

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КИРША ДЛЯ ПЛАСТИНКИ ИЗ НЕОДНОРОДНОГО ПО ТОЛЩИНЕ МАТЕРИАЛА

© 2019 г. Г. З. Шарафутдинов

НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

e-mail: sharaf@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 31.01.2017 г.

После доработки 17.07.2017 г.

Принята к публикации 08.11.2017 г.

Рассматривается задача теории упругости об одноосном растяжении тонкой пластинки из неоднородного по ее толщине материала с центральным круглым отверстием. В классической теории упругости эта задача, получившая название задачи Кирша, рассматривается в рамках обобщенного плоского напряженного состояния. В работе указанная задача решается в пространственной постановке при помощи комплексных потенциалов. Приводятся основные соотношения метода и ее решение.

Ключевые слова: теория упругости неоднородных тел, задачи о плоском напряженном состоянии в пространственной постановке, функции комплексного переменного, метод решения, задача Кирша, аналитическое решение

DOI: 10.1134/S0572329919010100

Введение. Задача Кирша, как и многие другие плоские задачи классической теории упругости, играют важную роль в развитии механики деформируемого твердого тела (МДТТ) в научном и прикладном аспектах [1]. Это связано с возможностью применения решений этих задач при оценке напряженно-деформированного состояния в деталях или конструкциях, с их использованием в целях верификации при разработке других методов решения задач теории упругости, например, численных, и в некоторых других случаях. В качестве примера приведем факт применения классического решения задачи Кирша при оценке остаточных напряжений в сварных конструкциях по измеряемому поперечному перемещению лицевой поверхности конструкции в перпендикулярном к ней направлении [2].

Вместе с тем обратим внимание на то, что методы решения задач о плоском напряженном состоянии, рассматриваемых в классической теории упругости в рамках обобщенного плоского напряженного состояния, допускают получение только приближенных аналитических решений в силу неполного удовлетворения условиям совместности Бельтрами [3, 4]. Обратим также внимание на то обстоятельство, что при реализации усреднения по Л. Файлону перемещение поверхности деформируемой пластинки в перпендикулярном к ней направлении равно нулю [5]. Развиваемый в последнее время подход к решению задач о плоском напряженном состоянии в пространственной постановке [6, 7] позволяет устранять эти недостатки и получать точные аналитические решения задач этого класса. В работе [8] приведено точное аналитическое решение задачи Кирша при учете поперечного перемещения. При анализе этого решения обнаружено, что в силу неоднородности поля поперечного перемещения появляются касательные компоненты тензора деформаций, связанные с третьей

координатой; при этом первую и вторую координатные оси будем считать расположенными в средней плоскости пластинки.

В настоящее время в МДТТ актуальны проблемы, связанные с учетом неоднородности прочностных и деформационных характеристик деформируемых материалов. Указанная неоднородность может быть следствием неоднородных температурных полей или напряженно-деформированных состояний, возникать вследствие технологических особенностей синтеза конструкционных материалов и в ряде других случаев. И в этом случае значительную роль играет наличие точных аналитических решений соответствующих задач теории упругости неоднородных тел. В силу этого распространение рассматриваемых в работе [7] подходов на задачи о плоском напряженном состоянии теории упругости неоднородных тел имеет большое значение.

Рассматриваемую здесь неоднородность материала будем считать зависящей только от третьей координаты. Такого рода неоднородность в тонких пластинках может возникать после операции упрочнения их лицевых поверхностей, в процессе остывания пластинок после литья или термической обработки и в некоторых других случаях. Нетрудно заметить, что основные уравнения задач теории упругости, рассматриваемых в рамках обобщенного плоского напряженного состояния, не позволяют учесть неоднородность материала по толщине пластинки; это возможно только в рамках пространственного подхода к задачам о плоском напряженном состоянии, и именно этот подход будет далее использован.

1. Основные соотношения: пространственная постановка задач о плоском напряженном состоянии и введение комплексных потенциалов. Допустим, что имеется плоскопараллельная пластинка толщиной $2h$, изготовленная из неоднородного упругого материала. Введем систему прямоугольных декартовых координат $Ox_1x_2x_3$, полагая координатную плоскость Ox_1x_2 совпадающей со средней плоскостью пластинки, а координатную ось Ox_3 перпендикулярной к ней. Наряду с прямоугольной системой введем также цилиндрическую полярную систему координат (r, ϑ, x_3) , полагая координатную плоскость $Or\vartheta$ совпадающей со средней плоскостью пластинки, а координатную ось Ox_3 перпендикулярной к ней. Заметим, что при решении задачи Кирша должны быть задействованы обе системы координат.

Исследование задач о плоском напряженном состоянии в рамках обобщенного плоского напряженного состояния базируется, в первую очередь, на равенстве нулю, в силу нечетной зависимости от координаты x_3 , среднего значения компоненты перемещения u_3 , совместно с условием $\sigma_{33} = 0$ [5].

Помимо того, что применение обобщенного плоского напряженного состояния не позволяет получать точные аналитические решения, такой подход игнорирует наличие перемещений лицевых поверхностей пластинок в перпендикулярном к средней плоскости направлении [5].

Предложенный в работах [6, 7] пространственный подход к задачам о плоском напряженном состоянии, базирующийся на использовании первого члена разложения компоненты перемещения

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2)x_3 + g_1(x_1, x_2)x_3^3 + \dots$$

позволяет устранить указанные недостатки. При этом, исходя из сохранения плоскостности средней плоскости пластинки в процессе деформирования, в соответствии с полуобратным методом Сен-Венана, имеем дополнительное граничное условие:

$$u_3 = 0 \quad \text{при} \quad x_3 = 0$$

При таком подходе исследование задачи производится при помощи полной системы уравнений классической теории упругости, что, по нашему мнению, и оправдывает ее

название как задачи о плоском напряженном состоянии в пространственной постановке.

Будем считать, что неоднородность материала определяется зависимостью модуля Юнга E от третьей координаты при постоянном значении коэффициента Пуассона ν :

$$E = E(x_3), \quad \nu = \text{const}$$

Оставаясь в рамках плоского напряженного состояния, предполагаем изменение упругих характеристик материала симметричным относительно средней плоскости пластинки. Таким образом, зависимость параметра Ламе $\mu = \mu(x_3)$ от третьей координаты, обеспечивающей это условие, будем считать заранее известной. Конкретная форма зависимости $\mu = \mu(x_3)$, обеспечивающая выполнение указанных условий, в достаточной общей форме имеет вид:

$$\mu(x_3) = \mu_0 \left[\eta \left(\frac{x_3}{h} \right)^{2k} + (1 - \eta) \right]$$

где $\mu_0 > 0$, $0 \leq \eta \leq 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$ — числовые коэффициенты, которые могут изменяться в указанных областях значений. Предлагаемая форма зависимости модуля сдвига позволяет представить, например, изменение этой характеристики при остывании пластинки или при полимеризации материала — явлениях, как правило, наиболее интенсивно протекающих на лицевых поверхностях тонких пластинок. Другую форму зависимости модуля сдвига от третьей координаты следует использовать при наличии наклепа или в случае разупрочнения материала на лицевых поверхностях пластинки и в некоторой окрестности вблизи них — например, в виде:

$$\mu(x_3) = \mu_0 [1 + \eta(x_3/h)^{2k}]$$

Характер указанных изменений свойств материала в этих случаях регулируется выбором величин $k = 0, 1, 2, \dots$ и $|\eta| \geq 0$.

Очевидно, что возможны и другие формы таких зависимостей, однако ставя перед собой цель получения точного аналитического решения задачи Кирша, выражение для модуля сдвига примем в упрощенной форме:

$$\mu(x_3) = \mu_0 M(x_3), \quad M(x_3) = (x_3/h)^{2k}, \quad \mu_0 = \text{const} \quad (1.1)$$

При пространственной постановке задачи о плоском напряженном состоянии перемещения в прямоугольной декартовой системе координат задаем в виде [6]:

$$u_1 = u_1(x_1, x_2), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2), \quad u_3 = g(x_1, x_2)x_3 \quad (1.2)$$

Компоненты тензора деформаций ε_{ij} представим при помощи соотношений Коши

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, & \varepsilon_{33} &= g \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), & \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial x_1} x_3, & \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial x_2} x_3 \end{aligned}$$

а компоненты тензора напряжений σ_{ij} — при помощи соотношений закона Гука

$$\sigma_{ij} = 2\mu(x_3) \left(\frac{\nu I_1}{1 - 2\nu} \delta_{ij} + \varepsilon_{ij} \right), \quad I_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + g, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.3)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Пространственная постановка задач о плоском напряженном состоянии альтернативна, поскольку возможна как при выполнении условия $\sigma_{33} = 0$ по всему телу пла-

стинки, так и при его нарушении. Последнее имеет место, например, при деформировании тонкой пластинки с вклеенной жесткой шайбой в условиях плоского напряженного состояния. Задача Кирша относится к первому типу, в силу чего условие $\sigma_{33} = 0$ будем считать выполненным.

Используя соотношения (1.3), уравнения равновесия $\sigma_{ij,j} = 0$, при учете условия $\sigma_{33} = 0$, приводим к виду

$$\begin{aligned} 2\mu \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\partial I_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \mu \frac{\partial g}{\partial x_1} + x_3 \frac{d\mu}{dx_3} \frac{\partial g}{\partial x_1} &= 0 \\ \mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \right) + 2\mu \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\partial I_1}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right) + \mu \frac{\partial g}{\partial x_2} + x_3 \frac{d\mu}{dx_3} \frac{\partial g}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Систему уравнений (1.4) нетрудно преобразовать

$$\begin{aligned} \nabla_2^2 u_1 + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} + F(x_3) \frac{\partial g}{\partial x_1} &= 0 \\ \nabla_2^2 u_2 + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta_1}{\partial x_2} + F(x_3) \frac{\partial g}{\partial x_2} &= 0 \\ \nabla_2^2 g &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $\nabla_2^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, $\theta_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$, $F(x_3) = \frac{1}{1-2\nu} + x_3 \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dx_3}$

Учитывая следующее из условия $\sigma_{33} = 0$ соотношение

$$g = -\frac{\nu}{1-\nu} \theta_1 \quad (1.6)$$

и зависимость (1.1), систему (1.5) приводим к виду:

$$\nabla_2^2 u_1 + \frac{1-2\nu k}{1-2\nu} \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} = 0, \quad \nabla_2^2 u_2 + \frac{1-2\nu k}{1-2\nu} \frac{\partial \theta_1}{\partial x_2} = 0, \quad \nabla_2^2 \theta_1 = 0 \quad (1.7)$$

Для определения напряженно-деформированного состояния в данном случае эффективно использование комплексных потенциалов. Для реализации такого подхода умножим второе из уравнений (1.7) на мнимую единицу и сложим с первым из них. При учете соотношений

$$\nabla_2^2 = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} = 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

где $z = x_1 + ix_2$, $\bar{z} = x_1 - ix_2$ — комплексные переменные, приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 (u_1 + iu_2)}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{1-2\nu k}{2(1-\nu)} \frac{\partial \theta_1}{\partial \bar{z}} = 0$$

Это уравнение, при обозначении $D = u_1 + iu_2$ для комплексного перемещения, примет вид

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[\frac{\partial D}{\partial \bar{z}} + \frac{1-2\nu k}{2(1-\nu)} \theta_1 \right] = 0$$

Интегрируя его, имеем

$$\frac{\partial D}{\partial z} + \frac{1-2\nu k}{2(1-\nu)} \theta_1 = \alpha(z) \quad (1.8)$$

где $\alpha(z)$ — некоторая аналитическая функция. В силу гармоничности функции $\theta_1(x_1, x_2)$ можно представить при помощи аналитической функции $\beta(z)$:

$$\theta_1 = \beta(z) + \overline{\beta(z)} \quad (1.9)$$

Тогда уравнение (1.8) примет вид

$$\frac{\partial D}{\partial z} + \frac{1-2\nu k}{2(1-\nu)} [\beta(z) + \overline{\beta(z)}] = \alpha(z) \quad (1.10)$$

Прибавляя к нему комплексно сопряженное выражение, имеем

$$\left(\frac{\partial D}{\partial z} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial \bar{z}} \right) + \frac{1-2\nu k}{2(1-\nu)} [\beta(z) + \overline{\beta(z)}] = \alpha(z) + \overline{\alpha(z)}$$

Отсюда, в силу равенства

$$\frac{\partial D}{\partial z} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \theta_1$$

имеем:

$$[\beta(z) + \overline{\beta(z)}] = \frac{1-\nu}{2-\nu-2\nu k} [\alpha(z) + \overline{\alpha(z)}] \quad (1.11)$$

При учете соотношения (1.11) уравнение (1.10) примет вид

$$2(2-\nu-2\nu k) \frac{\partial D}{\partial z} = (3-2\nu-2\nu k)\alpha(z) - (1-2\nu k)\overline{\alpha(z)}$$

Заменив в этом соотношении $\alpha(z)$ на производную аналитической функции $\varphi'(z)$, после интегрирования находим комплексное перемещение

$$u_1 + iu_2 = \frac{1}{2A_1} [A_2\varphi(z) - A_3\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}] \quad (1.12)$$

где $A_1 = 2-\nu-2\nu k$, $A_2 = 3-2\nu-2\nu k$, $A_3 = 1-2\nu k$. Здесь $\psi(z)$ — также некоторая аналитическая функция. Аналитические функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ представляют собой, по общепринятой терминологии [9], комплексные потенциалы, применяемые при решении задач МДТТ.

Соотношение (1.12) в полярной системе координат (r, ϑ) примет вид

$$u_r + iu_{\vartheta} = \frac{e^{-i\vartheta}}{2A_1} [A_2\varphi(z) - A_3\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}] \quad (1.13)$$

2. Выражение компонент тензоров деформаций и напряжений при помощи комплексных потенциалов. При наличии комплексного перемещения (1.12) компоненты тензора деформаций по отдельности или в виде некоторых удобных комбинаций могут быть представлены при помощи комплексных потенциалов, после чего компоненты тензора напряжений можно определить при помощи закона Гука.

В силу соотношений (1.9), (1.11), (1.6) и (1.3) соответственно имеем:

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = \theta_1 = \frac{1-\nu}{A_1} [\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] \quad (2.1)$$

$$\varepsilon_{33} = g = -\frac{\nu}{A_1} [\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] \quad (2.2)$$

$$I_1 = \frac{1-2\nu}{A_1} [\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] \quad (2.3)$$

При помощи соотношения

$$2 \frac{\partial D}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) (u_1 + i u_2) = \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22} + 2i\varepsilon_{12}$$

и выражения (1.12) для комплексного перемещения, находим:

$$\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22} + 2i\varepsilon_{12} = -\frac{A_3 z \overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)}}{A_1} \quad (2.4)$$

Поскольку

$$\varepsilon_{13} + i\varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) g(x_1, x_2) x_3 = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} g x_3$$

при учете соотношения (2.2) имеем:

$$\varepsilon_{13} + i\varepsilon_{23} = -\frac{\nu x_3}{A_1} \overline{\varphi''(z)}. \quad (2.5)$$

Отсюда находим деформации ε_{13} , ε_{23} :

$$\varepsilon_{13} = -\frac{\nu x_3}{2A_1} [\varphi''(z) + \overline{\varphi''(z)}], \quad \varepsilon_{23} = -\frac{i\nu x_3}{2A_1} [\varphi''(z) - \overline{\varphi''(z)}]$$

В цилиндрической полярной системе координат (r, ϑ, x_3) имеем

$$\varepsilon_{r3} + i\varepsilon_{\vartheta 3} = (\varepsilon_{13} + i\varepsilon_{23}) e^{-i\vartheta} \quad (2.6)$$

Компоненты тензора напряжений также представим при помощи комплексных потенциалов в виде удобных комбинаций, используя которые нетрудно найти выражения отдельных компонент тензора напряжений. Используя в этих целях соотношения (1.1), (1.3), (2.1)–(2.6), находим:

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\vartheta\vartheta} = \sigma_{11} + \sigma_{22} = 2\mu(x_3) \frac{1+\nu}{A_1} [\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] \quad (2.7)$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} - \sigma_{rr} + 2i\sigma_{r\vartheta} = (\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12}) e^{2i\vartheta} = 2\mu(x_3) \frac{e^{2i\vartheta}}{A_1} [A_3 z \overline{\varphi''(z)} + \psi'(z)] \quad (2.8)$$

$$\sigma_{r3} + i\sigma_{\vartheta 3} = (\sigma_{13} + i\sigma_{23}) e^{-i\vartheta} = -2\mu(x_3) \frac{\nu x_3}{A_1} \overline{\varphi''(z)} e^{-i\vartheta} \quad (2.9)$$

Заметим, что если деформируемая пластинка содержит круговую область или круговой контур, удобно использовать приводимую ниже комбинацию, получаемую вычитанием соотношения (2.8) из соотношения (2.7):

$$\sigma_{rr} - i\sigma_{r\vartheta} = \mu(x_3) \frac{1}{A_1} \{ (1+\nu) [\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] - [A_3 z \overline{\varphi''(z)} + \psi'(z)] e^{2i\vartheta} \} \quad (2.10)$$

3. Решение задачи об одноосном растяжении тонкой пластинки с центральным круглым отверстием, изготовленной из неоднородного по ее толщине материала. Полученные выше выражения для различных комбинаций компонент вектора перемещений и тензора напряжений используются в сочетаниях, определяемых постановкой и содержанием решаемых задач. При определении напряженно-деформированного состояния в бесконечной пластинке с круглым отверстием радиуса R при одноосном растяжении вдоль координатной оси x_1 удобно использовать декартову систему координат при реализации граничных условий на бесконечности и полярную цилиндрическую –

в окрестности контура круглого отверстия. Начала указанных систем координат расположим в центре отверстия.

Будем считать, что на бесконечности приложено растягивающее напряжение σ_{11} , распределенное симметрично относительно средней плоскости пластинки по закону

$$\sigma_{11}|_{\infty} = p_0 (x_3/h)^{2k} \quad (3.1)$$

Заметим, что в силу принципа Сен-Венана это предположение не оказывает влияния на распределение напряжений на некотором удалении от места приложения растягивающей силы. Кроме того, на бесконечности будем считать справедливыми условия:

$$\sigma_{22}|_{\infty} = \sigma_{12}|_{\infty} = 0 \quad (3.2)$$

На контуре свободного кругового отверстия имеем граничное условие

$$(\sigma_{rr} - i\sigma_{r\vartheta})|_{r=R} = 0 \quad (3.3)$$

Используемые для решения задачи комплексные потенциалы $\Phi(z) = \varphi'(z)$ и $\Psi(z) = \psi'(z)$ зададим в виде разложений:

$$\Phi(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^{-m}, \quad \Psi(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^{-m} \quad (3.4)$$

Из соотношений (2.7)–(2.9) видно, что комплексные потенциалы $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ вполне позволяют определить компоненты тензора напряжений, однако для представления перемещений (1.12) или (1.13) необходимо иметь выражения для комплексных потенциалов $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ [9]:

$$\varphi(z) = a_0 z + a_1 \ln z - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{m+1}}{m} z^{-m}, \quad \psi(z) = b_0 z + b_1 \ln z - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_{m+1}}{m} z^{-m} \quad (3.5)$$

Реализуя граничные условия (3.1) и (3.2) при помощи соотношений (2.7) и (2.8), имеем

$$2\mu_0 \frac{1+\nu}{A_1} (a_0 + \bar{a}_0) = p_0, \quad 2\mu_0 \frac{b_0}{A_1} = -p_0$$

Принимая во внимание вид соотношений (2.1)–(2.3) и (2.7), считаем, следуя [9], что мнимая часть коэффициента a_0 равна нулю. Тогда получим первые коэффициенты разложений (3.4):

$$a_0 = \frac{A_1}{1+\nu} \frac{p_0}{4\mu_0}, \quad b_0 = -A_1 \frac{p_0}{2\mu_0} \quad (3.6)$$

Остальные коэффициенты определяются при помощи граничного условия (3.3) путем приравнивая выражений при одинаковых значениях показателей экспоненциальной функции, производимого при помощи соотношения (2.10), в котором использованы представления (3.4):

$$(1+\nu) \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{R^m} e^{-im\vartheta} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\bar{a}_m}{R^m} e^{im\vartheta} \right] + e^{2i\vartheta} \left[A_3 \bar{z} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{ma_m}{R^{m+1}} e^{-(m+1)\vartheta} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{R^m} e^{-im\vartheta} \right] = 0 \quad (3.7)$$

В первую очередь обратим внимание на следующее обстоятельство. В комплексные потенциалы $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, задаваемые соотношениями (3.5), коэффициенты a_1 и b_1 входят в качестве множителей при функции $\ln(z)$, в силу чего для обеспечения однозначности комплексных потенциалов в рассматриваемой задаче указанные коэффициен-

ты должны быть равны нулю [9]. Действительно, коэффициенты при $e^{i\vartheta}$ в формуле (3.7) удовлетворяют соотношению

$$(1 + \nu)\bar{a}_1 - b_1 = 0$$

Дополняя его условием однозначности перемещений, следующим из соотношения (1.12):

$$A_2 a_1 - \bar{b}_1 = 0$$

находим, что коэффициенты

$$a_1 = b_1 = 0 \quad (3.8)$$

Приравнявая далее выражения при одинаковых показателях экспоненциальной функции $e^{im\vartheta}$ для $m = 0; -1; 2; -2$, соответственно имеем:

$$(1 + \nu)(a_0 + \bar{a}_0) - \frac{b_2}{R^2} = 0, \quad (1 + \nu)\frac{a_1}{R} + A_3\frac{a_1}{R} - \frac{b_3}{R^3} = 0$$

$$(1 + \nu)\frac{\bar{a}_2}{R^2} - b_0 = 0, \quad (1 + \nu)\frac{a_2}{R^2} + 2A_3\frac{a_2}{R^2} - \frac{b_4}{R^4} = 0$$

Из этих соотношений, при учете выражений (3.6) и (3.8), последовательно находим:

$$b_2 = A_1 \frac{p_0}{2\mu_0} R^2, \quad b_3 = 0, \quad \bar{a}_2 = -\frac{A_1}{1 + \nu} \frac{p_0}{2\mu_0} R^2, \quad b_4 = -(1 + \nu + 2A_3) \frac{A_1}{1 + \nu} \frac{p_0}{2\mu_0} R^4 \quad (3.9)$$

Все остальные коэффициенты разложений (3.4) равны нулю.

Используя соотношения (3.6), (3.8), (3.9), разложения (3.5) представим в виде:

$$\varphi(z) = \frac{A_1}{1 + \nu} \frac{p_0}{2\mu_0} \left(\frac{z}{2} + \frac{R^2}{z} \right) \quad (3.10)$$

$$\psi(z) = -A_1 \frac{p_0}{2\mu_0} \left[z + \frac{R^2}{z} - \frac{1 + \nu + 2A_3}{3(1 + \nu)} \frac{R^4}{z^3} \right] \quad (3.11)$$

Компоненты тензора напряжений находим при помощи соотношений (2.7)–(2.9) с использованием выражений (3.10) и (3.11):

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= M(x_3) \frac{p_0}{2} \left\{ \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) + \left[1 - 2 \left(1 + \frac{1 - 2\nu k}{1 + \nu} \right) \frac{R^2}{r^2} + \frac{3 + \nu - 4\nu k}{1 + \nu} \frac{R^4}{r^4} \right] \cos 2\vartheta \right\} \\ \sigma_{\vartheta\vartheta} &= M(x_3) \frac{p_0}{2} \left\{ \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) - \left[1 + 2 \left(1 - \frac{1 - 2\nu k}{1 + \nu} \right) \frac{R^2}{r^2} + \frac{3 + \nu - 4\nu k}{1 + \nu} \frac{R^4}{r^4} \right] \cos 2\vartheta \right\} \\ \sigma_{r\vartheta} &= -M(x_3) \frac{p_0}{2} \left[1 + 2 \frac{1 - 2\nu k}{1 + \nu} \frac{R^2}{r^2} - \frac{3 + \nu - 4\nu k}{1 + \nu} \frac{R^4}{r^4} \right] \sin 2\vartheta \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\sigma_{r3} = -2M(x_3)p_0 \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{R^2 x_3}{r^3} \cos 2\vartheta$$

$$\sigma_{\vartheta 3} = -2M(x_3)p_0 \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{R^2 x_3}{r^3} \sin 2\vartheta,$$

в которых вид функции $M(x_3)$ устанавливается соотношением (1.1).

Приведем также определяемые при помощи соотношений (1.13), (1.2) и (2.2) компоненты вектора перемещений:

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{p_0}{4\mu_0} \left[\frac{1-\nu}{1+\nu} r + \frac{R^2}{r} + \left(r + 2 \frac{2-\nu-2\nu k}{1+\nu} \frac{R^2}{r} - \frac{3+\nu-4\nu k}{3(1+\nu)} \frac{R^4}{r^3} \right) \cos 2\vartheta \right], \\ u_\vartheta &= -\frac{p_0}{4\mu_0} \left[r + \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{R^2}{r} + \frac{3+\nu-4\nu k}{3(1+\nu)} \frac{R^4}{r^3} \sin 2\vartheta \right] \\ u_3 &= -\frac{\nu x_3}{1+\nu} \frac{p_0}{2\mu_0} \left(1 - 2 \frac{R^2}{r^2} \cos 2\vartheta \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Для однородной по толщине пластинки компоненты напряжений и перемещений определяются соотношениями (3.12) и (3.13), в которых коэффициент $k = 0$, а $M(x_3) \equiv 1$.

Таким образом, полученное решение описывает напряженное состояние, реализуемое в задаче Кирша при заданной в виде соотношения (1.1) неоднородности. Для случая $k = 0$ приводимые выражения для компонент напряжений и вектора перемещений представляют собой решение задачи Кирша для однородного материала в пространственной постановке [8]. Выражения для компонент напряжений, получаемые при помощи классического решения задачи Кирша в рамках обобщенного плоского напряженного состояния, следуют из представленного решения (3.12) при задании коэффициента Пуассона $\nu = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ляв А. Математическая теория упругости. М.; Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. 674 с.
2. Гольдштейн Р.В., Попов А.Л., Козинцев В.М. и др. Исследование остаточных напряжений методом электронной спекл-интерферометрии // Актуальные проблемы механики.: Механика деформ. тверд. тела. Сб. тр. / Отв. ред. Р.В. Гольдштейн; ИПМех РАН. М.: Наука, 2009. С. 479–494.
3. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 575 с.
4. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1970. 568 с.
5. Амензаде Ю.А. Теория упругости. М.: Высшая школа, 1974. 272 с.
6. Шарафутдинов Г.З. Применение функций комплексного переменного к некоторым пространственным задачам теории упругости // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 4. С. 659–669.
7. Шарафутдинов Г.З. Некоторые плоские задачи теории упругости. М.: Научный мир, 2014. 464 с.
8. Шарафутдинов Г.З. Решение задачи Кирша в трехмерной постановке // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика, 2001. № 6. С. 20–25.
9. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.