся формулами (3.1)—(3.3) и (3.8)—(3.10), из которых следует, что

$$\sigma_{xx}(h,t) = -\frac{2\mu(1-\nu)}{(1-2\nu)h}\int_0^t \Delta(\tau) f_\sigma^0(h, t-\tau)d\tau \tag{8.5}$$

$$T(0,t) - T_0 = \frac{1-\nu}{1+\nu}\frac{\hat{V}\beta^2}{\alpha h}\int_0^t \Delta(\tau) f_T^0(0, t-\tau)d\tau, \quad t > 0 \tag{8.6}$$

где $f_T^0(0,t)$ вычисляется по формуле (3.2) через $N_T^0(0,z)$ из (3.3).

Исключая из (8.5) и (8.2) функцию $\Delta(t)$ с помощью преобразования Лапласа, получим формулу пересчета $T(0,t) - T_0 = T_0(t)$ на $\sigma_{xx}(h,t)$

$$\sigma_{xx}(h,t) = -\frac{2\mu(1+\nu)\alpha}{1-2\nu}\left[\frac{\beta^2 h^2}{\hat{T}}T_0(t) + \int_0^t T_0(\tau) g_{\sigma,T}(t-\tau)d\tau\right] \tag{8.7}$$

$$\tilde{g}_{\sigma,T}^0(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\tilde{N}_\sigma^0(z)}{t_\text{к}\tilde{N}_T^0(0,z)} e^{z\tilde{t}} dz, \quad \tilde{t} = \frac{t}{t_\text{к}} \tag{8.8}$$

$$z\tilde{N}_\sigma^0(z) = N_\sigma^0(h,z) - \frac{1+\hat{T}}{\hat{T}} N_T^0(0,z) = \beta^2\left(\operatorname{Bi}\operatorname{ch}\sqrt{z} - \beta^2\frac{\hat{V}}{\hat{T}}\right)$$

$$\tilde{N}_T^0(z) = z^{-1} N_T^0(h,z) = \hat{T}\sqrt{z}\operatorname{sh}\sqrt{z} + \hat{V}\beta^2$$

После вычисления интеграла в (8.8) получим формулу пересчета в более простой форме

$$\sigma_{xx}(h,t) = -\frac{2\mu(1+\nu)\alpha}{1-2\nu}\left[\frac{(1+\hat{T})h^2}{\hat{T}}T_0(t) + \sum_{k=0}^\infty B_\sigma^0(\zeta_k)\int_0^t \sigma_{xx}(0,\tau) e^{\zeta_k\frac{t-\tau}{t_\text{к}}} d\tau\right]$$

$$B_T^\sigma(z) = \frac{\tilde{N}_\sigma^0(z)}{t_\text{к}(\tilde{N}_T^0(h,z))'_z}, \quad t > 0$$

где ζ_k $k = 0, 1, 2, \ldots$ являются корнями уравнения $\tilde{N}_T^0(h,z) = 0$, а $\operatorname{Re}(\zeta_k) < 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Управление параметрами скользящего контакта — напряжениями и температурой — может достигаться, в том числе, за счет подбора закона внедрения штампа $\Delta(t)$ в упругое покрытие. Пусть требуется подобрать закон внедрения $\Delta(t)$ таким образом, чтобы: в) напряжения $\sigma_{xx}(h,t)$ на контакте изменялись по заранее заданному закону $\sigma_{xx}(h,t) = -p(t)$, в том числе и при $p(t) = \text{const}$; г) на контакте температура $T(h,t)$ изменялась бы по заранее заданному закону $T(h,t) - T_0 = T_h(t)$ или была бы постоянной заранее установленной величиной $T_h(t) = T = \text{const}$.

В случае в) для определения $\Delta(t)$ при заданном $\sigma_{xx}(h,t) = -p(t)$ решение задачи с помощью формулы (3.8) сводится к интегральному уравнению Вольтерры [28]

$$\int_0^t \Delta(\tau) f_\sigma^0(h, t-\tau) d\tau = \frac{(1-2\nu)h}{2\mu(1-\nu)} p(t), \quad t > 0 \tag{8.9}$$

$$f_\sigma^0(h,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{N_\sigma^0(h,z)}{t_\text{к} R(z)} e^{z\tilde{t}} dz, \quad \tilde{t} = \frac{t}{t_\text{к}} \tag{8.10}$$

где $N_\sigma^0(h,z)$ определена в (3.10), а $R(z)$ в (3.4).

Для обращения интегрального уравнения (8.9) используется преобразование Лапласа, с помощью которого определяется

$$\Delta(t) = \frac{(1-2\nu)h}{2\mu(1-\nu)\beta^2} \left[p(t) + \sum_{k=0}^{\infty} B_\sigma^R(\zeta_k) \int_0^t p(\tau) e^{\zeta_k \frac{t-\tau}{t_\text{к}}} d\tau \right], \quad t > 0 \tag{8.11}$$

$$B_\sigma^R(z) = \frac{R(z)}{t_\text{к} \zeta_k (\tilde{N}_\sigma^0(h,z))'_z}$$

где ζ_k $k = 0, 1, 2, \ldots$ – все корни уравнения $\tilde{N}_\sigma^0(h,z) = \beta^2 r(z) = 0$, причем $\text{Re}(\zeta_k) < 0$ $k = 0, 1, 2, \ldots$

При $p(t) = p_0 = \text{const}$, когда напряжение на контакте при $t > 0$ удерживается постоянным, $\Delta(t)$ принимает вид

$$\Delta(t) = \frac{(1-2\nu)hp_0}{2\mu(1-\nu)\beta^2} \left(H(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t_\text{к}}{\zeta_k} B_\sigma^R(\zeta_k) \left(e^{\zeta_k \frac{t}{t_\text{к}}} - 1 \right) \right), \quad t > 0 \tag{8.12}$$

где $H(t)$ – функция Хевисайда.

В случае г) для определения $\Delta(t)$ по заданному $T(h,t) - T_0 = T_h(t)$ решение задачи с помощью формулы (3.1) сводится к интегральному уравнению Вольтерры

$$\int_0^t \Delta(t) f_T^0(h, t-\tau) d\tau = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha h T_h(t), \quad t > 0 \tag{8.13}$$

где $f_T^0(h,t)$ вычисляется по формуле (3.2) через функцию $N_T^0(h,z)$ из (3.3).

Обращение интегрального уравнения (8.13) определяется с помощью преобразования Лапласа

$$\Delta(t) = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\alpha h}{\hat{T}} \left(T_h(t) + \int_0^t T_h(\tau) \tilde{g}_T^0(t-\tau) d\tau \right), \quad t > 0 \tag{8.14}$$

$$\tilde{g}_T^0(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{R(z)}{t_\text{к} z \tilde{N}_T^0(h,z)} e^{z\tilde{t}} dz, \quad \tilde{t} = \frac{t}{t_\text{к}} \tag{8.15}$$

$$\tilde{N}_T^0(h,z) = \hat{T} r(z) + \hat{V}\beta^2 \left(\text{Bi} \frac{\text{sh}\sqrt{z}}{\sqrt{z}} + \text{ch}\sqrt{z} \right) - \hat{T}\text{Bi}$$

где $r(z)$ из (3.4).

После вычисления интеграла в (8.15) и подстановки результата в (8.14) получим формулу

$$\Delta(t) = \frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\alpha h}{\hat{T}}\left(T_h(t) + \sum_{k=1}^{\infty} B_T^R(\zeta_k)\int_0^t T_h(\tau)\, e^{\zeta_k \frac{t-\tau}{t_\kappa}}\, d\tau\right) \tag{8.16}$$

$$B_T^R(z) = \frac{R(z)}{z(\tilde{N}_T^0(h,z))'_z}$$

где ζ_k $k = 0, 1, 2, \ldots$ – все корни уравнения $\tilde{N}_T^0(h,z) = 0$, причем $\mathrm{Re}(\zeta_k) < 0$ $k = 0, 1, 2, \ldots$

Для поддержания на скользящем контакте постоянной температуры $T_h(t) = T_h =$ const получается следующая зависимость внедрения $\Delta(t)$ от T_h

$$\Delta(t) = \frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\alpha h T_h}{\hat{T}}\left[H(t) + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t_\kappa}{\zeta_k} B_T^R(\zeta_k)\left(e^{\zeta_k \frac{t}{t_\kappa}} - 1\right)\right], \quad t > 0 \tag{8.17}$$

9. Заключение. Точные решения связанной задачи термоупругости о скользящем термофрикционном контакте позволяют:

– установить области устойчивых и неустойчивых решений в области безразмерных параметров задачи;

– установить влияние связанности задачи на изменение границы областей устойчивых и неустойчивых решений, на собственные числа задачи, на основные параметры контакта – температуру и напряжения;

– решить частные задачи опосредованного мониторинга основных параметров скользящего контакта;

– решить частные задачи управления параметрами контакта за счет подбора закона внедрения жесткого тела.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (госзадание 9.1481.2017/4.6) и РФФИ (гранты 16-07-00929-а, 17-07-01376-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Biot M.A.* Thermoelasticity and irreversible thermodynamics // J. Appl. Phys. 1956. V. 27. № 3. P. 240–253.
2. *Deresiewicz H.* Solution of the equations of thermoelasticity // Proc. 3rd Nat. Congr. Appl. Mech. ASME. Providence: Brown University, 1958. P. 287–291.
3. *Chadwick P.* Thermoelasticity. The dynamical theory // Progress in Solid Mechanics / *I.N. Sneddon, R. Hill* (eds.) Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1960. P. 263–328.
4. *Боли Б., Уэйнер Д.* Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. Пер. с англ. 518 с.
5. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. Пер. с пол. 256 с.
6. *Nickell R.E., Sackman J.L.* Approximate solutions in linear, coupled thermoelasticity // J. Appl. Mech. 1968. V. 35. № 2. P. 255–266.
7. *Oden J.T.* Finite element analysis of nonlinear problems in the dynamical theory of coupled thermoelasticity // Nucl. Eng. Des. 1969. V. 10. № 4. P. 465–475.
8. *Prevost J.H., Tao D.* Finite element analysis of dynamic coupled thermoelasticity problems with relaxation times // J. Appl. Mech. 1983. V. 50. № 4a. P. 817–822.
9. *Carter J.P., Booker J.R.* Finite element analysis of coupled thermoelasticity // Comput. Struct. 1989. V. 31. № 1. P. 73–80.
10. *Hacquin A., Montmitonnet P., Guillerault J.P.* A steady state thermo-elastoviscoplastic finite element model of rolling with coupled thermo-elastic roll deformation // J. Mater. Process. Technol. 1996. V. 60. № 1. P. 109–116.
11. *Repka M., Lion A.* Simulation of the coupled thermo-elastic behavior of constrained films in differential scanning calorimetry using the finite element method // Thermochim. Acta. 2014. V. 581. P. 62–69.

12. *Грибанов В.Ф., Паничкин Н.Г.* Связанные и динамические задачи термоупругости. М.: Машиностроение, 1984. 151 с.
13. *Слоновский Н.В.* О термоупругой устойчивости при трении скольжения // Прикл. мат. мех. 1969. Т. 33. № 1. С. 117–121.
14. *Dow T.A., Burton R.A.* Thermoelastic instabilities of sliding contact in the absence of wear // Wear. 1972. V. 19. № 3. P. 315–328.
15. *Dow T.A., Burton R.A.* The role of wear in the initiation of thermoelastic instabilities of rubbing contact // J. Lubr. Technol. 1973. V. 95. № 1. P. 71–75.
16. *Dow T.A.* Thermoelastic effects in a thin sliding seal – a review // Wear. 1980. V. 59. P. 31–52.
17. *Burton R.A., Nerlikar V., Kilaparti S.R.* Thermoelastic instability in a seal-like configuration // Wear. 1973. V. 24. № 2. P. 177–188.
18. *Chen C.P., Burton R.A.* Thermoelastic effects in brushes with high current and high sliding speeds // Wear. 1979. V. 5. № 1. P. 277–288.
19. *Burton R.A., Bryant M.D.* Transient thermal deformation in electrical brushes // J. Therm. Stress. 1981. V. 4. № 2. P. 223–235.
20. *Afferrante L., Ciavarella M.* A note on thermoelastodynamic instability (TEDI) for a 1D elastic layer: Force control // Int. J. Solids Struct. 2007. V. 44. № 5. P. 1380–1390.
21. *Afferrante L., Ciavarella M.* Thermo-elastic dynamic instability (TEDI) in frictional sliding of two elastic half-spaces // J. Mech. Phys. Solids. 2007. V. 55. № 4. P. 744–764.
22. *Зеленцов В.Б., Митрин Б.И., Васильев А.С., Волков С.С.* Термоупругодинамическая неустойчивость решения контактной задачи для покрытия с учетом тепловыделения от трения // Вестник Донского гос. техн. унив-та. 2014. Т. 14. № 4. С. 17–29.
23. *Зеленцов В.Б., Митрин Б.И., Айзикович С.М.* Динамическая и квазистатическая неустойчивость скользящего термофрикционного контакта // Трение и износ. 2016. Т. 37. № 3. С. 280–289.
24. *Коваленко А.Д.* Введение в термоупругость. К.: Наук. думка, 1965. 204 с.
25. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Операционное исчисление. М.: Высшая школа, 1975. 407 с.
26. *Брычков Ю.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1977. 287 с.
27. *Титчмарш Е.* Теория функций. М.: Наука, 1980. 463 с.
28. *Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А. и др.* Интегральные уравнения. М.: Физматлит, 1968. 448 с.